

Technology in secondary mathematics education: buttons and/or brains?

Paul Drijvers

Freudenthal Institute

p.drijvers@uu.nl

www.fi.uu.nl/~pauld

June, 17th, 2010



Universiteit Utrecht

[Faculteit Bètawetenschappen
FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

~~Technology in secondary mathematics education: buttons and/or brains?~~

Paul Drijvers

Freudenthal Institute

p.drijvers@uu.nl

www.fi.uu.nl/~pauld

June, 17th, 2010

Musical Metaphor S

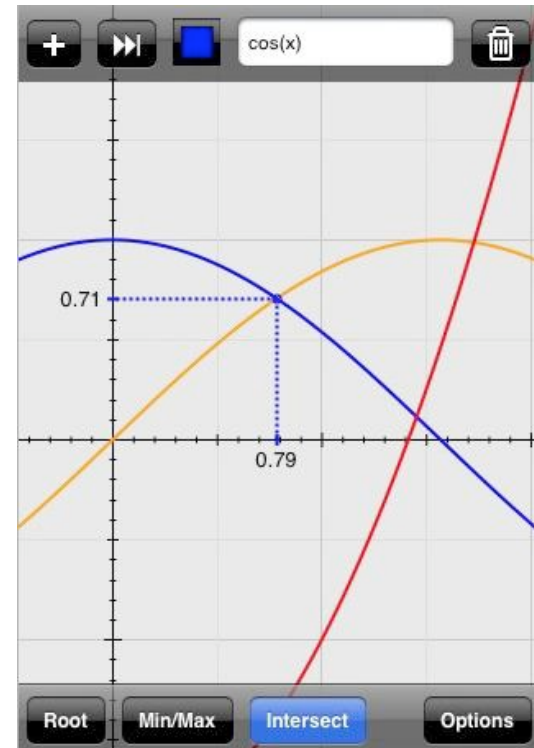


Universiteit Utrecht

[Faculteit Bètawetenschappen
FISME Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education]

Outline

- Instruments ▶
- Instrumentation ▶
- Resonance ▶
- Orchestration ▶
- Conclusion ▶



Instruments: mathematical stance

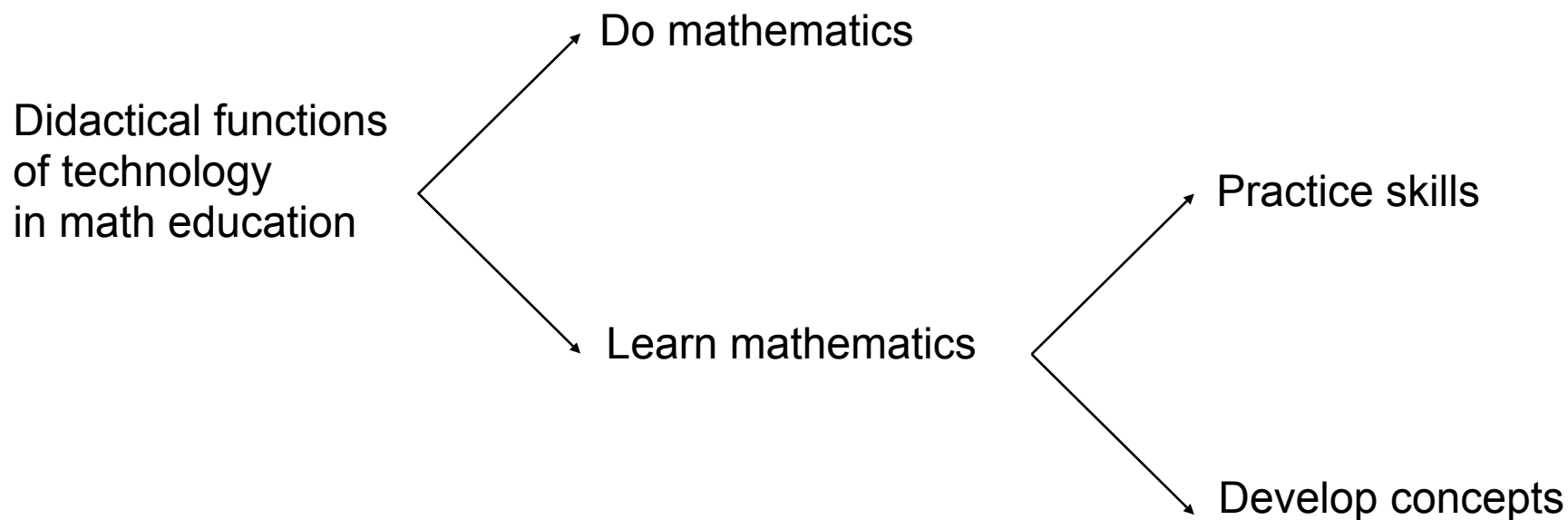
Mathematical functionalities of ICT:

- Arithmetic (calculator)
- Algebraic manipulation (CAS)
- Formulas, tables & graphs (GC)
- Dynamic geometry (DGS)
- Data analysis and statistics (SS)
- Dynamic modeling (DMS)



cTWO (2008). *Use to learn*. www.ctwo.nl

Instruments: didactical stance



Drijvers, P. & Zwaneveld, B. (2008). Van knoppen naar kennis. *Handboek Vakdidactiek Wiskunde*. www.elwier.nl.

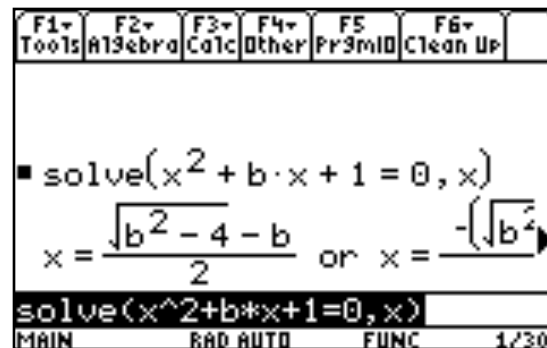
Instruments: practical stance

- Handheld (GC) <-> desktop (PC)
- Individual (netbook) <-> Collective (IAW)
- Stand alone (calc) <-> Connected (webbased)
- Personal ownership <-> School ownership
- Long life battery <-> Power supply needed
- Math dedicated <-> General purpose
- Permanent availability <-> School availability



Instrumentation: example (1)

- Solving an equation using CAS is not straightforward.
- For example, the tool displays

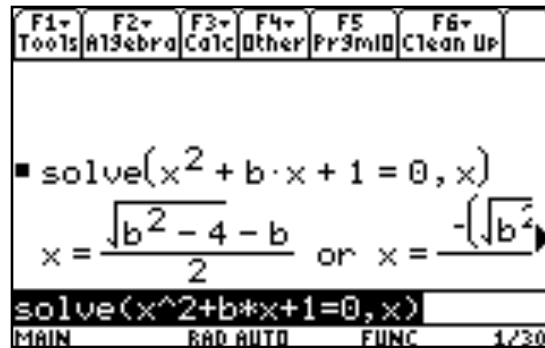


and a student writes down:

$$\begin{aligned} \text{nulpunten} &= \frac{\sqrt{b^2 - 4} - b}{2} \quad \text{en} \quad \frac{-\sqrt{b^2 - 4} + b}{2} \\ \text{midden} &= -\frac{1}{2} b. \end{aligned}$$

Instrumentation: example (1)

- Solving an equation using CAS is not straightforward.
- For example, the tool displays



and a student writes down:

The student's handwritten work is enclosed in a rectangular box. It shows the solutions for the roots of the equation $x^2 + bx + 1 = 0$. The first line reads "nulpunten = $\frac{\sqrt{b^2 - 4} - b}{2}$ en $\frac{-\sqrt{b^2 - 4} + b}{2}$ ". The second line reads "midden = $-\frac{1}{2} b$ ". The expression $\sqrt{b^2 - 4} + b$ in the denominator of the second root is circled in orange.

Instrumentation: example (1)

- Conceptual and technical difficulties of Solve command

an equation should contain an = sign

indicate the unknown to solve

the solution can be an expression

```
F1- Tools  F2- Algebra  F3- Calc  F4- Other  F5- Prbrnd  F6- Clean Up
┌───────────┐
│ solve(x^2 + b*x + 1 = 0, x) │
│ x = (sqrt(b^2 - 4) - b) / 2 or x = (-sqrt(b^2)) / 2 │
└───────────┘
MAIN      END EXACT  FUNC      1/30
```

notice the scope of the square root sign

'solve with respect to x' = 'express x in terms of b'

Instrumentation: example (2)

Verschuivend zwaartepunt

Een kubusvormige bak met deksel heeft binnenmaten 10 bij 10 bij 10 cm en weegt 1 kilogram.

Het zwaartepunt B van de bak ligt in het centrum van de bak, dus 5 cm boven het midden van de bodem.

De bak wordt met water gevuld tot een hoogte van h cm.

Het zwaartepunt W van het water (de bak niet meegerekend) ligt in het centrum van het water, dus $\frac{1}{2}h$ cm boven het midden van de bodem.

Zie de foto en figuur 1 waarin op schaal een vooraanzicht van de bak is getekend.

Het zwaartepunt van het geheel (bak en water samen) noemen we T .

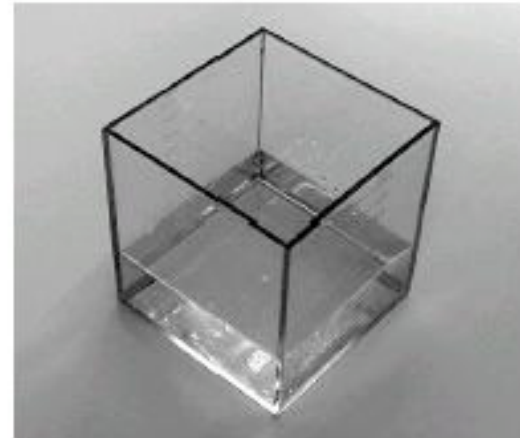
Het punt T ligt op het lijnstuk BW .

Er geldt:

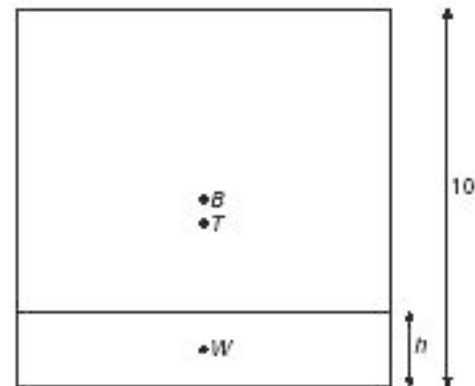
$$d_T = \frac{h}{h+10} \cdot d_W + \frac{10}{h+10} \cdot d_B$$

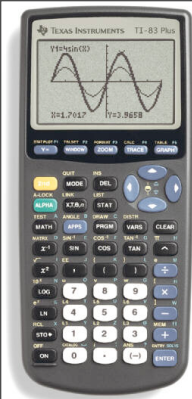
Hierbij zijn d_T , d_W en d_B de afstand in cm van achtereenvolgens T , W en B tot de bodem.

foto



figuur 1





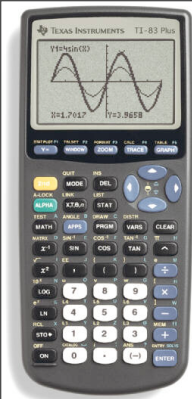
3p 1 Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

4p 2 Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h , geldt: $d_T = \frac{h^2 + 100}{2h + 20}$.

Als de bak leeg is, valt T samen met B . Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B .

4p 3 Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4,5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

6p 4 Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.



3p 1 Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

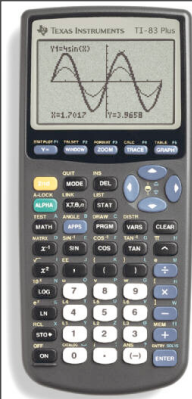
4p 2 Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h , geldt: $d_T = \frac{h^2 + 100}{2h + 20}$.

Als de bak leeg is, valt T samen met B . Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B .

4p 3 Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4,5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

6p 4 Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(X^2+100)/(2X
+20)
\Y2=4.5
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```



3p 1 Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

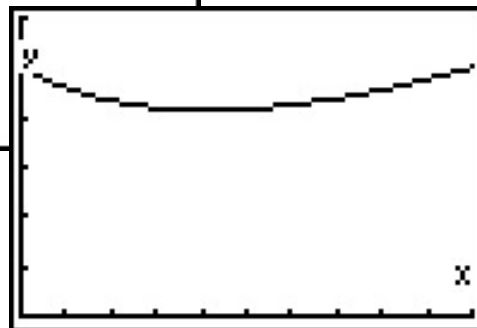
4p 2 Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h , geldt: $d_T = \frac{h^2 + 100}{2h + 20}$.

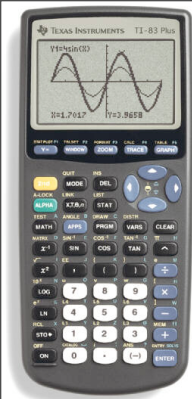
Als de bak leeg is, valt T samen met B . Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B .

4p 3 Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4,5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

6p 4 Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(X^2+100)/(2X
+20)
\Y2=4.5
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```





3p 1 Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

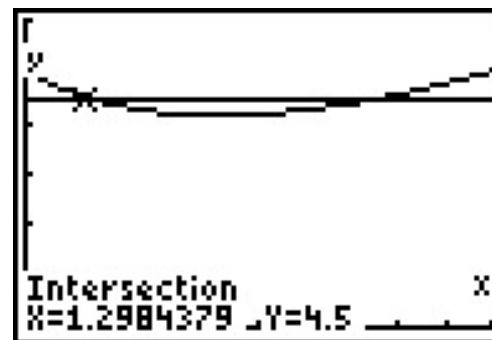
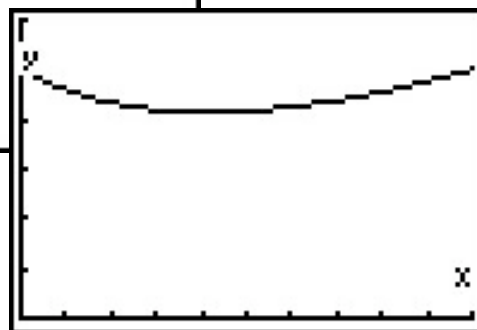
4p 2 Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h , geldt: $d_T = \frac{h^2 + 100}{2h + 20}$.

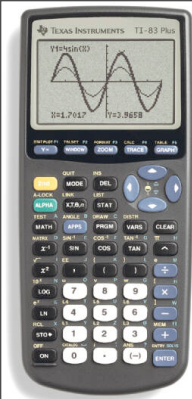
Als de bak leeg is, valt T samen met B . Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B .

4p 3 Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4,5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

6p 4 Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(X^2+100)/(2X
+20)
\Y2=4.5
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```





3p 1 Bereken d_T voor $h = 3$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

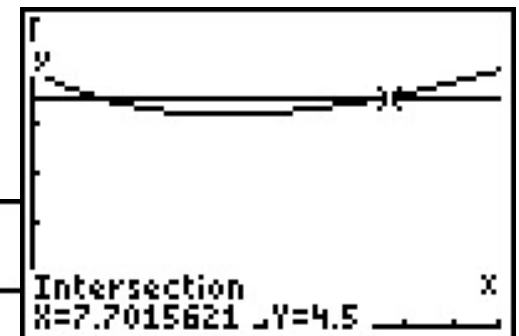
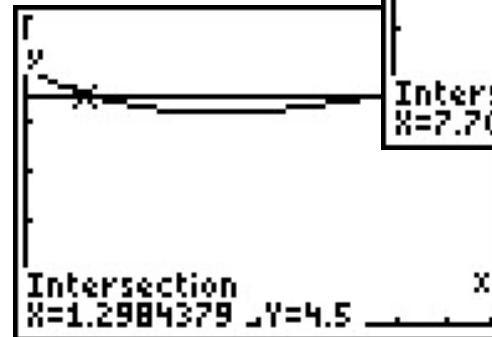
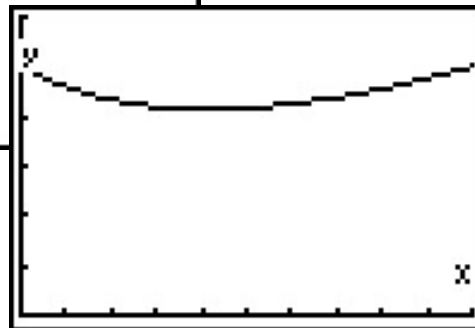
4p 2 Toon aan dat voor de afstand van T tot de bodem, uitgedrukt in h , geldt: $d_T = \frac{h^2 + 100}{2h + 20}$.

Als de bak leeg is, valt T samen met B . Tijdens het vullen van de bak verschuift de plaats van T eerst omlaag en later weer omhoog. Als de bak vol is, valt T weer samen met B .

4p 3 Bereken voor welke waarden van h geldt: $d_T < 4,5$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

6p 4 Bereken exact voor welke waarde van h de afstand van T tot de bodem minimaal is.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(X^2+100)/(2X
+20)
\Y2=4.5
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```



Instrumentation: example (2)

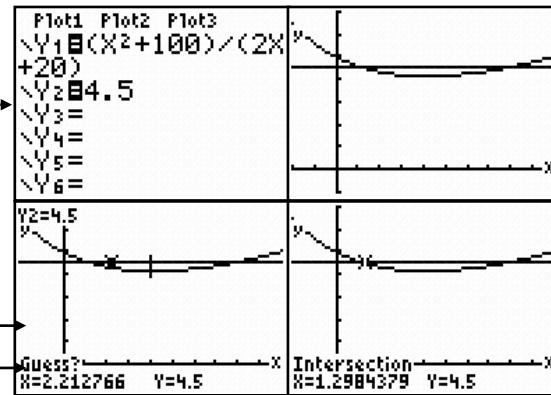
x instead of h, decimal point instead of comma, line entry instead of 'pretty print'

Solution of an equation = intersection of graphs

window setting

choose graph

choose starting value



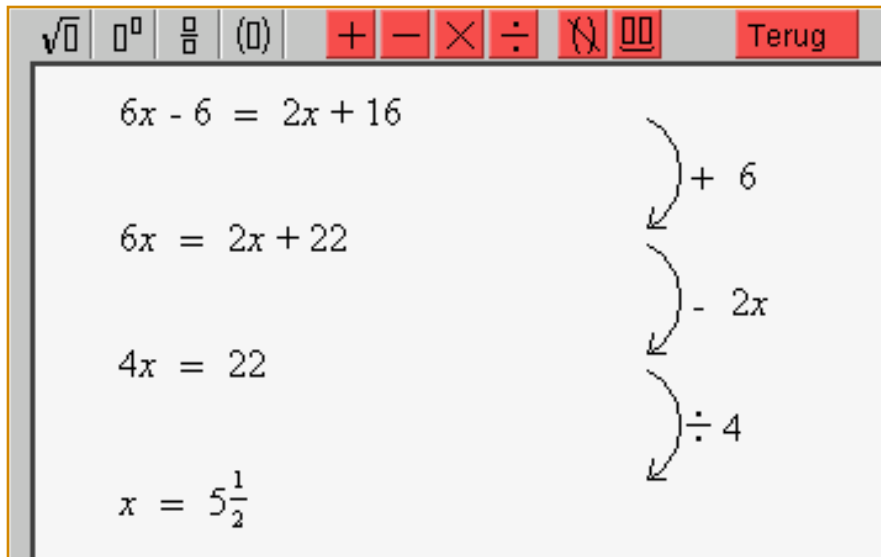
solution on an interval; there may be more solutions!

not applicable in case of parameters

approximation versus exact solution

Instrumentation: example (3)

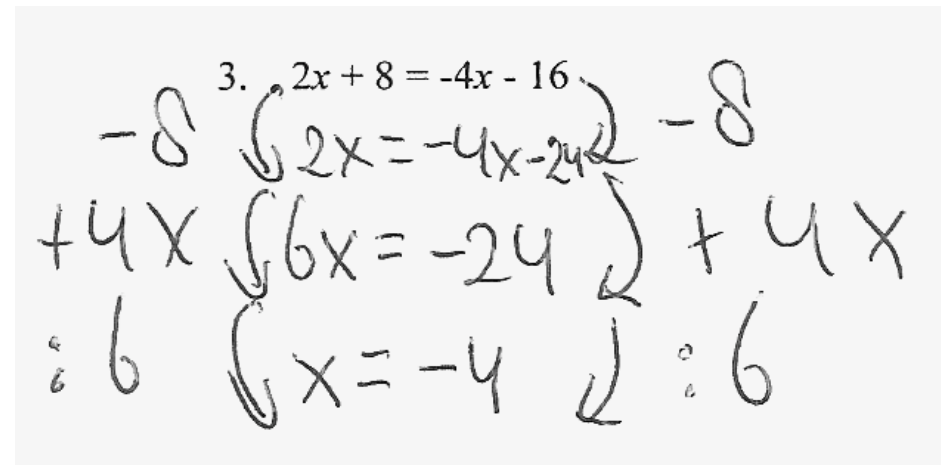
- Transfer between computer tool techniques and paper-and-pencil techniques:



A screenshot of a computer algebra system interface. The top toolbar contains icons for square root, power, fraction, parentheses, plus, minus, multiply, divide, inverse, and a red 'Terug' button. The main display area shows the following steps for solving the equation $6x - 6 = 2x + 16$:

$$6x - 6 = 2x + 16$$
$$6x = 2x + 22$$
$$4x = 22$$
$$x = 5\frac{1}{2}$$

Handwritten annotations on the right side of the equations indicate the operations performed: a right curly bracket with '+ 6' for the first step, a right curly bracket with '- 2x' for the second step, and a right curly bracket with '÷ 4' for the third step.



Handwritten solution of a linear equation on paper:

$$3. \quad 2x + 8 = -4x - 16$$
$$-8 \quad \downarrow \quad 2x = -4x - 24 \quad -8$$
$$+4x \quad \downarrow \quad 6x = -24 \quad +4x$$
$$\div 6 \quad \downarrow \quad x = -4 \quad \div 6$$

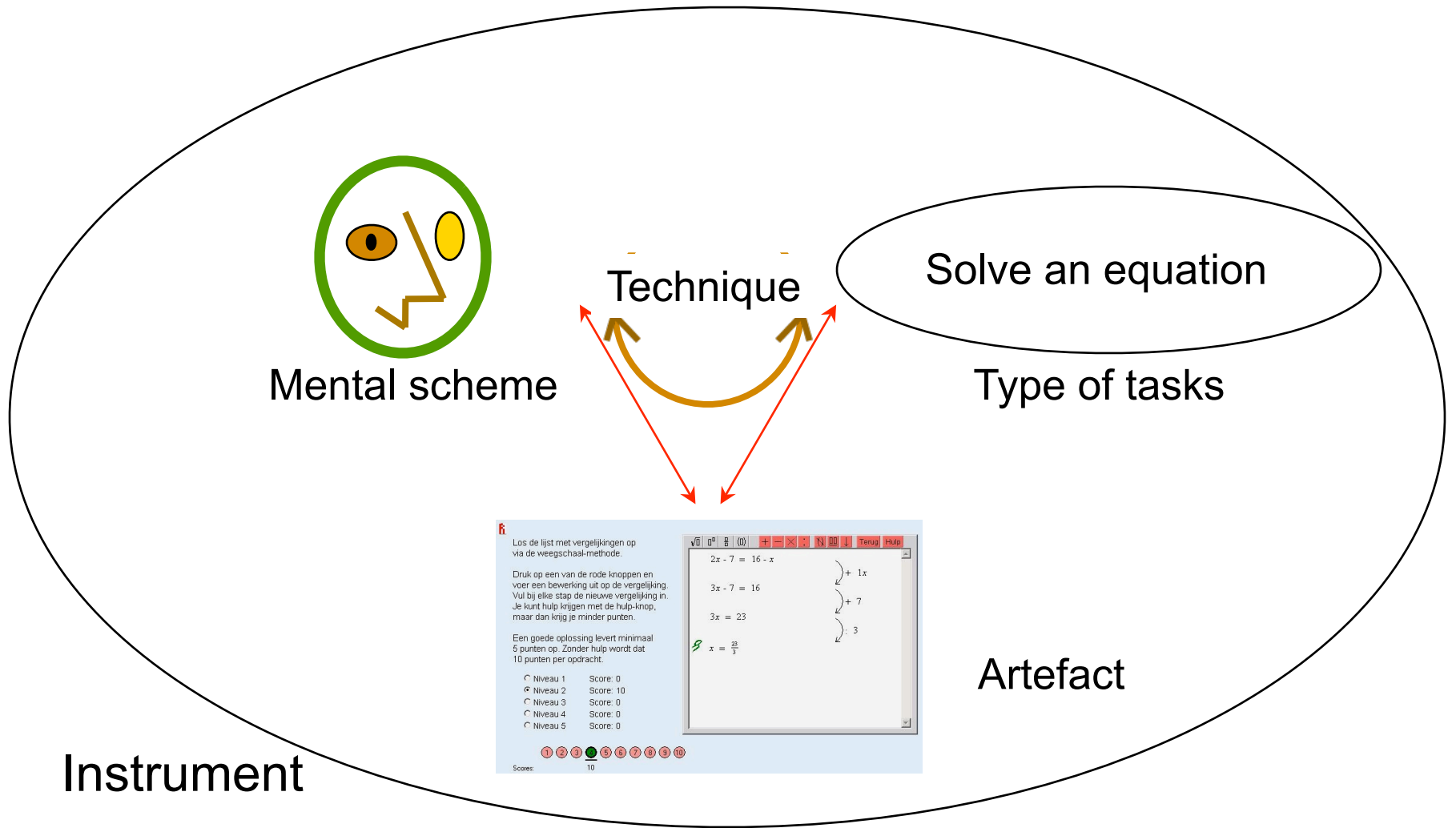
See www.wisweb.nl

Instrumentation: Artefact or instrument?

- A good artefact does not imply nice music!
- Instrument = Artefact + Schemes
- Scheme = Technique + Concepts



Instrumentation: a sketch



Los de lijst met vergelijkingen op via de weegschaal-methode.

Druk op een van de rode knoppen en voer een bewerking uit op de vergelijking. Vul bij elke stap de nieuwe vergelijking in. Je kunt hulp krijgen met de hulp-knop, maar dan krijg je minder punten.

Een goede oplossing levert minimaal 5 punten op. Zonder hulp wordt dat 10 punten per opdracht.

<input type="checkbox"/> Niveau 1	Score: 0
<input checked="" type="checkbox"/> Niveau 2	Score: 10
<input type="checkbox"/> Niveau 3	Score: 0
<input type="checkbox"/> Niveau 4	Score: 0
<input type="checkbox"/> Niveau 5	Score: 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Scores: 10

$$\begin{array}{r} 2x - 7 = 16 - x \\ 3x - 7 = 16 \\ 3x = 23 \\ x = \frac{23}{3} \end{array} \begin{array}{l} + 1x \\ + 7 \\ - 3 \end{array}$$

Instrumentation: conclusion

- There is a close relationship between
 - Techniques and representations that tools offer, and
 - Mental schemes that students develop
- This relation has to be taken into account and exploited for educational goal
- Tool + Task + Technique ->
Cognitive development

Drijvers, P. (2007). Instrument, orkest en dirigent: een theoretisch kader voor ICT-gebruik in het wiskundeonderwijs. *Pedagogische Studiën*, 84 (5), 358-374.



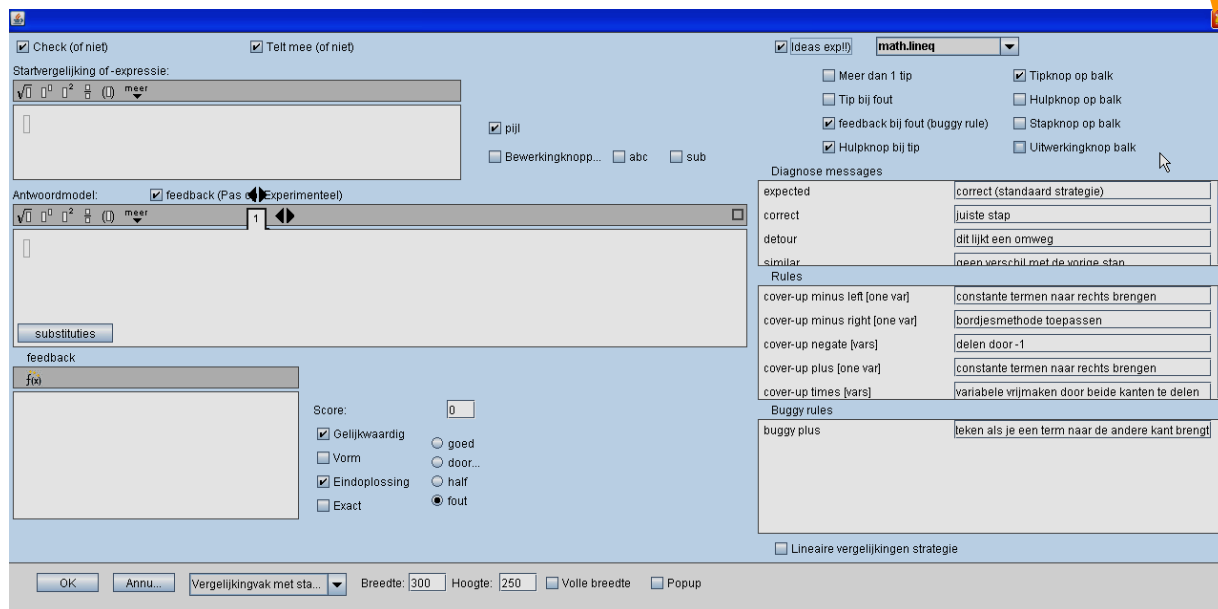
'Resonance'

- FI's Digital Mathematics Environment DME:
 - Content (applets, SCORM)
 - Authoring environment (including design of feedback)
 - Administration and monitoring system (LMS, CMS, including log facilities)

'Resonance'

■ FI's Digital Mathematics Environment DME:

- Content (applets, SCORM)
- Authoring environment (including design of feedback)
- Administration and monitoring system (LMS, CMS, including log facilities)



Resonance: DME qualities

- DME scores good on feedback facilities

Table 3 Scores of the seven digital tools for assessing algebraic skills

Item category	Tool						
	WIMS	STACK	MAPLE TA	DME	WIRIS	ACTIVEMATH	WEBWORK
Algebra total	138.48	133.51	101.51	154.39	127.24	137.45	117.71
Tool total	105.77	106.16	140.02	145.69	92.53	99.62	118.62
Assessment total	111.52	112.40	125.27	119.11	34.80	97.26	125.27
General total	130.72	100.74	75.95	103.21	103.26	112.05	102.27
Total score	486.49	452.82	442.76	522.40	357.82	446.37	463.87
Rank	2	4	6	1	7	5	3

Bokhove, C. & Drijvers, P. (2010). Assessing assessment tools for algebra: Design and application of an instrument for evaluating tools for digital assessment of algebraic skills. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(1). Online First.

Resonance

Theories on (types of) feedback:

- Hattie & Timperley (2007)
- Gerdes et al. (2008):
 - Correct/incorrect statements
 - Distance to the solution
 - Rule-based feedback
 - Buggy rules
 - Strategy feedback

Gerdes, A., Heeren, B., Jeuring, J., & Stuurman, S. (2008). *Feedback Services for Exercise Assistants*. Utrecht: Utrecht University.

Resonance

- Ideas-project for feedback design

The screenshot shows a math solver interface with the following steps:

- Equation: $x^4 + 36 = 13x^2$
- Step 1: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (Action: alles naar links brengen)
- Step 2: $p^2 - 13p + 36 = 0$ (Action: substitutie gebruiken)
- Step 3: $(p - 4)(p - 9) = 0$ (Action: ontbinden)
- Step 4: $p = 4$ of $p = 9$ (Action: de factoren op 0 stellen)
- Step 5: (Action: terug substitueren)

Tip:
alles naar links brengen

$$x^4 + 36 = 13x^2$$

wordt dan:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

- <http://ideas.cs.uu.nl/> and <http://www.fi.uu.nl/dwo/ideas/frameaset.html>

Resonance: conclusion

- The design of intelligent feedback is an important task for the nearby future
- Research is needed on the design principles for different types of feedback and their impact on student performance

1.11	09:10:51	01-Feb-2010	1 half	3	$-1+((\text{abs}(x))^{\sim}(2)) = 0$ of $4*x-11 = 2*x+12$			
1.11	09:11:15	01-Feb-2010	2 half	3	$-1+((\text{abs}(x))^{\sim}(2)) = 0$ of $2*x-23 = 0$			
1.11	09:11:34	01-Feb-2010	3 half	3	$-1+((\text{abs}(x))^{\sim}(2)) = 0$ of $2*x = 23$			
1.11	09:11:53	01-Feb-2010	4 half	3	$-1+((\text{abs}(x))^{\sim}(2)) = 0$ of $x = 11+((1)/(2))$			
1.11	09:13:33	01-Feb-2010	5 half	3	$(\text{abs}(x))^{\sim}(2) = 1$ of $x = 11+((1)/(2))$			
1.11	09:14:12	01-Feb-2010	6 half	7	$2^{\wedge}(1) = x$ of $x = 11+((1)/(2))$			Oplossing is goed, maar
1.11	09:15:09	01-Feb-2010	7 goed	10	$x = 2$ of $x = 11+((1)/(2))$			De vergelijking is correc

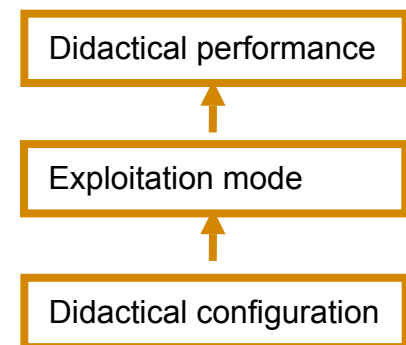
- Research Bokhove, www.algebrametinzicht.nl



Orchestration

- Good tools with intelligent feedback do not guarantee good math education.
- Growing awareness that teachers are crucial in the integration of technology into mathematics education:
 - Gueudet & Trouche (2009)
 - Lagrange & Monaghan (2009)
 - Lagrange & Ozdemir Erdogan (2009)
 - Maracci & Mariotti (2009)
 - Pierce & Ball (2009)
 - Ruthven, Deaney & Hennessy (2009)
- Issue at stake: what do teachers *do* when they integrate technology in their teaching and *why* do they do so?

- Instrumental orchestration as a model for analysing teacher activity (Trouche, 2004; Drijvers & Trouche, 2008)
- An *instrumental orchestration*: the teacher's intentional and systematic organisation and use of the various artefacts available in a learning environment in a given mathematical task situation, in order to guide students' instrumental genesis.
- An instrumental orchestration:
 - a didactical configuration
 - an exploitation mode
 - a didactical performance



A symphony orchestra conductor?




Trouche, L. & Drijvers, P. (in press). Handheld technology: Flashback into the future.
ZDM, The International Journal on Mathematics Education.

A symphony orchestra conductor? Rather a jazz band leader...



Trouche, L. & Drijvers, P. (in press). Handheld technology: Flashback into the future.
ZDM, The International Journal on Mathematics Education.

Orchestration: example EPN-pilot

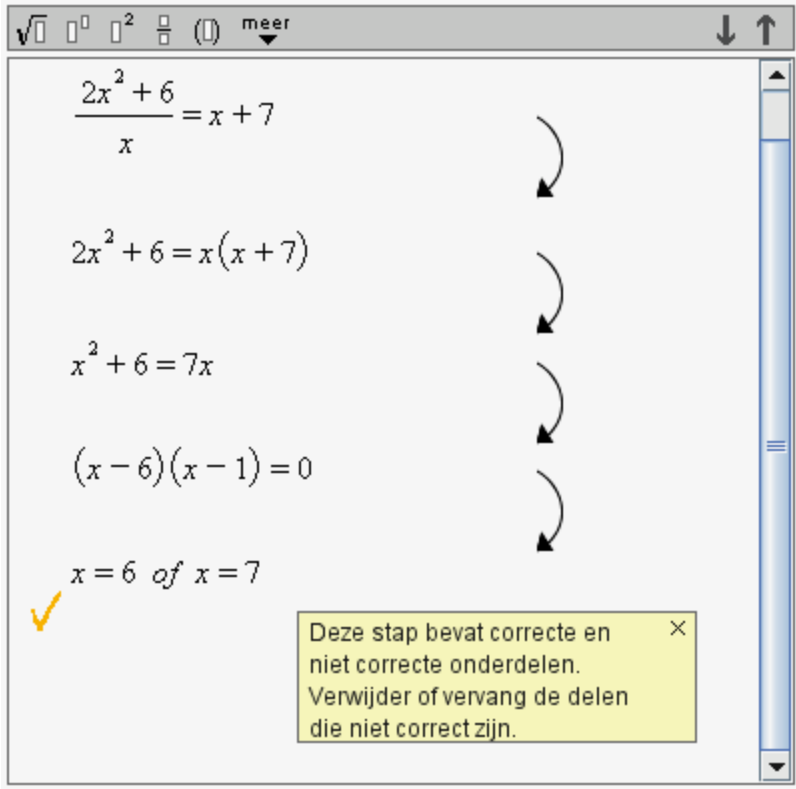


Je kunt de opgave ook oefenen met **vergelijkingen 2**.

7 Los exact op.

a $\frac{x^2 + 3}{2x} = x - 1$

b $\frac{4^x - 2^x - 6}{2^x - 4} = 0$



$\frac{2x^2 + 6}{x} = x + 7$

$2x^2 + 6 = x(x + 7)$

$x^2 + 6 = 7x$

$(x - 6)(x - 1) = 0$

$x = 6$ of $x = 7$

Deze stap bevat correcte en niet correcte onderdelen. Verwijder of vervang de delen die niet correct zijn.

<http://www.fi.uu.nl/dwo/gr-pilot/>

<http://www.epn.nl/wps/portal/epn/getalenruimte/ictpilot#vwo>

Orchestration: example EPN-pilot

Werkvormen	niet	weinig	veel
Klassikale uitleg	32,5	47,5	20
Klassikale demonstratie	37,5	47,5	15
Klassikale nabespreking	40	47,5	12,5
Klassikale presentaties	97,5	2,5	0
Individueel	5	2,5	92,5
Werken in tweetallen	27,5	25	47,5
Groepswerk	92,5	5	2,5
Huiswerk	7,5	52,5	40
N=40			

Tabel 6 Gebruikte ICT-middelen en werkvormen tijdens de pilot



Drijvers, P., Niekus, N. & Boon, P. (2010). *Pilot Algebraïsche Vaardigheden en ICT*.
Utrecht: Freudenthal Instituut.

Orchestration: Tool Use project

Orchestration type	Teacher A	Teacher A	Teacher A	Teacher B	Teacher C	Total
	cycle 1	cycle 2	cycle 3			
Technical-demo	5	3	5	2	7	22
Explain-the-screen	0	0	1	0	7	8
Link-screen-board	3	0	3	6	0	12
Discuss-the-screen	4	4	2	3	1	14
Spot-and-show	0	1	2	12	2	17
Sherpa-at-work	2	7	1	0	0	10
Total	14	15	14	23	17	83

Drijvers et al, (in press). The teacher and the tool; whole-class teaching behavior in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*.

Orchestration: Tool Use project

Orchestration type	Teacher A cycle 1	Teacher A cycle 2	Teacher A cycle 3	Teacher B	Teacher C	Total
Technical-demo	5	3	5	2	7	22
Explain-the-screen	0	0	1	0	7	8
Link-screen-board	3	0	3	6	0	12
Discuss-the-screen	4	4	2	3	1	14
Spot-and-show	0	1	2	12	2	17
Sherpa-at-work	2	7	1	0	0	10
Total	14	15	14	23	17	83

Drijvers et al, (in press). The teacher and the tool; whole-class teaching behavior in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*.

Orchestration: Tool Use project

Orchestration type	Teacher A cycle 1	Teacher A cycle 2	Teacher A cycle 3	Teacher B	Teacher C	Total
Technical-demo	5	3	5	2	7	22
Explain-the-screen	0	0	1	0	7	8
Link-screen-board	3	0	3	6	0	12
Discuss-the-screen	4	4	2	3	1	14
Spot-and-show	0	1	2	12	2	17
Sherpa-at-work	2	7	1	0	0	10
Total	14	15	14	23	17	83

Drijvers et al, (in press). The teacher and the tool; whole-class teaching behavior in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*.

Orchestration: Tool Use project

Orchestration type	Teacher A cycle 1	Teacher A cycle 2	Teacher A cycle 3	Teacher B	Teacher C	Total
Technical-demo	5	3	5	2	7	22
Explain-the-screen	0	0	1	0	7	8
Link-screen-board	3	0	3	6	0	12
Discuss-the-screen	4	4	2	3	1	14
Spot-and-show	0	1	2	12	2	17
Sherpa-at-work	2	7	1	0	0	10
Total	14	15	14	23	17	83

Drijvers et al, (in press). The teacher and the tool; whole-class teaching behavior in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*.

Orchestration: Tool Use project

Orchestration type	Teacher A cycle 1	Teacher A cycle 2	Teacher A cycle 3	Teacher B	Teacher C	Total
Technical-demo	5	3	5	2	7	22
Explain-the-screen	0	0	1	0	7	8
Link-screen-board	3	0	3	6	0	12
Discuss-the-screen	4	4	2	3	1	14
Spot-and-show	0	1	2	12	2	17
Sherpa-at-work	2	7	1	0	0	10
Total	14	15	14	23	17	83

Drijvers et al, (in press). The teacher and the tool; whole-class teaching behavior in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*.

Orchestration: Conclusion

- Orchestrating the use of technology in the mathematics classroom is far from evident
- Several orchestration types are identified. Not yet clear how general they are
- The teachers' repertoires of orchestrations and corresponding choices reflect their views on mathematics education and the role of technology therein



Conclusion: buttons and/or brains?

- Instrumentation perspective:
tools and tasks should invite the development of cognitive schemes that involve mathematical thinking
- Resonance perspective:
appropriate intelligent feedback is needed to stimulate and monitor learning
- Orchestration perspective:
teachers' professional development is crucial in the integration of technology in mathematics education

