Uitwerking Herkansingstentamen, Infi C, 13-1-2010

Opgave 1 [15 pt]. Laten $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ vectorvelden op $\mathbb{R}^3$ zijn, beide behorend tot $\mathcal{C}^1$. Bewijs dan dat $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.

Oplossing De eerste component van $\mathbf{C} := \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ is $C_1 := A_2B_3 - A_3B_2$. Dan $C_{1x} := \frac{\partial C_1}{\partial x} = A_{2x}B_3 + A_2B_{3x} - A_{3x}B_2 - A_3B_{2x}$. Net zo vind je voor de twee andere componenten soortgelijke uitdrukkingen voor C_{2y} en C_{3z}. Optellen geeft dan

$$\begin{aligned}\nabla \cdot C = A_{2x}B_3 + A_2B_{3x} - A_{3x}B_2 - A_3B_{2x} + A_{3y}B_1 + A_3B_{1y} - \\ -A_{1y}B_3 - A_1B_{3y} + A_{1z}B_2 + A_1B_{2z} - A_{2z}B_1 - A_2B_{1z}\end{aligned}$$

en dit kan worden herschreven als

$$B_1(A_{3y} - A_{2z}) + B_2(A_{1z} - A_{3x}) + \ldots - A_3(B_{2x} - B_{1y}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).$$

Opgave 2 [30 pt]. Zij V het vlak met als vergelijking $2x + y + z = 1$. Zij $S \subset V$ de doorsnede van de cylinder $x^2 + y^2 \leq 1$ met V. Om de oriëntatie van V en zijn deelverzamelingen vast te leggen wordt $\mathbf{N} = (2, 1, 1)$ als normaalvector gekozen.

a. Bereken het oppervlak $A(S)$ van S.

b. Beschouw nu het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) := (2z, -2x, y)$. Zij C de doorsnede van V en de cylindermantel $x^2 + y^2 = 1$. De kromme C wordt zo doorlopen dat men voortdurend het georiënteerde oppervlak S "aan de linkerhand" houdt. Kies een geschikte parametrisering van C en bepaal daarmee rechtstreeks de lijnintegraal $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Bereken ook het getal $\gamma := \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}/A(S)$.

c. Zij C' nu een *willekeurige* gesloten curve in het vlak V en zij S' het door C' omsloten oppervlak. Bewijs dat de breuk $\int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}/A(S')$ nog steeds gelijk is aan γ, mits $A(S') \neq 0$ en S' voldoende regulier is.

Oplossing a. Het oppervlak S heeft de parameterrepresentatie $\Phi(x, y) = (x, y, 1 - 2x - y)$ voor $(x, y) \in D :=$ eenheidsschijf in $\mathbb{R}^2$. Dan $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (2, 1, 1) = \mathbf{N}$. Dus $A(S) = \iint_D \|(2, 1, 1)\| dxdy = \sqrt{6}A(D) = \sqrt{6}\pi$.

b. De kromme wordt geparametriseerd door $\mathbf{c}(t) := (\cos t, \sin t, 1 - 2\cos t - \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Dan $\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t, 2\sin t - \cos t)$, dus $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = -2\sin t + 3\sin t\cos t + 4\sin^2 t - 2\cos^2 t$ heeft als integraal over $[0, 2\pi)$ de uitkomst $-2 * 0 + 3 * 0 + 4\pi - 2\pi = 2\pi$. Dan dus $\gamma = 2/\sqrt{6}$.

c. Hier $\nabla \times \mathbf{F} = (1, 2, -2)$. Met Stokes volgt dus $\int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S'}(1, 2, -2) \cdot d\mathbf{S}$ en dat is gelijk aan $\iint_{S'}(1, 2, -2) \cdot \frac{\mathbf{N}}{\sqrt{6}}dS = \frac{2}{\sqrt{6}} \iint_{S'} dS = \frac{2}{\sqrt{6}}A(S')$. Hieruit volgt het over γ gestelde.

Opgave 3 [30 pt]. a. Laten $f, g \in \mathcal{C}^2$ scalaire functies zijn. Leid de volgende identiteiten af voor een voldoende regulier volume W met bijbehorend oppervlak ∂W: *(i)* $\iiint_W (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)dxdydz = \iint_{\partial W} f\nabla g \cdot d\mathbf{S}$ en *(ii)* $\iiint_W (f\Delta g - g\Delta f)dxdydz = \iint_{\partial W}(f\nabla g \cdot \mathbf{n} - g\nabla f \cdot \mathbf{n})dS$. Hier is $\Delta f := \nabla^2 f := \nabla \cdot \nabla f$ de Laplace operator.

b. Zij $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ een vast punt en schrijf $r := r(x, y, z) := \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\|$ voor de afstandsfunctie tot dat punt. Bewijs: $\nabla \frac{1}{r} = \frac{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{r^3}$ en $\Delta \frac{1}{r} = 0$, behalve voor $r = 0$. Leid hieruit af dat $\iint_U \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi$ voor $U := \{\mathbf{x} : \|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| = 1\}$, waarbij het gesloten oppervlak U naar buiten toe is georiënteerd.

c. Een functie $f \in \mathcal{C}^2$ heet *harmonisch* als daarvoor geldt $\Delta f = 0$. Bewijs met onderdeel a dat als f harmonisch is, hij de volgende eigenschap heeft: als $\nabla f \cdot \mathbf{n} = 0$ op ∂W, dan is de functie f constant op geheel W.

d. Stel dat bovengenoemd punt $\mathbf{x}_0$ in het inwendige ligt van het gebied W. Zij f in $\mathcal{C}^2$. Schets dan in het kort een argument dat de volgende identiteit kan bewijzen (het volledige bewijs levert extra punten op):

$$f(\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_W \frac{\Delta f}{r} dxdydz + \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial W} (\frac{1}{r}\nabla f \cdot \mathbf{n} - f\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{n})dS.$$

Aanwijzing: De afleiding lijkt op die van de wet van Gauss, hoewel die op zichzelf hier niet van toepassing is: gebruik een "quarantainebolletje" B_ρ rond $\mathbf{x}_0$ en laat de straal ρ daarvan naar nul gaan.

Oplossing.[1] a. De aard van de divergentiestelling en de integrand in het rechterlid doen vermoeden dat je moet aantonen $\nabla\cdot(f\nabla g)$ = integrand linkerlid. Nu $\frac{\partial}{\partial x}(fg_x) = f_x g_x + f g_{xx}$, etc., dus volgt met hergroeperen

$$\nabla\cdot(f\nabla g) = \frac{\partial}{\partial x}(fg_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fg_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fg_z) = \nabla f\cdot\nabla g + f\Delta g.$$

De identiteit (i) volgt nu dus direct uit de divergentiestelling. Door vervolgens de rol van f en g te verwisselen in (i) krijg je een tweede identiteit. Door deze af te trekken van de oorspronkelijke volgt (ii) direct.

b. Voluit geldt $1/r(x,y,z) = ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{-1/2}$. Dus $(1/r)_x = -(x-x_0)r^{-3}$ en $(1/r)_{xx} = -r^{-3} + 2\frac{3}{2}(x-x_0)^2 r^{-5}$. Differentiëren naar y en z levert soortgelijke uitdrukkingen op. Gevolg: $\nabla(1/r) = \frac{-(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{r^3}$ en $\Delta(1/r) = -3r^{-3} + 3\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2 r^{-5} = 0$. Op het gegeven oppervlak U gelden $\mathbf{n} = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)/r = (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ en $\nabla\frac{1}{r} = -(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$. Daarop geldt dus $\nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{n} = -\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2 = -1$. Gevolg:

$$\iint_U \nabla\frac{1}{r}\cdot d\mathbf{S} = \iint_U \nabla\frac{1}{r}\cdot\mathbf{n}dS = -A(U) = -4\pi.$$

Opmerking: Voor straks is het nuttig om hierbij op te merken dat als je U vervangt door $U' := \{\mathbf{x} : \|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\| = \rho\}$, met $\rho > 0$ willekeurig, hetzelfde argument kan worden herhaald. Dit geeft $\iint_{U'}\nabla r^{-1}\cdot d\mathbf{S} = -\rho^{-2}A(U') = -4\pi$.
Alternatief: Bovenstaande uitkomst, inclusief de opmerking, volgt ook door het aanroepen van de wet van Gauss, op college en in boek behandeld; daarvoor is dan wel nodig dat je de in het boek gemaakte keuze $\mathbf{x}_0 := \mathbf{0}$ correct verwerkt.

c. Pas deel a(i) toe op $g := f$. Dan krijg je $\iiint_W \|\nabla f\|^2 dxdydz = \iint_{\partial W} f\nabla f\cdot\mathbf{n}dS = 0$. Omdat de linker integrand $\|\nabla f\|^2$ *niet-negatief* en continu is, volgt $\|\nabla f\| = 0$, d.w.z. $\nabla f = \mathbf{0}$, dus volgt $f \equiv$ constante.

d. Zij $g := 1/r$ en $W_\rho := W\backslash B_\rho$ en zet even $\mathbf{F} := f\nabla\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\nabla f$. Toepassen van (ii) uit onderdeel a, met gebruikmaken van onderdeel b, geeft

$$-\iiint_{W_\rho}\frac{1}{r}\Delta f dxdydz = \iint_{\partial W_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_{\partial W}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS - \iint_{\partial B_\rho}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS. \qquad (1)$$

Merk op dat de oröentatie op ∂W naar buiten is gekeerd, maar op ∂B_ρ naar binnen. Claim (als schets van het bewijs zijn deze voldoende, maar ze worden hieronder toch

[1] Kanttekening: deze opgave is eigenlijk een vereenvoudigde versie van een op 26-10-09 gegeven huiswerkopgave.

nog even nader toegelicht): voor $\rho \downarrow 0$ geldt

$$\iiint_{B_\rho \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{1}{r} \Delta f \to 0, \iint_{\partial B_\rho} f \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{n} dS \to 4\pi f(\mathbf{x}_0) \text{ en } \iint_{\partial B_\rho} \frac{1}{r} \nabla f \cdot \mathbf{n} dS \to 0.$$

Het eerste deel van de claim volgt door overgang op bolcoördinaten: de integraal is dan $\int_0^\rho r^2 dr \int_0^\pi \sin\phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta r^{-1} \tilde{g}$ met $\tilde{g}(r,\phi,\theta) := \Delta f(r \sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$ als continue en dus op (zeg) B_1 begrensde functie. Wegens het overblijven van een term $r = r^2 r^{-1}$ in de integrand volgt het gestelde dan gemakkelijk. Het tweede deel van de claim volgt uit het feit dat voor kleine ρ de continue functie f in eerste benadering op ∂B_ρ gelijk is aan $f(\mathbf{x}_0)$ (dat argument zou je natuurlijk netjes kunnen maken "met epsilons" – wellicht had je daar op 26-10-09 zelf al over nagedacht). Dat moet je dan combineren met de opmerking over de uitkomst voor de integraal over $U' = \partial B_\rho$ in onderdeel b (bedenk daarbij dat de oriëntatie omklapt). Het tweede deel volgt wegens $1/r = 1/\rho$ op ∂B_ρ, zodat de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz $|\frac{1}{r}\nabla f \cdot \mathbf{n}| \leq \mu/\rho$ geeft. Hier is $\mu > 0$ een bovengrens voor de continue functie $\|\nabla f\|$ op (zeg) B_1. Dus volgt

$$|\iint_{\partial B_\rho} \frac{1}{r} \nabla f \cdot \mathbf{n} dS| \leq \frac{\mu}{\rho} A(\partial B_\rho) = \mu 4\pi\rho \to 0.$$

Door in (1) links en rechts de limiet voor $\rho \to 0$ te nemen en de claim te gebruiken, volgt het gevraagde.

Opgave 4 [25 pt]. Zij W het gedeelte van de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ tussen $z = 0$ en $z = 3$. Zij $\mathbf{F}$ het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z) = (x - y, y^2 z, 1)$. Formuleer hiervoor de divergentie-stelling van Gauss en controleer *expliciet* of de identiteit uit deze stelling geldt door linker- en rechterlid ervan apart uit te rekenen.

Oplossing. Merk alvast op: de rand ∂W bestaat uit twee delen, namelijk een stuk kegeloppervlak S_1 ("zijwand") en een "bovendeksel" S_2 (je maakt natuurlijk even een plaatje van de situatie). De stelling van Gauss zegt dat $\iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F} dV$ gelijk is aan $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Hier $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 2yz$.

Stap 1: bepalen van $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Het oppervlak S_1 heeft parametervoorstelling $\Phi_1(\phi, r) = (r\cos\phi, r\sin\phi, r)$; merk hierbij op dat dit de juiste oriëntatie geeft: de vector $\mathbf{N} := \mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_r = (r\cos\phi, r\sin\phi, -r)$ wijst naar buiten, zoals is vereist in de divergentiestelling. Dit geeft

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 (r^2\cos^2\phi - r^2\cos\phi\sin\phi + r^4\sin^3\phi - r) dr = \int_0^3 (\pi r^2 - 2\pi r) dr = 0.$$

Het oppervlak S_2 heeft parametervoorstelling $\Phi_2(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, 3)$. Merk op dat de volgorde van de variabelen is veranderd omdat alleen $\mathbf{N} = \mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\phi = (0,0,r)$ de gewenste oriëntatie heeft. Dit geeft

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 r dr = 9\pi.$$

Conclusie: $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 9\pi$.

Stap 2: bepalen van $\iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F} dV$. Zij D de verzameling $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$, dan

$$\iiint_W \nabla\cdot\mathbf{F} dV = \iint_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} (1+2yz)dz = \iint_D dxdy[3-\sqrt{x^2+y^2}+y(9-x^2-y^2)].$$

Door nu over te gaan op poolcoördinaten (en dat had natuurlijk ook meteen al gemogen) krijg je

$$\iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 r[3 - r + r \sin\phi(9 - r^2)]dr.$$

De binnenste integraal is gelijk aan $\frac{9}{2}+\frac{81}{4}\sin\phi$, dus als uitkomst krijg je $\iiint_W \nabla\cdot\mathbf{F} dV = 9\pi + 0 = 9\pi$. Dit klopt met de in stap 1 gevonden uitkomst.