Uiwerking Quizz 1, Infi C, 24-9-09

Tijd: 45 minuten

Opgave. Beschouw het pad $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, gedefinieerd door $\mathbf{c}(t) := (t\sqrt{t}, \frac{3}{\sqrt{2}}t)$, en het vectorveld $\mathbf{F}(x,y) := (x+y, x-y)$.

a. Bereken de lijnintegraal $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

b. Bepaal de booglengte $L(\mathbf{c})$ en ook de booglengtefunctie van $\mathbf{c}$.

c. Bepaal de herparametrisering $\mathbf{p}$ van $\mathbf{c}$ naar de booglengte. Test de correctheid van de verkregen formule voor $\mathbf{p}$ door te laten zien dat voor de afgeleide geldt: $\|\mathbf{p}'(s)\| = 1$ voor alle $s \in [0, L(\mathbf{c})]$. Controleer met de verkregen formule(s) ook dat concreet geldt $\mathbf{p}(L(\mathbf{c})) = \mathbf{c}(1)$.

Uitwerking. a. Er geldt voor de afgeleide

$$\mathbf{c}'(t) = (\frac{3}{2}t^{1/2}, \frac{3}{\sqrt{2}}) \text{ en dus } \|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{\frac{9}{4}t + \frac{9}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{t+2}. \tag{1}$$

Dan volgt met $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = (t^{3/2} + \frac{3}{\sqrt{2}}t, t^{3/2} - \frac{3}{\sqrt{2}}t)$ dat

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \frac{3}{2}t^2 + \frac{15}{2\sqrt{2}}t^{3/2} - \frac{9}{2}t$$

en dus is de gevraagde lijnintegraal gelijk aan

$$\int_0^1 [\frac{3}{2}t^2 + \frac{15}{2\sqrt{2}}t^{3/2} - \frac{9}{2}t]dt = [\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{\sqrt{2}}t^{5/2} - \frac{9}{4}t^2]_0^1 = \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{7}{4}.$$

b. Uit formule (1) volgt voor de booglengtefunctie

$$\alpha(t) := \int_0^t \|\mathbf{c}'(\tau)\| d\tau = \frac{3}{2}\int_0^t \sqrt{\tau+2}d\tau = [(\tau+2)^{3/2}]_0^t = (t+2)^{3/2} - 2^{3/2}, 0 \le t \le 1.$$

Derhalve is de booglengte van $\mathbf{c}$ gelijk aan $L(\mathbf{c}) = \alpha(1) = 3^{3/2} - 2^{3/2}$.

c. Om te herparametriseren heb je α^{-1} nodig (zie opgave 5 van serie 2). Hier beeldt deze inverse functie $[0, L(\mathbf{c})]$ 1-1 af op $[0,1]$. Om hem te bepalen zet je $s = \alpha(t) = (t+2)^{3/2} - 2^{3/2}$ en los je op naar t. Eerst geeft dit $s + 2^{3/2} = (t+2)^{3/2}$ en vervolgens $t = (s + 2^{3/2})^{2/3} - 2$. Conclusie: $\alpha^{-1}(s) = (s + 2^{3/2})^{2/3} - 2$, althans voor $s \in [0, L(\mathbf{c})] = [0, 3^{3/2} - 2^{3/2}]$.

De gevraagde herparametrisering $\mathbf{p}(s) := \mathbf{c}(\alpha^{-1}(s))$ luidt dus concreet

$$\mathbf{p}(s) = ((\alpha^{-1}(s))^{3/2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\alpha^{-1}(s)) = \left(((s + 2^{3/2})^{2/3} - 2)^{3/2}, \frac{3}{\sqrt{2}}((s + 2^{3/2})^{2/3} - 2)\right) \tag{2}$$

voor $s \in [0, 3^{3/2} - 2^{3/2}]$. Controle: differentiëren geeft

$$\mathbf{p}'(s) = \left((s + 2^{3/2})^{2/3} - 2)^{1/2}(s + 2^{3/2})^{-1/3}, \sqrt{2}(s + 2^{3/2})^{-1/3}\right).$$

Dan volgt

$$\|\mathbf{p}'(s)\|^2 = ((s + 2^{3/2})^{2/3} - 2)(s + 2^{3/2})^{-2/3} + 2(s + 2^{3/2})^{-2/3} = 1,$$

zoals gewenst. Tenslotte is voor $s = 3^{3/2} - 2^{3/2}$ in (2)

$$\mathbf{p}(3^{3/2} - 2^{3/2}) = ((3-2)^{3/2}, \frac{3}{\sqrt{2}}(3-2)) = (1, \frac{3}{\sqrt{2}}) = \mathbf{c}(1),$$

dus ook dat blijkt te kloppen.