Uitwerking deeltentamen 1 van Infi C, 8-10-2009, 11-13 u.

Opgave 1 [25 pt]. Op het college is als algemene formule voor de kromming van een $\mathcal{C}^2$ pad $\mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ingevoerd $k(t) := \frac{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}$. Vervolgens is aangetoond, mede via huiswerk, dat dit equivalent is met een formule in het boek. Die formule stelt dat de kromming wordt gegeven door $\|\mathbf{p}''(s)\|$ als $\mathbf{c}(t)$ door middel van $\mathbf{p}(s)$ wordt geherparametriseerd naar de booglengte s (dus $\|\mathbf{p}'(s)\| = 1$ voor alle s in $[0, L(\mathbf{c})]$).

a. Bewijs: als $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ voor alle $t \in [a,b]$, dan gaat bovenstaande formule inderdaad over in $k(t) = \|\mathbf{c}''(t)\|$.

b. Bereken de kromming $k(t)$ van de schroeflijn $\mathbf{c}(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$ in het punt $(0, 1, \pi/2)$ op de volgende twee manieren:

- met de algemene formule van het college, zoals boven vermeld,
- door te herparametriseren naar de booglengte en vervolgens bovenstaande regel "kromming $= \|\mathbf{p}''(s)\|$" uit het boek toe te passen.

Oplossing. a. Zij $\mathbf{b}(t) := \mathbf{c}'(t)$. Van college en boek is bekend dat als $1 = \|\mathbf{b}(t)\|^2 = \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{b}(t)$, dan volgt $\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{b}'(t) = 0$ met de productregel voor differentiëren. Dus hier geeft dat $\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}''(t) = 0$. Maar dan is de cosinus van de hoek tussen de vectoren $\mathbf{c}'(t)$ en $\mathbf{c}''(t)$ gelijk aan nul; daarom is de sinus ervan in absolute waarde gelijk aan 1. Dus volgt $\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\| = \|\mathbf{c}'(t)\|\|\mathbf{c}''(t)\| = \|\mathbf{c}''(t)\|$ en $\|\mathbf{c}'(t)\|^3 = 1$. Conclusie: $k(t) = \|\mathbf{c}''(t)\|$ als $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ voor alle t.

b. Eerste manier: $\mathbf{c}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ en $\mathbf{c}''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$ geven $\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t) = (\sin(t), -\cos(t), 1)$ en dus $\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\| = \sqrt{2}$. Omdat ook $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$ volgt dus $k(t) = 1/(\sqrt{2})^2 = 1/2$. In het bijzonder geldt dus $k(\pi/2) = 1/2$.

Tweede manier: we zagen al dat $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$. Dus volgt voor de booglengtefunctie $\alpha(t) := \int_0^t \|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}t$. Dan $t = \alpha^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}$, dus $\mathbf{p}(s) := \mathbf{c}(\alpha^{-1}(s)) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{s}{\sqrt{2}})$. Dan $\mathbf{p}'(s) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}})$ en dus $\mathbf{p}''(s) = (-\frac{1}{2}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$. Dit geeft $\|\mathbf{p}''(s)\| = 1/2$. In het bijzonder geldt dus dat voor $s = \alpha(\pi/2) = \pi/\sqrt{2}$ de kromming gelijk is aan $1/2$.

Opgave 2 [50 pt]. Gegeven is het vectorveld

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{2z}{(x^2 + y^2 - 1)^2} \right).$$

a. Bepaal een parametervoorstelling voor de enkelvoudige curve C die ligt tussen het beginpunt $(1/2, 0, 0)$ en het eindpunt $(0, 1/2, 1)$, gaat door het punt $(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, -1 + 3/\sqrt{2})$ en de doorsnede is van de cylinder $x^2 + y^2 = 1/4$ en het vlak $2x + 4y - z = 1$.

b. Bereken de lijnintegraal $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

c. Zij S het oppervlak van de kegel $x^2 + y^2 = z^2$ dat zich uitstrekt tussen de vlakken $z = 0$ en $z = 1/2$. De oriëntatie van S is zodanig gekozen dat de normaal van de z-as af wijst. Bereken de oppervlakteintegraal $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. *Aanwijzing:* Je kunt profiteren van partiële integratie door middel van het het feit dat $\frac{d}{dr}(r^2 - 1)^{-1} = -2r(r^2 - 1)^{-2}$.

Oplossing. a. Voor de hand ligt de keuze $x = \frac{1}{2}\cos(t)$, $y = \frac{1}{2}\sin(t)$ (er zijn natuurlijk ook nog andere keuzemogelijkheden) en daaruit volgt $z = \cos(t) + 2\sin(t) - 1$. Dan correspondeert $(1/2, 0, 0)$ met de beginwaarde $t = 0$, $(1/2\sqrt{2}, 1/2\sqrt{2}, -1 + 3/\sqrt{2})$ met de tussenwaarde $t = \pi/4$ en $(0, 1/2, 1)$ met de eindwaarde $t = \pi/2$. Dus met deze parametervoorstelling voor $t \in [0, \pi/2]$ krijg je het pad

$$\mathbf{c}(t) = (\frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t), \cos(t) + 2\sin(t) - 1), \text{ met } \mathbf{c}'(t) = (-\frac{1}{2}\sin(t), \frac{1}{2}\cos(t), -\sin(t) + 2\cos(t)).$$

b. Uit $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \frac{32}{3}\sin(t)\cos(t) + \frac{64}{9}\cos^2(t) - \frac{64}{9}\sin^2(t) + \frac{32}{9}\sin(t) - \frac{64}{9}\cos(t)$ volgt, met de bekende goniometrieformules $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ en $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ dat

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \left[-\frac{8}{3}\cos(2t) + \frac{32}{9}\sin(2t) - \frac{32}{9}\cos(t) - \frac{64}{9}\sin(t) \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{16}{9}.$$

c. Door een plaatje te maken zie je dat de projectie van S op het vlak $z = 0$ gevormd wordt door de cirkel (rand en inwendige) rond de oorsprong met straal $1/2$. Het is dus verstandig om op poolcoördinaten over te gaan en dan luidt de parametervoorstelling van de kegelwand

$$\Phi(\theta, r) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r), \text{ met } r \in [0, 1/2] \text{ en } \theta \in [0, 2\pi]$$

(merk op $z^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$ geeft hier $z = r$). De reden voor de gekozen volgorde van de twee parameters (eerst θ en dan r) blijkt uit $\mathbf{N} := \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_r = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), -r)$, wat klopt met de voorgeschreven oriëntatie van S. Uit $\mathbf{F}(\Phi(\theta, r)) \cdot \mathbf{N} = \frac{r^2}{r^2-1} - 2\frac{r^2}{(r^2-1)^2} = 1 + \frac{1}{r^2-1} - 2\frac{r^2}{(r^2-1)^2}$ volgt nu

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dr[1+\frac{1}{r^2-1} - 2\frac{r^2}{(r^2-1)^2}] = \pi + 2\pi\left\{\int_0^{1/2}\frac{1}{r^2-1}dr - \int_0^{1/2}\frac{2r^2}{(r^2-1)^2}dr\right\}.$$

De hint geeft aan dat je de volgende partiële integratieformule kunt gebruiken:

$$-\int_0^{1/2}\frac{2r^2}{(r^2-1)^2}dr = \int r d(r^2-1)^{-1} = \left[r(r^2-1)^{-1}\right]_{r=0}^{r=1/2} - \int_0^{1/2}(r^2-1)^{-1}dr = -\frac{2}{3} - \int_0^{1/2}(r^2-1)^{-1}dr$$

maar als je (bij correct rekenen) meteen inzag dat $\frac{d}{dr}\frac{r}{r^2-1} = \frac{1}{r^2-1} - 2\frac{r^2}{(r^2-1)^2}$ verliep het natuurlijk ook goed. Dus geeft bovenstaande berekening dat $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \pi + 2\pi * -\frac{2}{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Opgave 3. [15 pt]. Beschouw het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos x, az, y)$. Hier is $a \in \mathbb{R}$ een constante. Beschouw op de doorsnijding van het vlak $x = 1$ met de cylinder $y^2 + z^2 = 2$ de curve C die loopt van het beginpunt $(1, 1, 1)$ naar het eindpunt $(1, 0, -\sqrt{2})$ en gaat door het punt $(1, \sqrt{2}, 0)$.

a. Voor welke waarde(n) van a is het vectorveld $\mathbf{F}$ conservatief? Noem de verzameling van al deze waarden A. Bepaal een potentiaalfunctie voor $a \in A$.

b. Bereken de lijnintegraal $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$.

c. **Voor maximaal 3 extra bonuspunten.** Controleer met behulp van de potentiaalfunctie(s) uit onderdeel a de correctheid van het in onderdeel b verkregen antwoord, althans voor $a \in A$.

Oplossing. a. Van het college is bekend dat $\mathbf{F}$ alleen conservatief is als geldt $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Nu is hier $\nabla \times \mathbf{F} = (1 - a, 0, 0)$, dus de gevraagde verzameling A bestaat enkel uit het punt $a = 1$. Voor $a = 1$ moet de potentiaalfunctie ϕ voldoen aan $\nabla\phi = (\cos x, z, y)$. Dan geeft $\frac{\partial}{\partial z}\phi = y$ natuurlijk $\phi = yz + \psi(x, y)$, met ψ een functie die alleen van x en y afhangt. Vervolgens geeft $z = \frac{\partial}{\partial y}\phi = z + \frac{\partial}{\partial y}\psi$ dat ψ alleen af mag hangen van x. Tenslotte geeft $\cos x = \frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{\partial}{\partial x}\psi$ dan $\psi(x) = \sin x +$ willekeurige constante. Een potentiaalfunctie voor $a = 1$ is dus $\phi(x, y, z) = \sin x + yz$. *Opmerking:* als je deze ϕ direct kon aflezen uit $\nabla\phi = (\cos x, z, y)$ werd dat natuurlijk ook goed gerekend.

b. Een voor de hand liggende parametervoorstelling voor C is $\mathbf{c}(t) = (1, \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t))$, met $\mathbf{c}'(t) = (0, -\sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\cos(t))$, maar er zijn natuurlijk ook andere. Bij deze keuze correspondeert het beginpunt $(1, 1, 1)$ met $t = \pi/4$. De rest van de parametrisering volgt doordat het tussenpunt $(1, \sqrt{2}, 0)$ correspondeert met $t = 0$, zodat het eindpunt $(1, 0, -\sqrt{2})$ niet met $t = 3\pi/2$ mag corresponderen, maar wel met $t = -\pi/2$. Je gebruikt dus het interval $I = [-\pi/2, \pi/4]$ en doorloopt dit in de *tegengestelde* zin, zoals ook uit de integraal hieronder valt af te lezen. Dan volgt $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = -2a\sin^2(t) + 2\cos^2(t) = -2a + (2a + 2)\cos^2(t)$. Om hier de gekwadrateerde cosinus te integreren moet je overgaan op de dubbele hoek via de bekende formule $2\cos^2(t) - 1 = \cos(2t)$. Dat geeft

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\pi/4}^{-\pi/2}\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/4}[1 - a + (a + 1)\cos(2t)]dt = (a - 1)\frac{3}{4}\pi - \frac{a + 1}{2}.$$

c. Er geldt $a = 1$ voor $a \in A$. Dan is de bovenstaande integraal gelijk aan -1. Anderzijds geldt $\phi(1, 0, -\sqrt{2}) = \sin(1)$ en $\phi(1, 1, 1) = \sin(1) + 1$, zodat volgt $\phi(1, 0, -\sqrt{2}) - \phi(1, 1, 1) = -1$. Dat stemt dus overeen.