Uitwerking deeltentamen 2, Infi C, 5-11-2009 (3 uur)

Opgave 1 [25 pt]. a. Zij D het vierkant $[0,2] \times [0,2]$ en zij $\mathbf{F}(x,y) := (x^2 - xy^3, y^2 - 2xy)$. Verifieer hiervoor expliciet de identiteit van Green (dus bereken elk van de beide zijden van deze identiteit apart en laat zien dat er overeenstemming is).

b. Dezelfde vraag, maar nu met $D \subset \mathbb{R}^2$ het binnengebied van de vierhoek met hoekpunten $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,2)$ en $(2,2)$.

Oplossing. In beide onderdelen moet je nagaan dat

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{1}$$

waarbij C de gesloten georiënteerde randcurve is van het binnengebied D.

a. Hier $P(x,y) = x^2 - xy^3$ en $Q(x,y) = y^2 - 2xy$. Dan $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2y - (-3xy^2) = 3xy^2 - 2y$. Dus het linkerlid van (1) is gelijk aan

$$\int_0^2 dy \int_0^2 (3xy^2 - 2y) dx = \int_0^2 (6y^2 - 4y) dy = [2y^3 - 2y^2]_0^2 = 8.$$

Om het rechterlid van (1) te bepalen werk je met de volgende vier deelcurves waar de gesloten georiënteerde curve $(0,0) \to (2,0) \to (2,2) \to (0,2) \to (0,0)$ uit bestaat:

1. De rechtlijnige curve $(0,0) \to (2,0)$ heeft parametervoorstelling $\mathbf{c}(t) := (t,0)$ voor $t : 0 \to 2$. Dan $\mathbf{c}'(t) = (1,0)$ en $F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = t^2$. Dat geeft $\int_0^2 F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = 8/3$ als bijdrage aan het rechterlid van (1).

2. De rechtlijnige curve $(2,0) \to (2,2)$ heeft parametervoorstelling $\mathbf{c}(t) := (2,t)$ voor $t : 0 \to 2$. Dan $\mathbf{c}'(t) = (0,1)$ en $F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = t^2 - 4t$. Dat geeft $\int_0^2 F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = -16/3$ als bijdrage aan het rechterlid van (1).

3. De rechtlijnige curve $(2,2) \to (0,2)$ heeft parametervoorstelling $\mathbf{c}(t) := (t,2)$ voor $t : 2 \to 0$. Dan $\mathbf{c}'(t) = (1,0)$ en $F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = t^2 - 8t$. Dat geeft $\int_2^0 F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = 40/3$ als bijdrage aan het rechterlid van (1).

4. De rechtlijnige curve $(0,2) \to (0,0)$ heeft parametervoorstelling $\mathbf{c}(t) := (0,t)$ voor $t : 2 \to 0$. Dan $\mathbf{c}'(t) = (0,1)$ en $F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = t^2$. Dat geeft $\int_2^0 F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = -8/3$ als bijdrage aan het rechterlid van (1).

In totaal geeft dit als uitkomst $(8 - 16 + 40 - 8)/3 = 8$ voor het rechterlid van (1). Conclusie: (1) is gecontroleerd.

b. Ditmaal is de randcurve C van D de georiënteerde curve $(0,0) \to (2,0) \to (2,2) \to (1,2) \to (0,0)$. Je kunt nu op (minstens) twee manieren verder gaan:

Methode 1: Zij D' de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(2,0)$ en $(1,2)$. Dan is $D' \cup D$ gelijk aan het gebied $[0,2] \times [0,2]$ uit onderdeel a. Zij C' de georiënteerde randcurve $(0,0) \to (1,2) \to (0,2) \to (0,0)$ voor D'. Dan volgt door herschrijven van de Greense identiteit uit onderdeel a dat geldt

$$8 - \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 8 - \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

want op het lijnsegment tussen $(0,0)$ en $(1,2)$ heffen de integratiebijdragen van C en C' elkaar op. Dus om (1) te verifiëren is het voldoende om na te gaan dat

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2}$$

Het linkerlid van (2) is gelijk aan

$$\iint_{D'}(3xy^2-2y)dxdy=\int_0^2 dy\int_0^{y/2}(3xy^2-2y)dx=\int_0^2(\frac{3}{8}y^4-y^2)dy=[\frac{3}{40}y^5-\frac{1}{3}y^3]_0^2=-\frac{4}{15}.$$

Om het rechterlid van (2) te bepalen werk je met de volgende drie deelcurves waar C' uit bestaat:

1. De rechtlijnige curve $(0,0)\to(1,2)$ heeft parametervoorstelling $\mathbf{c}(t):=(t,2t)$ voor $t:0\to 1$. Dan $\mathbf{c}'(t)=(1,2)$ en $F(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)=t^2-8t^4$. Dat geeft een bijdrage van $\int_0^1 F(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)dt=-19/15$ aan het rechterlid van (2).

2. De rechtlijnige curve $(1,2)\to(0,2)$ heeft parametervoorstelling $\mathbf{c}(t):=(t,2)$ voor $t:1\to 0$. Dan $\mathbf{c}'(t)=(1,0)$ en $F(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)=t^2-8t$. Dat geeft een bijdrage van $\int_1^0 F(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)dt=11/3$ aan het rechterlid van (2).

3. De rechtlijnige curve $(0,2)\to(0,0)$ heeft parametervoorstelling $\mathbf{c}(t):=(0,t)$ voor $t:2\to 0$. Dan $\mathbf{c}'(t)=(0,1)$ en $F(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)=t^2$. Dat geeft een bijdrage van $\int_2^0 F(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)dt=-8/3$ aan het rechterlid van (2).

In totaal geven deze drie bijdragen $-\frac{19}{15}+\frac{11}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{4}{15}$ als uitkomst voor het rechterlid van (2). Conclusie: ook nu is (1) gecontroleerd.

Methode 2: Breek het gebied D op als $D=D_1\cup D_2$ met D_1 de driehoek gevormd door $(0,0)$, $(1,2)$ en $(1,0)$ en D_2 de vierhoek met hoekpunten $(1,0)$, $(2,0)$, $(1,2)$ en $(2,2)$. Bij D_1 hoort de gesloten georiënteerde randcurve $(0,0)\to(1,0)\to(1,2)\to(0,0)$ en bij D_2 hoort $(1,0)\to(2,0)\to(2,2)\to(1,2)\to(1,0)$. De verdere afhandeling van (1) verloopt nu zoals in onderdeel a en hierboven, maar je moet nu wel twee keer apart rekenwerk verrichten (vergelijk dit met methode 1, waarbij je kon profiteren van het rekenwerk dat al was gedaan in onderdeel a).

Opgave 2 [50 pt]. Gegeven zijn het vectorveld $\mathbf{F}(x,y,z)=(4xz+1,-y^2-1,-2z^2+2yz)$ en het oppervlak S op de paraboloïde $2z=x^2+y^2$ tussen de vlakken $z=0$ en $z=2$. De oriëntatie van S is zo dat in $(0,0,0)$ de normaalvector gelijk is aan $(0,0,1)$.

a. Toon aan dat $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$.

b. Volgens een stelling geldt nu dat $\mathbf{F}$ een vectorpotententiaal heeft: met andere woorden, er bestaat een vectorveld $\mathbf{G}$ zo dat $\mathbf{F}$ daarvan de rotatie is. Bepaal zo'n vectorveld $\mathbf{G}$ met behulp van de volgende "deus ex machina" formules van het college: $G_3=0$, $G_2(x,y,z)=-\int_0^z F_1(x,y,\zeta)d\zeta$ en $G_1(x,y,z)=\int_0^z F_2(x,y,\zeta)d\zeta-\int_0^y F_3(x,\eta,0)d\eta$.

c. Controleer expliciet of voor de in onderdeel b gevonden $\mathbf{G}$ inderdaad geldt $\nabla\times\mathbf{G}=\mathbf{F}$. *Opmerking:* voor het vervolg van de opgave is het belangrijk dat dit echt klopt.

d. Bereken de oppervlakteintegraal $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$. Doe dit rechtstreeks door een geschikte parametrisering $\Phi(u,v)$, $(u,v)\in D$, van S te kiezen.

e. Onderdelen b en c stellen je in staat om de integraal $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ op een heel andere manier te bepalen, namelijk met de stelling van Stokes. Geef aan hoe die bepaling dan moet verlopen en voer hem vervolgens uit. Controleer of je uitkomst overeenkomt met die uit onderdeel d.

f. Tenslotte is er nog een andere mogelijkheid om $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ te bepalen, namelijk met behulp van de stelling van Gauss. Voer hiervoor een geschikt gebied W in $\mathbb{R}^3$ in, zo dat S deelverzameling is van de rand van W. Geef aan hoe die bepaling dan moet verlopen en voer hem vervolgens uit. Controleer of je uitkomst overeenkomt met die uit de onderdelen d en e.

Oplossing. a. Uit $\nabla\cdot\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}$ volgt direct $\nabla\cdot\mathbf{F}(x,y,z)=4z-2y-4z+2y=0$.

b. Hier geven die formules $G_2(x,y,z)=-\int_0^z(4x\zeta+1)d\zeta=-2xz^2-z$ en $G_1(x,y,z)=\int_0^z(-y^2-1)d\zeta-\int_0^y 0d\eta=-y^2z-z$.

c. Voor elke $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ is $(\nabla\times\mathbf{G})(x,y,z)$ gelijk aan

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y^2z-z & -2xz^2-z & 0\end{vmatrix}=(-(-4xz-1),-y^2-1,-2z^2-(-2yz)),$$

d.w.z. aan $\mathbf{F}(x,y,z)$. De uitkomst in b klopt dus echt.

d. *Methode 1:* Het gegeven oppervlak is van de "grafiekvorm" met $z=g(x,y):=(x^2+y^2)/2$ en met $D:=\{(x,y):x^2+y^2\leq 4\}$ (dit laatste volgt bijvoorbeeld uit een plaatje van S). Daarom heeft de normaalvector $\mathbf{N} := \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y$ de bekende vorm $\mathbf{N} = (-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1) = (-x, -y, 1)$, mits de oriëntatie van S de gewenste is en dat laatste is zo: voor $x = y = 0$ geeft dit namelijk $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Wegens $\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$ krijg je

$$\mathbf{F}(\Phi(x, y)) \cdot \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = -2x^2(x^2 + y^2) - x + y^3 + y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + y(x^2 + y^2).$$

De gevraagde oppervlakte-integraal is gelijk aan $I := \iint_D \mathbf{F}(\Phi(x, y)) \cdot \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y \, dxdy$. Het is handig om nu over te gaan op poolcoördinaten $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ om deze integraal uit te rekenen, omdat D een cirkelschijf is met straal 2. Dat geeft

$$I = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} r d\theta [-2r^4\cos^2\theta - r\cos\theta + r^3\sin^3\theta + r\sin\theta - \frac{1}{2}r^4 + r^3\sin\theta].$$

Wegens $\int_0^{2\pi} \sin = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^3 = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos = 0$ en $\int_0^{2\pi} \cos^2 = \pi$ volgt

$$I = \int_0^2 (-\pi - \frac{1}{2}2\pi) r^5 dr = -3\pi * 64/6 = -32\pi.$$

Methode 2: Je kunt het oppervlak ook meteen in poolcoördinaten formuleren: zet $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Dan krijg je in eerste instantie $\Phi(\theta, r) := (r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{1}{2}r^2)$ met $D := [0, 2\pi) \times [0, 2]$. Daarvoor is de normaalvector dus $\mathbf{N} := \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_r$ en doorrekenen geeft dan $\mathbf{N} = (r^2\cos\theta, r^2\sin\theta, -r)$. Normaliseren geeft $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r\cos\theta, r\sin\theta, -1)$, wat aantoont dat de oriëntatie verkeerd is. Remedie 1 is nu "terug naar af" gevolgd door het verwisselen van θ en r (dus r wordt de eerste variabele van de nieuwe Φ i.p.v. de tweede). Maar als je weinig tijd hebt, zoals op een tentamen vaak gebeurt, kun je beter de volgende remedie 2 kiezen: ga door met de gemaakte keuze en vermenigvuldig aan het eind de uitkomst met een factor -1. Zo volgt

$$\mathbf{F}(\Phi(\theta, r)) \cdot \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_r = 2r^5\cos^2\theta + \frac{1}{2}r^5 - r^4\sin^3\theta - r^4\sin\theta + r^2\cos\theta - r^2\sin\theta$$

en dan is de oppevlakte-integraal *in eerste instantie* dus gelijk aan

$$\int_0^2 dr \int_0^{2\pi} (2r^5\cos^2\theta + \frac{1}{2}r^5 - r^4\sin^3\theta - r^4\sin\theta + r^2\cos\theta - r^2\sin\theta) d\theta = \int_0^2 (2\pi r^5 + \pi r^5) dr = 32\pi,$$

want $\int_0^{2\pi} \sin = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^3 = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos = 0$ en $\int_0^{2\pi} \cos^2 = \pi$. Volgens remedie 2 is de *gevraagde* oppervlakte-integraal dan gelijk aan $(-1) * 32\pi = -32\pi$.

e. Merk op dat S de vorm heeft van een kom. De randcurve C van S, d.w.z. de "rand van de kom", wordt gegeven $x^2 + y^2 = 4$ en $z = 2$; hij wordt doorlopen tegen de wijzers van de klok in. Daarom heeft C de parametervoorstelling $\mathbf{c}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2)$ voor $t : 0 \to 2\pi$. Volgens Stokes en onderdeel b geldt

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \nabla \times \mathbf{G} \, d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} =: J$$

Nu $\underline{c}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$, dus

$$\mathbf{G}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = (-8\sin^2 t - 2) * (-2\sin t) + (-16\cos t - 2) * 2\cos t$$

en dat geeft gemakkelijk $J = \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = -32 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = -32\pi$, want $\int_0^{2\pi} \sin = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin^3 = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos = 0$ en $\int_0^{2\pi} \cos^2 = \pi$.

f. Zij W de verzameling van alle (x, y, z) met $2z \leq x^2 + y^2$ en $0 \leq z \leq 2$. Dan is ∂W de vereniging van S en S', met $S' := \{(x, y, 2) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Hier fungeert S' dus als het ware als een "deksel" die op de kom wordt geplaatst. Merk op dat de oorspronkelijke oriëntatie van S naar het *binnenste* van W wijst! Je moet de oriëntatie van S' aanpassen aan die van S en dus overal op S' als normaalvector $-\mathbf{k}$ kiezen. Dat kan door te werken met de parametervoorstelling voor S'

die wordt gegeven door $\Phi' : (u,v) \mapsto (v,u,2)$, $(u,v) \in D$, want dan $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Uit de divergentiestelling en de naar binnen gerichte oriëntatie van S en S' volgt dat

$$\iiint_W -\nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Wegens onderdeel a is de integraal links gelijk aan 0; dus is de gevraagde uitkomst gelijk aan $-\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Nu $\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D -F_3(x,y,2)dxdy$. Wegens $-F_3(x,y,2) = 8 - 4y$ en het feit dat $y \mapsto 4y$ een oneven functie is op het symmetrische gebied S', volgt $\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 8 * \pi(2)^2 = 32\pi$. Uit het bovenstaande volgt dan dat de gevraagde integraal $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ gelijk is aan -32π.

Opgave 3. [25 pt]. a. Bewijs, uitgaande van het gegeven dat het oppervlak van een bol met straal $R > 0$ gelijk is aan $4\pi R^2$, dat het volume van zo'n bol gelijk is aan $\frac{4}{3}\pi R^3$. *Aanwijzing:* pas op een slimme manier de divergentiestelling van Gauss toe.

b. Schrijf $\mathbf{r} := (x,y,z)$ en $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Zij $f(r)$ een continu differentieerbare functie van $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en zij $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ een vaste gegeven vector. Zij S een oppervlak dat de rand is van een gebied W in $\mathbb{R}^3$ (neem aan dat S en W voldoende glad/regulier zijn).

i. Stel dat $\mathbf{0}$ buiten $W \cup S$ ligt . Bewijs dat $\iint_S f(r)\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\, dV$.

ii Voor extra punten: Stel dat $\mathbf{0}$ tot het inwendige van W behoort (d.w.z. er is een $\rho > 0$ zo dat de bol met straal ρ rond $\mathbf{0}$ deelverzameling is van W). Bewijs dat $\iint_S f(r)\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{W\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\, dV$.

Oplossing. a. Zij W een bol met straal R. Gegeven is $A(\partial W) = 4\pi R^2$. Kies $\mathbf{F}(x,y,z) := (x,y,z) =: \mathbf{r}$, dan $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$. Volgens de divergentiestelling geldt nu

$$3 * \mathrm{vol}(W) = \iiint_W 3\, dxdydz = \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{\partial W} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Wegens $\mathbf{n} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ volgt $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{r}\|$ en op ∂W is die laatste uitdrukking gelijk aan R. Zo volgt $3 * \mathrm{vol}(W) = RA(\partial W) = 4\pi R^3$. Conclusie: $\mathrm{vol}(W) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

b. (i) Zij $\mathbf{F}(\mathbf{r}) := f(r)\mathbf{a} = f(\|\mathbf{r}\|)\mathbf{a}$. Dit vectorveld is $\mathcal{C}^1$ op W, omdat $\mathbf{0} \notin W \cup S$. Dan $\frac{\partial F_1}{\partial x} = f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}xa_1 = \frac{f'(r)}{r}xa_1$ en $\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{f'(r)}{r}ya_2$ en $\frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{f'(r)}{r}za_3$ volgen net zo. Dat geeft $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, dus met de divergentiestelling volgt

$$\iint_S f(r)\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_W \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\, dV.$$

(ii) *Voor extra punten:* Zij $\mathbf{F}$ als boven gedefinieerd. Ditmaal is dit vectorveld niet continu differentieerbaar op W, want $\mathbf{r} \mapsto \|\mathbf{r}\|$ is niet eens differentieerbaar in $\mathbf{0}$. In zo'n situatie is op college en bij oefeningen gewerkt met "quarantainebolletjes": zij B_ϵ de gesloten bol met straal $\epsilon > 0$ rond $\mathbf{0}$. Gegeven is dat voor $\epsilon < \rho$ het bolletje B_ϵ geheel bevat is in W. Nu is $\mathbf{F}$ continu differentieerbaar op $W\setminus B_\epsilon$ en dus geeft onderdeel a

$$\iint_{S'} f(r)\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{W\setminus B_\epsilon} \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\, dV, \tag{3}$$

met S' de georiënteerde rand van $W\setminus B_\epsilon$, die bestaat uit S zelf en de rand van B_ϵ (op die laatste rand wijst de normaalvector naar binnen). Dus het linkerlid van (3) is gelijk aan

$$\iint_S f(r)\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS - f(\epsilon)\iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S f(r)\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

wegens $\iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\epsilon^{-1}\iint_{\partial B_\epsilon} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\, dS = 0$ (dit laatste volgt uit symmetrie overwegingen: de functie $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ is namelijk oneven).

Ook geldt dat het rechterlid van (3) gelijk is aan $\iiint_{W\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} dV - R$ met $R := \iiint_{B_\epsilon\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\, dV$. Ook hier is er sprake van een oneven functie $g : \mathbf{r} \mapsto \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ (immers $g(-\mathbf{r}) = -g(\mathbf{r})$). Dus $R = \iiint_{B_\epsilon} g = 0$ (dat R als integraal welgedefinieerd is volgt met Cauchy-Schwarz uit $|\frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}| \leq |f'(r)|\|\mathbf{a}\|$ en de continuiteit van f'). Dus het rechterlid van (3) is gelijk aan $\iiint_{W\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{f'(r)}{r}\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\, dV$. Uit (3) volgt de gevraagde identiteit nu.