Uitwerking Eindtentamen Microeconomie, 27-6-2012

E.J. Balder

Opgave 1 [25 pt.] Stel dat de $N \times d$-matrix X van volle rang d is. In hoofdstuk 2 van de syllabus werd het gebruikelijke kleinste kwadratenprobleem

$$\text{minimimaliseer } \|\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}\|^2 \text{ over alle } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

bestudeerd. Een veel toegepaste uitbreiding van dit probleem is alsvolgt, waarbij G een symmetrische en positief definiete $N \times N$ matrix is:

$$\text{minimimaliseer } f(\boldsymbol{\theta}) := (\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta})^T G(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}) \text{ over alle } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

Voor $G :=$ eenheidsmatrix heeft dit (1) als speciaal geval.

a. [5 pt.] Bewijs dat de matrix $X^T GX$ inverteerbaar is. *Let op:* Omdat d in het algemeen niet gelijk is aan N, hoeft X zeker niet inverteerbaar te zijn.

b. [10 pt.] Herleid het ogenschijnlijk algemenere probleem (2) tot een probleem van de bekende vorm (1) en gebruik dit om een algemene formule op te stellen voor de optimale oplossing $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ van (2). *Aanwijzing:* Er bestaat een inverteerbare $N \times N$-matrix R met $G = RR^T$; dit gegeven mag je zonder bewijs gebruiken, maar als je het ook kunt bewijzen krijg je maximaal 5 **extra** punten.

c. [10 pt.] Vind de in onderdeel b gevraagde formule ook op een heel andere manier, namelijk alsvolgt: (i) bewijs eerst dat de bovenstaande functie f strikt convex is op $\mathbb{R}^d$, (ii) pas een bekende eerste orde optimaliteitsvoorwaarde toe, (iii) bepaal hiermee de optimale oplossing $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Oplossing. a. Je bewijst regulariteit op dezelfde manier als op het college is gedaan voor de matrix $X^T X$ (daar zag je dat uit $X^T X\mathbf{u} = \mathbf{0}$, wegens $0 = \mathbf{u}^T X^T X\mathbf{u} = \|X\mathbf{u}\|^2$ volgde dat $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, omdat de kolommen van X lineair onafhankelijk zijn). Dit imiterend zet je $M := X^T GX$ en neem je een willeurige $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ met $M\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Dan volgt $\mathbf{u}^T M\mathbf{u} = (X\mathbf{u})^T GX\mathbf{u} = \mathbf{0}$ en dus $X\mathbf{u} = \mathbf{0}$ vanwege het gegeven dat G positief definiet is. Omdat X van volle rang is, implicieert dit laatste $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Conclusie: de $d \times d$ matrix M is inverteerbaar.

b. Uit de aanwijzing volgt dat (2) ook kan worden geschreven als

$$\text{minimimaliseer } (\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta})^T RR^T(\mathbf{y} - X\boldsymbol{\theta}) \text{ over alle } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d.$$

Zet nu $\mathbf{z} := R^T\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ en $Q := R^T X$. Dan luidt bovenstaand probleem

$$\text{minimimaliseer } (\mathbf{z} - Q\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{z} - Q\boldsymbol{\theta}) \text{ over alle } \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$$

en het heeft daarom precies dezelfde vorm als (1). Omdat de $N \times d$-matrix Q rang d heeft (immers, uit inverteerbaarheid van R^T volgt dat $Q\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ impliceert $X\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ en dus $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$) volgt met de bekende formule uit de syllabus

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (Q^T Q)^{-1}Q^T\mathbf{z} = (X^T RR^T X)^{-1}X^T R\mathbf{z} = (X^T GX)^{-1}X^T G\mathbf{y}. \tag{3}$$

Voor 5 extra punten: Omdat G symmetrisch is, volgt uit de spectraalstelling dat er een orthogonale matrix S bestaat met $G = S\Lambda S^T$, met Λ de diagonaalmatrix van de N eigenwaarden van G. Omdat G positief definiet is, is elke eigenwaarde λ van G strikt positief (immers, $0 < \mathbf{v}^T G\mathbf{v} = \lambda\|\mathbf{v}\|^2$ moet gelden voor de bijbehorende eigenvector $\mathbf{v}$). Definieer daarom $R := SD$ met $D = D^T$ de diagonaalmatrix van de *wortels* van de eigenwaarden van G, dan krijg je $RR^T = SDD^T S^T = S\Lambda S^T = G$.

c. (i) Volgens de handout over convexe functies moet je verifiëren dat de Hessiaan H_f van f strikt positief definiet is. Zet $M := X^T GX$. Dan volgt uit

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{y}\|^2 - 2\boldsymbol{\theta}^T X^T G\mathbf{y} + \boldsymbol{\theta}^T M\boldsymbol{\theta}$$

dat $H_f = 2M$ en deze matrix is positief definiet (immers, $\mathbf{u}^T M \mathbf{u} = (X\mathbf{u})^T G(X\mathbf{u}) \geq 0$ volgt omdat G positief definiet is, en $\mathbf{u}^T M\mathbf{u} = 0$ kan alleen gelden voor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, zoals in onderdeel a al is bewezen). (ii) De bijbehorende FOSC is $\mathbf{0} = \nabla f(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = -2X^T G\mathbf{y} + 2M\hat{\boldsymbol{\theta}}$ en (iii) die geeft $\hat{\boldsymbol{\theta}} = M^{-1}X^T G\mathbf{y}$, d.w.z. dezelfde formule als in (3).

Opgave 2 [20 pt.] Zij $u : X \to \mathbb{R}$ continu.

a. [10 pt.] Stelling 5.2.1(a) in de syllabus doet de volgende dualiteitsuitspraak: elke optimale oplossing $\mathbf{x}_*$ van het EMP (E_n) is optimale oplossing van (U_n) voor de speciale keuze $y := e(\mathbf{p}, v)$ van het inkomen. Bewijs deze uitspraak. *Aanwijzing:* Bewijs eerst $\mathbf{x}_* \in B_{\mathbf{p},y}$ als $y = e(\mathbf{p}, v)$ en gebruik vervolgens tegenspraak om het gewenste resultaat te verkrijgen. *Kanttekening:* Voor dit bewijs is het niet per se nodig dat u strikt stijgend is, maar desgewenst mag je met die aanname werken.

b. [10 pt.] Stelling 5.2.1(b) in de syllabus doet de volgende dualiteitsuitspraak: elke optimale oplossing $\mathbf{x}^*$ van het UMP (U_n) is optimale oplossing van (E_n) voor de speciale keuze $v := v(\mathbf{p}, y)$ van het nutsniveau. Voor dit resultaat vereist de syllabus dat u strikt stijgend is op X. Laat m.b.v. een geschikt gekozen voorbeeld, hoe eenvoudig gekozen ook, zien dat laatstgenoemde aanname onmisbaar is. *Let op:* In tegenstelling tot onderdeel a hoef je hier geen bewijs van de geciteerde dualiteitsuitspraak te geven.

Oplossing. a. Er geldt $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_* = e(\mathbf{p}, v)$ per definitie van de uitgavenfunctie; dat geeft hier dus $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_* = y$ en zo volgt $\mathbf{x}_* \in B_{\mathbf{p},y}$. Bij wijze van tegenspraak stel je nu dat er een $\tilde{\mathbf{x}} \in B_{\mathbf{p},y}$ zou zijn, dus met (1) $\tilde{\mathbf{x}} \in X$, (2) $\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \leq e(\mathbf{p}, v) = y$, waarvoor zou gelden (3) $u(\tilde{\mathbf{x}}) > u(\mathbf{x}_*)$. Uit (1), (3) en $\mathbf{x}_* \in L_v$ volgt dan $\tilde{\mathbf{x}} \in L_v$. Samen met (2) zou dit ertoe leiden dat ook $\tilde{\mathbf{x}}$ een optimale oplossing was van $(\mathbb{E}_n)$. Omdat $\mathbf{x}_*$ en $\tilde{\mathbf{x}}$ nu beide efficiënt moeten zijn, volgt $v = u(\tilde{\mathbf{x}}) > u(\mathbf{x}_*) = v$ in (3), wat onmogelijk is (dit bewijs staat ook zo in de syllabus).

b. "Hoe eenvoudig gekozen ook" suggereert dat je begint met het voorbeeld zo eenvoudig mogelijk op te zetten (zoals ook vaak op het college is beklemtoond). Kies daarom $n = 1$, $X = \mathbb{R}_+$, $p = 1$, $y = 3$ en $u \equiv 0$. Dan is elke $x^* \in [0, 3]$ optimale oplossing van $(\mathbb{U}_1)$; kies bijvoorbeeld $x^* = 2$. Zet $v = v(1, 3)$; dan volgt $v = 0$ en dus $L_v = \mathbb{R}_+$. Echter, $x^* = 2$ is geen optimale oplossing van $(\mathbb{E}_1)$ met $v = 0$, want het probleem om x over $x \in L_0 = \mathbb{R}_+$ te minimaliseren heeft $x_* = 0$ als unieke optimale oplossing.

Opgave 3 [35 pt.] Van een consument kunnen de preferenties worden weergegeven door de nutsfunctie $u_\rho(x_1, x_2) := (x_1^{-\rho} + x_2^{-\rho})^{-1/\rho}$ op $X := \mathbb{R}^2_{++}$. Hier is de parameter ρ strikt positief.

a. [5 pt.] Beschouw het nutsmaximaliseringsprobleem $(\mathbb{U}_2)$ voor deze consument. Laat zien: dit probleem heeft een optimale oplossing. *Aanwijzing:* Toon het volgende aan en maak er vervolgens gebruik van: als twee nutsfuncties equivalent zijn en als het UMP voor één van die twee nutsfuncties een optimale oplossing heeft, dan heeft het UMP voor de andere nutsfunctie ook een optimale oplossing.

b. [20 pt.] Bepaal zowel de Marshallianse vraag $\mathbf{x}_\rho(p_1, p_2, y)$ als de Hicksiaanse vraag van deze consument.

c. [10 pt.] Laat zien op basis van je antwoord in onderdeel b dat geldt

$$\forall_{p_1,p_2,y>0} \lim_{\rho\to\infty} \mathbf{x}_\rho(p_1, p_2, y) = \left(\frac{y}{p_1 + p_2}, \frac{y}{p_1 + p_2}\right). \tag{4}$$

Laat ook zien: (i) voor $\hat{u}(x_1, x_2) := \min(x_1, x_2)$ is $(\frac{y}{p_1+p_2}, \frac{y}{p_1+p_2})$ exact de bijbehorende Marshalliaanse vraag, (ii) $\lim_{\rho\to\infty} u_\rho(x_1, x_2) = \hat{u}(x_1, x_2)$ voor elke $(x_1, x_2) \in X$. Dit geeft dus een verklaring voor het limietgedrag in (4).

Oplossing. Merk allereerst op dat deze nutsfunctie sterk verwant is aan de standaard CES nutsfunctie van het college, maar die had $\rho < 0$ (zie Example 4.4.5 in de syllabus en de handout over convexe/concave functies). Ook toont onderdeel a aan dat voor $\rho = 1$ de gegeven u_ρ equivalent is met de van Example 4.4.6 in de syllabus bekende nutsfunctie $(x_1, x_2) \mapsto -x_1^{-1} - x_2^{-1}$.

a. Van twee equivalente nutsfuncties weet je uit de syllabus dat ze precies dezelfde optimale oplossingen hebben, dus als het UMP voor één ervan een optimale oplossing heeft, dan heeft het UMP voor de andere nutsfunctie ook een optimale oplossing (namelijk diezelfde bundel). Het gedrag van u_ρ is alsvolgt: als $x_1 \to 0$ of $x_2 \to 0$ dan $u_\rho(x_1, x_2) \to 0$ (immers $x_1^{-\rho} + x_2^{-\rho}$ gaat dan naar $+\infty$). Neem nu $\chi : t \mapsto -t^{-\rho}$ als monotone transformatie, dan volgt dat $\tilde{u}_\rho(x_1, x_2) := -x_1^{-\rho} - x_2^{-\rho}$ een equivalente nutsfunctie is met de eigenschap dat $\tilde{u}_\rho(x_1, x_2)$ naar $-\infty$ gaat als $x_1 \to 0$ of $x_2 \to 0$. Bovendien is $\tilde{u}_\rho$, net als overigens u_ρ zelf, continu op $X = \mathbb{R}^2_{++}$, want het is een compositie van continue functies. Daarmee voldoet $\tilde{u}_\rho$ aan de voorwaarden van het existentieresultaat in Propositie 4.2.5(b) van de syllabus. Uit het boven gestelde volgt dan dat ook het oorspronkelijke UMP een optimale oplossing heeft.

b. *Oplossing UMP.* Je kunt versie 2 van de UMP-oplosmethode rechtstreeks toepassen op u_ρ, want de existentie van een optimale oplossing hierboven al is afgehandeld en u_ρ is continu en strikt stijgend (immers, elke $x_i \mapsto -x_i^{-\rho}$ is continu en strikt stijgend).[1] Zo is dus – via de omweg van onderdeel a – per saldo aan stap 0' voldaan. Stap 1'(a) levert niets op en stap 1'(b) geeft $p_1x_1+p_2x_2 = y$ samen met $x_2 = (\frac{p_1}{p_2})^{1/(\rho+1)}x_1$. Met de afkorting $\sigma := 1/(\rho+1)$ is de kandidaat die uit deze twee vergelijkingen volgt

$$\bar{\mathbf{x}}_\rho := \left(\frac{yp_2^\sigma}{p_1p_2^\sigma + p_2p_1^\sigma}, \frac{yp_1^\sigma}{p_1p_2^\sigma + p_2p_1^\sigma} \right). \tag{5}$$

(merk de analogie op met de oplossingen die zijn gegeven in de syllabus en de handout over convexe/concave functies – zie boven). Omdat er maar één kandidaat is, volgt uit stap 2' dat $\mathbf{x}_\rho(p_1,p_2,y) := \bar{\mathbf{x}}_\rho$ de unieke optimale oplossing is van het UMP.

Oplossing EMP. Eerst bepaal je $u_\rho(X)$, zoals op het college herhaald is beklemtoond. Hier geldt $u_\rho(X) = \mathbb{R}_{++}$, wat bijvoorbeeld eenvoudig volgt uit het feit dat $u_\rho(tx_1, tx_2) = tu_\rho(x_1,x_2)$ voor alle $t > 0$. Je kunt versie 2 van de EMP-oplosmethode rechtstreeks toepassen op u_ρ. Aan stap 0' is dus al voldaan: zie onderdeel a. Stap 1'(a) levert niets op en voor $v \in \mathbb{R}_{++}$ geeft stap 1'(b) $x_1^{-\rho} + x_2^{-\rho} = 1/v^\rho$, samen met $x_2 = (\frac{p_1}{p_2})^{1/(\rho+1)}x_1$. Met de afkorting $\tau := \rho/(\rho+1)$ volgt uit deze twee vergelijkingen als kandidaat

$$\hat{\mathbf{x}} = (v\left(\frac{p_1^\tau + p_2^\tau}{p_1^\tau}\right)^{\frac{1}{\rho}}, v\left(\frac{p_1^\tau + p_2^\tau}{p_2^\tau}\right)^{\frac{1}{\rho}}).$$

Omdat er maar één kandidaat is, volgt uit stap 2' dat $\hat{\mathbf{x}}$ de unieke optimale oplossing is van het EMP.

Correctheidscontrole m.b.v. dualiteit (niet gevraagd). Als je tijd over hebt, kun je natuurlijk de bovenstaande uitkomsten voor UMP en EMP ook nog controleren. Ze geven n.l. $e(p_1,p_2,v) = \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{x}} = v(p_1^\tau + p_2^\tau)^{1/\tau}$ (na vereenvoudiging) en dus volgt

$$x_{1,\rho}(p_1,p_2,e(p_1,p_2,v)) = \frac{v(p_1^\tau + p_2^\tau)^{1/\tau}p_2^\sigma}{p_1p_2^\sigma + p_2p_1^\sigma}.$$

Omdat $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\rho} + 1$ en $\frac{\tau}{\rho} = \sigma$ volgt nu eenvoudig dat bovenstaande uitdrukking gelijk is aan $\hat{x}_1$. Voor de tweede componenten van Marshalliaanse en Hicksiaanse vraag is deze controle dan niet echt zinvol, want die is geheel spiegelbeeldig.

c. Als $\rho \to \infty$ geldt $\sigma := 1/(\rho+1) \to 0$. Dus volgt het in (4) gestelde direct uit (5).

(i) Als je de UMP-oplosmethode toepast op $\hat{u}$ dan is stap 0 elementair: omdat $x_i \mapsto x_i$ continu en strikt stijgend is, volgt dat $\hat{u}$ continu is en strikt stijgend. Stap 1(a) geeft de bundel in de doornede van de budgetlijn en de niet-differentieerbaarheidslijn $x_2 = x_1$, d.w.z. de bundel $\tilde{\mathbf{x}} := (\frac{y}{p_1+p_2}, \frac{y}{p_1+p_2})$. Stap 1(b) levert niets op: als $x_2 > x_1$ is $\frac{1}{p_1} = 0$ zinloos en als $x_2 < x_1$ dan is $0 = \frac{1}{p_2}$ eveneens zinloos. Stap 1(c) levert de beide hoekpunten $(y/p_1, 0)$ en $(0, y/p_2)$ op. Onderling vergelijken van de $\hat{u}$-waarden (stap 2) geeft dan de optimaliteit van bovengenoemde bundel $\tilde{\mathbf{x}}$.

(ii) *Geval 1:* $x_2 > x_1$. Dan $L = \lim_{\rho\to\infty} x_1(1 + (x_1/x_2)^\rho)^{-1/\rho} = x_1 = \min(x_1,x_2)$, want $(x_1/x_2)^\rho \to 0$ en $1/\rho \to 0$. *Geval 2:* $x_2 < x_1$. Dit verloopt spiegelbeeldig aan geval 1. *Geval 3:* $x_2 = x_1$. Dan $L = \lim_{\rho\to\infty} x_1 2^{1/\rho} = x_1 = \min(x_1,x_2)$. Merk op: het opsplitsen in deze drie gevallen is geheel in lijn met wat je leerde in de syllabus over nutsfuncties van het type $\hat{u}$.

Opgave 4 [20 pt.] Een markt voor een bepaald product omvat 120 firma's die alle dezelfde kostenfunctie $C(q) = 4q^2 - q + 36$, $q \geq 0$, hebben. Zij kunnen de marktprijs $p > 0$ niet beïnvloeden, en handelen dus als "price takers". De totale marktvraag naar het product wordt gegeven door de functie $D(p) = 180 + \frac{9300}{p}$.

a. [5 pt.] Bepaal voor de individuele firma in deze markt de optimale outputhoeveelheid q^* als functie van de marktprijs p.

[1] Je kunt UMP en EMP ook eerst oplossen voor de equivalente nutsfunctie $\tilde{u}_\rho$; voor het UMP levert dat ook meteen de Marshalliaanse vraag op voor u_ρ, maar voor het EMP moet je tenslotte nog wel Remark 4.5.1 verwerken!

b. [5 pt.] Bepaal voor de korte termijn: (*i*) de evenwichtsprijs p^*, (*ii*) de te produceren hoeveelheid per firma, (*iii*) het aantal firma's in de markt en (*iv*) de netto winst per firma.

c. [5 pt.] Beschouw dezelfde markt als boven, maar nu op de *lange termijn*, waarbij vrij toetreden (of verlaten) van de markt mogelijk is voor de firma's die het goed produceren. Deze firma's hebben de kostenfunctie $C(q) = 4q^2 - q + 36$ voor $q > 0$ en $C(0) = 0$. Bepaal voor de lange termijn: (*i*) de evenwichtsprijs p^{**}, (*ii*) de te produceren hoeveelheid per firma, (*iii*) het aantal firma's in de markt en (*iv*) de netto winst per firma.

d. [5 pt.] De regering is niet tevreden met de evenwichtsprijs p^{**} in onderdeel c. Om deze te veranderen legt zij aan elke firma die op de markt van het product actief is, een lump sum belasting T op. Hoe groot moet T zijn opdat $p^{**} = 31$?

Oplossing. *Opmerking:* Deze opgave is een variant van opgave 3 van het eindtentamen Micro in 2011.

a. Voor de korte termijn is $p_{crit} := \min_{q>0}(C(q) - C(0))/q = \min_{q>0}[4q - 1] = -1 < 0$. Dus dit levert weinig informatie op. Winstmaximalisering geeft $\pi(p) := \max_{q\geq 0} \psi(q) := (p+1)q - 4q^2 - 36$ en ψ is strikt convex. Uit $\psi'(q) = 0$ volgt daarom $q^*(p) = (p+1)/8$ en dan $\pi(p) = \frac{1}{16}(p+1)^2 - 36$.

b. (*i*) Hier $S(p) = 120 * q^* = 15(p + 1)$, dus p^* volgt als oplossing van $15(p + 1) = 180 + \frac{9300}{p}$, d.w.z. van $15p^2 + 15p - 180p - 9300 = 0$, dus van $p^2 - 11p - 620 = 0$. Deze kwadratische vergelijking heeft $p^* = 31$ als enige positieve oplossing en dat is dus de evenwichtsprijs op de korte termijn. (*ii*) Elke firma produceert dan $q^*(31) = 4$ eenheden. (*iii*) het aantal firma's is en blijft 120, (*iv*) elke firma maakt een winst van $\pi(31) = 64 - 36 = 28$.

c. (*i*) Voor de lange termijn geldt $p^{**} = p_{crit} := \min_{q>0} C(q)/q = \min_{q>0} \phi(q) := [4q-1+36q^{-1}]$. Hier is de functie ϕ strikt convex (want $\phi''(q) = 72q^{-3} > 0$), dus $\phi'(q) = 0 = 4 - 36q^{-2}$ geeft $q^* = 3$ en zo volgt $p^{**} = 11+36*3^{-1} = 23$. (*ii*) Bovengenoemde $q^* = 3$ is de te produceren hoeveelheid per firma en deze zorgt voor (*iv*) een winst van $23*3-4*9+3-26 = 0$, wat je natuurlijk ook al wist via de theorie. (*iii*) Tenslotte wordt N^*, het evenwichtsaantal firma's, bepaald door $N^*q^* = D(p^{**})$, d.w.z. door $N^* = 60 + \frac{3100}{23} \approx 195$.

d. De belastingheffing (uiteraard alleen opgelegd aan firma's die op de markt actief zijn) veroorzaakt een bedrag T aan extra vaste kosten als $q > 0$. Dus $C_{nieuw}(q) = 4q^2 - q + 36 + T$ voor $q > 0$ en $C_{nieuw}(0) = 0$. Dit geeft $p^{**}_{nieuw} := \min_{q>0} C_{nieuw}(q)/q = \min_{q>0} \phi_{nieuw}(q) := [4q-1+(36+T)q^{-1}]$. Hier is ϕ_{nieuw} strikt convex (want $\phi''_{nieuw} > 0$), dus $\phi'_{nieuw}(q) = 0 = 4 - (36 + T)q^{-2}$ geeft $q^*_{nieuw} = \sqrt{9 + \frac{T}{4}}$ en zo volgt $p^{**}_{nieuw} = \phi_{nieuw}(q^*_{nieuw}) = 4\sqrt{9 + \frac{T}{4}} - 1 + 4\sqrt{9 + \frac{T}{4}} = 8\sqrt{9 + \frac{T}{4}} - 1$. Dus de eis $p^{**}_{nieuw} = 31$ is equivalent met $\sqrt{9 + \frac{T}{4}} = 4$, d.w.z. met $9 + \frac{T}{4} = 16$ en dat geeft $T = 28$.

Interpretatie (niet gevraagd): Zo volgt $q^*_{nieuw} = \sqrt{9 + 7} = 4$ en het aantal deelnemende firma's wordt $D(28)/q^*_{nieuw} \approx 128$. Om de extra belasting te compenseren, moet elke firma dus meer produceren dan in onderdeel c en omdat de marktvraag ook nog daalt wegens de afgedwongen prijsverhoging $31 = p^{**}_{nieuw} > p^{**} = 23$, verklaart dit waarom het nieuwe evenwicht met minder firma's kan worden bereikt.