Uitwerking Herkansing Microeconomie d.d. 22-8-2013

Opgave 1 [30 pt.] Beschouw het volgende model $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ met drie assets, genummerd 0, 1 en 2. Asset 0 is risicoloos met $r = 0$ en een eenheid ervan heeft waarde 1. Asset 1 heeft waarde $W_1(0) = 4$ op tijdstip 0 en de waarden op tijdstip 1 zijn $(W_1(\omega_1), W_1(\omega_2), W_1(\omega_3)) = (8, 6, 3)$. Voor asset 2 zijn de overeenkomstige waarden respectievelijk $W_2(0) = 7$ en $(W_2(\omega_1), W_2(\omega_2), W_2(\omega_3)) = (10, 8, a)$, waarbij $a \in \mathbb{R}$ een parameter is. Beantwoord voor dit model de volgende vragen:

a. [7,5 pt.] Bepaal voor elke $a \in \mathbb{R}$ de verzameling $\Pi_{RN}(a)$ van alle risico-neutrale kansmaten.
b. [7,5 pt.] Bepaal de verzameling A van alle $a \in \mathbb{R}$ waarvoor een arbitragemogelijkheid bestaat.
c. [7,5 pt.] Bepaal voor elke parameterwaarde $a \in A$ precies één *concrete* handelsstrategie (d.w.z. concreet, maar uiteraard nog wel uitgedrukt in termen van de parameter a) die zowel (i) een arbitragemogelijkheid vormt als (ii) de waarde 0 heeft op $t = 0$.
d. [7,5 pt.] Bepaal voor elke $a \in \mathbb{R}$ de verzameling van alle repliceerbare (= hedgeable) portefeuilles (C_1, C_2, C_3).

Oplossing. a. Zij $a \in \mathbb{R}$. Dan is per definitie $\pi := (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \Pi_{RN}(a)$ equivalent met $\pi \in \mathbb{R}^3_{++}$, $8\pi_1 + 6\pi_2 + 3\pi_3 = 4$, $10\pi_1 + 8\pi_2 + a\pi_3 = 7$ en $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Met vegen volgt dan uit de drie vergelijkingen: $\pi = (\frac{-2a+13}{2a-10}, \frac{4a-25}{2a-10}, \frac{1}{a-5})$. Met $\pi_1, \pi_2, \pi_3 > 0$ erbij geeft dit $a > 5$ (wegens $\pi_3 > 0$) en ook $a < 13/2$ en $a > 25/4$. Dus volgt $\Pi_{RN}(a) = \{(\frac{-2a+13}{2a-10}, \frac{4a-25}{2a-10}, \frac{1}{a-5})\}$ als $a \in]25/4, 13/2[$ en $\Pi_{RN}(a) = \emptyset$ als $a \in]-\infty, 25/4] \cup [13/2, +\infty[$.

b. Wegens de bekende equivalentie $\nexists_{AM} \Leftrightarrow \Pi_{RN} \neq \emptyset$ (Stelling 3.3.1 syllabus), welke natuurlijk equivalent is met zijn contrapositieve versie $\Pi_{RN} = \emptyset \Leftrightarrow \exists_{AM}$, geeft het vorige onderdeel $A =]-\infty, 25/4] \cup [13/2, +\infty[$.

c. Kies $a \in]-\infty, 25/4] \cup [13/2, +\infty[$. Dan is $\mathbf{h} = (h_0, h_1, h_2)$ precies dan een AM met de eigenschappen (1)-(2) als

$$h_0 + 4h_1 + 7h_2 = 0$$

en

$$h_0 + 8h_1 + 10h_2 \geq 0, h_0 + 6h_1 + 8h_2 \geq 0, h_0 + 3h_1 + ah_2 \geq 0,$$

waarvan minstens één ongelijkheid strikt moet zijn (dus moet gelden met $>$ i.p.v. $\geq$). Door substitutie van h_0, verkregen uit de bovenstaande gelijkheid, ontstaan de volgende ongelijkheden voor h_1, h_2:

$$(i)\ h_2 \geq -\frac{4}{3}h_1, (ii)\ h_2 \geq -2h_1, (iii)\ -h_1 + (a-7)h_2 \geq 0$$

met minstens één strikte ongelijkheid.

Geval 1: $a > 7$. Dan luidt (iii): $h_2 \geq h_1/(a-7)$. Als je dus bijvoorbeeld $h_1 = 0$ kiest, dan moet h_2 alleen nog voldoen aan $h_2 \geq 0$ en $(a-7)h_2 \geq 0$ met minstens één strikte ongelijkheid erbij. Kies daarom bijvoorbeeld $h_2 = 1$. Tenslotte moet dan ook gelden $h_0 + 7 = 0$, d.w.z. $h_0 = -7$. Deze keuzes tonen aan dat $\mathbf{h} = (-7, 0, 1)$ een AM is als $a > 7$ (ter controle: $-7 + 0 + 7 * 1 = 0$, $1 > 0$, $1 > 0$ en $0 + (a-7) * 1 > 0$, dus het klopt wiskundig en intuïtief verwacht je deze AM natuurlijk ook).

Geval 2: $a = 7$. Dan luidt (iii) $h_1 \leq 0$ en de bovenstaande keuze $\mathbf{h} = (-7, 0, 1)$ is nog steeds AM: $-7 + 0 + 7 * 1 = 0$, $1 > 0$, $1 > 0$ en $0 + (a-7) * 1 = 0$.

Geval 3: $a < 7$. Dan luidt (iii) $h_2 \leq h_1/(a-7)$. Omdat $a \in A$, valt dit geval uiteen in twee deelgevallen:

Deelgeval 3a: $13/2 \leq a < 7$. Dan $1/(a-7) \leq -2$, dus $h_1 > 0$ kan niet, want dan $h_2 \leq h_1/(a-7) \leq -2h_1$ en samen met (ii) zou dat (i) weerspreken. Probeer daarom $h_1 = -1$, dan moeten gelden $h_2 \geq 4/3$, $h_2 \geq 2$ en $h_2 \geq 1/(7-a) > 1/2$, zodat bijvoorbeeld $h_2 = 2$ voldoet, met $h_0 = -4 * (-1) - 7 * 2 = -10$. Dus $\mathbf{h} = (-10, -1, 2)$ is een AM (controle: $-10 + 4 * (-1) + 7 * 2 = 0$,

$2 > 4/3$, $2 \geq 2$ en $1 + 2(a-7) = 2a - 13 > 0$, dus het klopt). Merk na deze controle op dat $\mathbf{h} = (-10, -1, 2)$ als AM had kunnen worden gebruikt voor *alle* $a \geq 13/2$.

Deelgeval 3b: $a \leq 25/4$. Dan $1/(a-7) > -4/3 > -2$, dus kies bijvoorbeeld $h_1 = 1$ en $h_2 = 1/(7-a)$, dan volgt $h_0 = -4 * 1 - 7/(a-7)$. Dus $\mathbf{h} = (-4 - \frac{7}{a-7}, 1, \frac{1}{7-a})$ is een AM (controle: $-4*1-7/(a-7)+4*1+7/(a-7) = 0$, $1/(7-a) > -\frac{4}{3}*1 > -2*1$ en $-1+(a-7)/(7-a) = 0 \geq 0$, dus het klopt).

d. De verzameling $\{W_1^{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3\}$ van alle repliceerbare portefeuilles bestaat uit het lineaire opspansel L van de vectoren $(1,1,1)^t$, $(8,6,3)^t$ en $(10,8,a)^t$. Alleen voor $a = 5$ is de bijbehorende determinant gelijk aan 0, dus dan zijn de drie opspannende vectoren lineair afhankelijk (namelijk $(10,8,5)^t = 2(1,1,1)^t + (8,6,3)^t$). Voor alle $a \neq 5$ is L dus gelijk aan $\mathbb{R}^3$ (m.a.w. voor $a \neq 5$ zijn alle portefeuilles repliceerbaar). Voor $a = 5$ is L het lineaire opspansel van $(1,1,1)^t$ en $(8,6,3)$.

Opgave 2 [30 pt.] Een consument heeft preferenties die gerepresenteerd kunnen worden door de nutsfunctie $u(x_1, x_2) = \min(x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_1) + \min(x_1 + 3x_2, x_2 + 3x_1)$ op $X := \mathbb{R}^2_+$.

a. [15 pt.] Gebruik de grafische oplosmethode om in *formulevorm* (dus niet alleen door punten aan te duiden in een plaatje!) de Marshalliaanse vraag van de consument te bepalen voor alle mogelijke waarden $p_1, p_2, y > 0$.

b. [15 pt.] Gebruik de EMP-oplosmethode om de Hicksiaanse vraag van de consument te bepalen voor alle mogelijke waarden $p_1, p_2 > 0$ en $v \in u(X)$. Doorloop daarbij zorgvuldig alle stappen van die oplosmethode.

c. [10 pt. **extra**] Formuleer een algemene dualiteitsrelatie waar Marshaliaanse en Hicksiaanse vraag aan moeten voldoen. Illustreer deze relatie grafisch voor de bovenstaande nutsfunctie. Laat vervolgens zien dat je uitkomsten bij onderdelen a en b voldoen aan die dualiteitsrelatie.

Oplossing. a. Voor $x_2 \geq x_1$ geldt $u(x_1, x_2) = x_2 + 2x_1 + x_2 + 3x_1 = 5x_1 + 2x_2$ en voor $x_2 \leq x_1$ geldt $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + x_1 + 3x_2 = 2x_1 + 5x_2$. De indifferentiecurve $u^{-1}(c)$, $c > 0$, bestaat dus uit twee lijnsegmenten: (1) het segment dat $(0, c/2)$ verbindt met $(c/7, c/7)$ (dit heeft richtingscoëfficiënt -5/2) en (2) het segment dat $(c/7, c/7)$ verbindt met $(c/2, 0)$ (dit heeft richtingscoëfficiënt -2/5). Hieruit lees je direct het volgende af: (*i*) als $p_1/p_2 < 2/5$, dan is $(y/p_1, 0)$ de unieke Marshalliaanse vraagbundel, (*ii*) als $p_1/p_2 > 5/2$ dan is $(0, y/p_2)$ de unieke Marshalliaanse vraagbundel, (*iii*) als $2/5 < p_1/p_2 < 5/2$ dan is $(y/(p_1+p_2), y/(p_1+p_2))$ de unieke Marshalliaanse vraagbundel, (*iv*) als $p_1/p_2 = 2/5$ dan vormt het lijnsegment tussen $(y/p_1, 0)$ en $(y/(p_1+p_2), y/(p_1+p_2))$ de verzameling van alle Marshalliaanse vraagbundels, (*v*) als $p_1/p_2 = 5/2$ dan vormt het lijnsegment tussen $(y/(p_1+p_2), y/(p_1+p_2))$ en $(0, y/p_2)$ de verzameling van alle Marshalliaanse vraagbundels.

Overzichtelijk samengevat geeft dit voor de Marshalliaanse vraagbundel(s) (x_1^*, x_2^*):

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} (y/p_1, 0) & \text{als } p_1/p_2 < 2/5, \\ \text{lijnsegment } (y/p_1, 0)\text{-}(y/(p_1+p_2), y/(p_1+p_2)) & \text{als } p_1/p_2 = 2/5, \\ (y/(p_1+p_2), y/(p_1+p_2)) & \text{als } 2/5 < p_1/p_2 < 5/2, \\ \text{lijnsegment } (0, y/p_2)\text{-}(y/(p_1+p_2), y/(p_1+p_2)) & \text{als } p_1/p_2 = 5/2, \\ (0, y/p_2) & \text{als } p_1/p_2 > 5/2, \end{cases}$$

wat bevestigt dat bij toenemende verhouding p_1/p_2 de consument steeds minder van goed 1 gaat kopen ten gunste van goed 2.

b. Hier geldt $u(X) = \mathbb{R}_+$ (evident). Zij $v > 0$ (het geval $v = 0$ geeft triviaal $(0,0)$ als Hicksiaanse bundel).

Stap 0: u is evident continu, want lineaire functies $ax_1 + bx_2$ zijn dat en zulke continuiteit blijft behouden onder het nemen van minima en sommatie.

Stap 1a: Uit onderdeel a volgt dat $x_2 = x_1$ als niet-differentieerbaarheidslijn fungeert. Uit $x_1 = x_2$ en $u(x_1, x_2) = v$ (efficiëntie) volgt $x_1 = v/7 = x_2$. Dus $(v/7, v/7)$ is een kandidaat.

Stap 1b: Op het gebied $x_2 > x_1$ geldt $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$, dus de tweede wet van Gossen levert *alleen* kandidaten op als $2/p_1 = 5/p_2$ en dan meteen alle punten die zowel op $u^{-1}(v)$ liggen als voldoen aan $x_2 > x_1$. Dat zijn dus alle punten op het lijnsegment tussen $(0, v/2)$ en $(v/7, v/7)$ (laatstgenoemde bundel doet formeel niet mee in deze stap, maar hij werd bij stap 1a al tot kandidaat verklaard). Net zo volgt op het gebied $x_1 > x_2$ dat er alleen kandidaten zijn als $5/p_1 = 2/p_2$ en dan meteen alle punten op het lijnsement tussen $(v/2, 0)$ en $(v/7, v/7)$.

Stap 1c: De randpunten, opgelost uit respectievelijk $u(x_1, 0) = v$ en $u(0, x_2) = v$, zijn $(v/2, 0)$ en $(0, v/2)$.

Stap 2: Als $p_1/p_2 \neq 2/5$ en $p_1/p_2 \neq 5/2$ dan bestaat C uit $(v/7, v/7)$, $(v/2, 0)$ en $(0, v/2)$. Je moet dan dus vergelijken $(p_1 + p_2)\frac{v}{7}$, $p_1\frac{v}{2}$ en $p_2\frac{v}{2}$. Stel eerst $p_1 \geq p_2$; dan moet je alleen nog de waarden $(p_1+p_2)\frac{v}{7}$ en $p_2\frac{v}{2}$ met elkaar vergelijken. Nu is $(p_1+p_2)/7 < p_2/2$ equivalent met $2p_1 < 5p_2$, d.w.z. met $p_1/p_2 < 5/2$. Gevolg: als $1 \leq p_1/p_2 < 5/2$ dan is $(v/7, v/7)$ de unieke Hicksiaanse vraag, maar als $p_1/p_2 \geq 5/2 > 1$ dan is $(0, v/2)$ dat. Stel vervolgens $p_1 < p_2$; dan moet je alleen de waarden $(p_1 + p_2)\frac{v}{7}$ en $p_1\frac{v}{2}$ vergelijken, en er geldt $(p_1 + p_2)\frac{v}{7} < p_1\frac{v}{2}$ d.e.s.d.a. $p_1/p_2 > 2/5$. Gevolg: als $2/5 < p_1/p_2 < 1$ dan is $(v/7, v/7)$ de unieke Hicksiaanse vraag, maar als $p_1/p_2 < 2/5$ dan is $(v/2, 0)$ dat.

Vervolgens onderzoek je de gevallen $p_1/p_2 = 2/5$ (met $(p_1 + p_2)\frac{v}{7} = p_1\frac{v}{2}$) en $p_1/p_2 = 5/2$ (met $(p_1 + p_2)\frac{v}{7} = p_2\frac{v}{2}$) apart. In het eerste geval bestaat C volgens stap 1 uit het gehele lijnsegment tussen $(0, v/2)$ en $(v/7, v/7)$; omdat al die punten op dat segment dezelfde kostenwaarde $p_1\frac{v}{2}$ hebben, volgt dat al die punten dan optimaal zijn voor het EMP. Net zo volgt dit in het tweede geval voor de punten op het lijnsegment tussen $(v/2, 0)$ en $(v/7, v/7)$ die de gemeenschappelijke kostenwaarde $p_2\frac{v}{2}$ hebben.

Overzichtelijk samengevat geeft dit voor de Hicksiaanse vraagbundel(s) (x_{*1}, x_{*2}):

$$(x_{*1}, x_{*2}) = \begin{cases} (v/2, 0) & \text{als } p_1/p_2 < 2/5, \\ \text{lijnsegment } (v/2, 0)\text{-}(v/7, v/7) & \text{als } p_1/p_2 = 2/5, \\ (v/7, v/7) & \text{als } 2/5 < p_1/p_2 < 5/2, \\ \text{lijnsegment } (0, v/2)\text{-}(v/7, v/7) & \text{als } p_1/p_2 = 5/2, \\ (0, v/2) & \text{als } p_1/p_2 > 5/2. \end{cases}$$

c. Je kunt kiezen voor $\mathbf{x}^m(p_1, p_2, y) = \mathbf{x}^h(p_1, p_2, v(p_1, p_2, y))$ (voor de alternatieve formule $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = \mathbf{x}^m(p_1, p_2, e(p_1, p_2, v))$ gaat eenzelfde soort argument op). Uit onderdeel a volgt

$$v(p_1, p_2, y) = u(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} 2y/p_1 & \text{als } p_1/p_2 < 2/5, \\ 2y/p_1 (= 7y/(p_1 + p_2)) & \text{als } p_1/p_2 = 2/5, \\ 7y/(p_1 + p_2) & \text{als } 2/5 < p_1/p_2 < 5/2, \\ 2y/p_2 (= 7y/(p_1 + p_2)) & \text{als } p_1/p_2 = 5/2, \\ 2y/p_2 & \text{als } p_1/p_2 > 5/2, \end{cases}$$

Invullen in onderdeel b, met uitsluiting van de gevallen $p_1/p_2 = 2/5$ en $p_1/p_2 = 5/2$, waarin niet aan de vereiste uniciteitsvoorwaarde is voldaan, geeft

$$\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v(p_1, p_2, y)) = \begin{cases} (y/p_1, 0) & \text{als } p_1/p_2 < 2/5, \\ (y/(p_1 + p_2), y/(p_1 + p_2)) & \text{als } 2/5 < p_1/p_2 < 5/2, \\ (0, y/p_2) & \text{als } p_1/p_2 > 5/2. \end{cases}$$

Dus de dualiteitsrelatie klopt, gezien wat is afgeleid in onderdeel a.

Opgave 3 [40 pt.] De stelling van Karush-Kuhn-Tucker voor ongelijkheids-nevenvoorwaarden uit het collegedictaat luidt alsvolgt. Zij $(\mathbb{P})$ het probleem om $g_0(\mathbf{z})$ te *minimaliseren* over alle $\mathbf{z} \in Z$ waarvoor $g_1(\mathbf{z}) \leq 0, \ldots, g_p(\mathbf{z}) \leq 0$; hier is Z een *open* deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $g_0, g_1, \ldots, g_p : Z \to \mathbb{R}$ zijn gegeven functies.

Theorem. *Let $\mathbf{z}_*$ be a locally optimal solution of $(\mathbb{P})$ and suppose that $g_0, g_1, \ldots, g_p$ are differentiable at $\mathbf{z}_*$ and that the collection $\{\nabla g_i(\mathbf{z}_*) : i \in I_*\}$ is linearly independent. Then the following FONC holds: there exist $\mu_i \geq 0$, $i \in I_*$, such that*

$$\nabla g_0(\mathbf{z}_*) + \sum_{i \in I_*} \mu_i \nabla g_i(\mathbf{z}_*) = \mathbf{0}.$$

Here $I_* := \{i \in \{1, \ldots, p\} : g_i(\mathbf{z}_*) = 0\}$.

a. [10 pt.] Beschouw het gebruikelijke nutsmaximaliseringsprobleem $(\mathbb{U}_n)$ met prijsvector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ en inkomen $y > 0$. Formuleer hiervoor de (tweede) wet van Gossen en bewijs deze wet vervolgens met behulp van bovenstaande KKT-stelling. Geef daarbij nauwkeurig aan hoe welke substituties, voorwaarden, etc. je gebruiktt. Beantwoord tenslotte ook nog de vraag of je deze wet (of eventueel een logische aanpassing ervan) ook kunt afleiden zonder aan te nemen dat u strikt stijgend is.

b. [15 pt.] Beschouw de volgende variant van $(\mathbb{U}_n)$. Laten $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ en $y > 0$ net als in onderdeel a zijn. Zij $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+$ en zij $W > 0$. Hier geeft $w_i > 0$ het gewicht aan van 1 eenheid van consumptiegoed i en $W > 0$ het maximaal toelaatbare gewicht van de in te kopen consumptiebundel. Dan luidt het herziene UMP: maximaliseer nutsfunctie $u(\mathbf{x})$ over alle bundels $\mathbf{x} \in X$ waarvoor zowel $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y$ (budgetongelijkheid voor de gekochte goederen) als $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \leq W$ (gewichtsongelijkheid voor de gekochte goederen) gelden. Leid m.b.v. bovenstaande KKT-stelling een eerste orde optimaliteitsvoorwaarde af voor dit herziene UMP. Geef, net als in onderdeel a, nauwkeurig aan hoe de KKT-stelling precies wordt gebruikt (substituties, voorwaarden, etc.) en vergeet daarbij niet om ook de situatie waarin $\mathbf{p}$ en $\mathbf{w}$ lineair afhankelijk zijn te analyseren. Laat tenslotte nog zien dat als W heel groot wordt, de nieuwe optimaliteitsvoorwaarde eigenlijk niets anders is dan de tweede wet van Gossen.

c. [15 pt.] Los bovenstaande herziene UMP volledig op in de volgende concrete situatie: $n = 2$, $X = \mathbb{R}^2_+$, $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $w_1 = w_2 = 1$, $y = 8$, $W = 3$ en $u(x_1, x_2) = x_1^3 x_2$. Doe dit door een imitatie van de UMP-oplosmethode te formuleren op basis van onderdeel b (licht daarbij kort toe waarom die methode gegarandeerd zal werken voor de gegeven u) en bepaal daarmee de verzameling van alle optimale bundels. *Attentie:* Als dit niet lukt (bijvoorbeeld omdat je onderdeel b niet kon maken), dan mag je als *alternatief* een grafische oplossing van dit concrete probleem geven; daarvoor kun je dan maximaal 8 pt. krijgen.

Oplossing. a. Merk op: dit is een exercise uit de syllabus (p. 103). Stelling 4.6.3 zegt het volgende over de tweede wet van Gossen: als $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n_{++}$ lokaal optimaal is voor $(\mathbb{U}_n)$ en als u differentieerbaar is in $\mathbf{x}^*$, dan geldt $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y$ en er bestaat een $\lambda \geq 0$ met $u(\mathbf{x}^*) = \lambda \mathbf{p}$. Laatstgenoemde identiteit heet in die stelling de tweede wet van Gossen en wordt dus gepresenteerd als FONC (= eerste orde noodzakelijke voorwaarde) voor (locale) optimaliteit. De eerstgenoemde identiteit herhaalt Propositie 4.6.1, omdat u in Stelling 4.6.3 strikt stijgend wordt verondersteld.

Om bovenstaande FONC af te leiden substitueer je eenvoudig $g_0(\mathbf{x}) := -u(\mathbf{x})$ en $g_1(\mathbf{x}) := \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - y$. Aan de voorwaarde $\mathbf{x} \in X$ wordt dicht genoeg bij een lokaal optimale oplossing $\mathbf{x}^*$ automatisch voldaan (!) omdat de wet van Gossen $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n_{++}$ vooronderstelt (zie Stelling 4.6.3). Dan geeft bovenstaande KKT-stelling dus in eerste instantie: (i) als $1 \in I_*$ (d.w.z. als $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - y = 0$) dan bestaat er een $\mu_1 \geq 0$ met $-\nabla u(\mathbf{x}^*) + \mu_1 \mathbf{p} = \mathbf{0}$ (kies dan $\lambda := 0$), (ii) als $1 \notin I_*$ dan geldt $-\nabla u(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ (kies dan $\lambda := 0$). Merk hierbij op dat $\nabla g_1(\mathbf{x}^*) = \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, dus het stelsel $\{\nabla g_1(\mathbf{x}^*)\}$ is sowieso lineair onafhankelijk. Merk tenslotte nog op dat bij strikt stijgende u altijd sprake is van budget-gebalanceerdheid voor $\mathbf{x}^*$, d.w.z. dan geldt $g_1(\mathbf{x}^*) = 0$. Dus geval (ii) kan zich dan niet voordoen. Echter, (i)-(ii) samen geven $\nabla u(\mathbf{x}^*) = \lambda \mathbf{p}$ voor de boven gegeven keuze van λ, dus de tweede wet van Gossen blijft ook gelden als u niet strikt stijgend zou zijn.

b. Door $g_0(\mathbf{x}) := -u(\mathbf{x})$, $g_1(\mathbf{x}) := \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - y$ en $g_2(\mathbf{x}) := \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - W$ te substitueren, geeft de KKT-stelling de volgende uitspraak: als $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n_{++}$ lokaal optimaal is voor de nieuwe versie van $(\mathbb{U}_n)$ en als u differentieerbaar is in $\mathbf{x}^*$, dan bestaan er $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ zo dat

$$\nabla u(\mathbf{x}^*) = \begin{cases} \mu_1 \mathbf{p} + \mu_2 \mathbf{w} & \text{als } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y \text{ en } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* = W \quad (\text{geval } I_* = \{1, 2\}) \\ \mathbf{0} & \text{als } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* < y \text{ en } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* < W \quad (\text{geval } I_* = \emptyset) \\ \mu_1 \mathbf{p} & \text{als } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y \text{ en } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* < W \quad (\text{geval } (I_* = \{1\}) \\ \mu_2 \mathbf{w} & \text{als } \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* < y \text{ en } \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* = W \quad (\text{geval } (I_* = \{2\}) \end{cases} \tag{1}$$

In (1) geldt de bovenste regel rechts onder de aanname dat $\mathbf{p}$ en $\mathbf{w}$ lineair onafhankelijk zijn (bij de overige drie regels is aan de onafhankelijkheidsvoorwaarde in de stelling automatisch voldaan). In de speciale situatie van lineaire afhankelijkheid van $\mathbf{p}$ en $\mathbf{w}$ geldt $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{p}$ voor zekere α, met bovendien $\alpha > 0$ vanwege de strikte positiviteit van de beide vectoren. De twee nevenvoorwaarden luiden dan $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y$ en $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq W/\alpha$. Als $y < W/\alpha$ dan is alleen de budget-nevenvoorwaarde relevant (immers, geldigheid van de gewichts-nevenvoorwaarde volgt daaruit automatisch en geldt met strikte ongelijkheid). Je bent dan terug bent in het geval met één nevenvoorwaarde van onderdeel a en dat geeft dus $\exists_{\mu_1 \geq 0} \nabla u(\mathbf{x}^*) = \mu_1 \mathbf{p}$. Als $y > W/\alpha$ volgt evenzo $\exists_{\mu_2 \geq 0} \nabla u(\mathbf{x}^*) = \mu_2 \mathbf{w}$. Tenslotte, als $y = W/\alpha$ dan zijn de twee nevenvoorwaarden identiek (n.l. dan geldt $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq y \Leftrightarrow \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \leq W$), zodat je ook dan terugkeert tot onderdeel a: er geldt $\exists_{\mu_1 \geq 0} \nabla u(\mathbf{x}^*) = \mu_1 \mathbf{p}$. Als je goed kijkt zie je dat desgewenst deze drie gevallen voor de lineaire afhankelijkheids-situatie nog weer zouden kunnen worden ondergebracht in (1).

De aangepaste UMP-oplosmethode wordt nu verkregen door de tweede wet van Gossen nu te vervangen door (1). Bovendien wordt budget-gebalanceerdheid voor de optimale oplossing $\mathbf{x}^*$ vervangen doordat nu óf (1) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y$ (en dan $I_* = \{1\}$)) óf (2) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^* = W$ (en dan $I_* = \{1\}$)) óf (1) en (2) tegelijk (en dan $I_* = \{1, 2\}$)) moeten gelden (de situatie $I_* = \emptyset$ kan zich dus niet voordoen, tenzij de aaname dat u strikt stijgt wordt verlaten).

c. Hier zijn $\mathbf{p} = (3, 2)$ en $\mathbf{w} = (1, 1)$ lineair onafhankelijk. Merk alvast op dat de "dubbelbudgetverzameling" het binnendeel van de vierhoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(8/3, 0)$, $(5/2, 1/2)$ en $(0, 3)$ is.

Aangepaste stap 0: de Cobb-Douglas functie u is, zoals bekend, continu en strikt stijgend

Aangepaste stap $1(a)$: u heeft geen niet-differentieerbaarheidspunten

Aangepaste stap $1(b)$: Je onderscheidt drie gevallen:

Geval 1: $I_* = \{1\}$. Dan $\mu_2 = 0$ en daarmee wordt (1) weer de gewone tweede wet van Gossen: immers $3x_1^2x_2 = \mu_1 p_1$, $x_1^3 = \mu_1 p_2$ geeft $\frac{3x_1^2x_2}{p_1} = \mu_1 = \frac{x_1^3}{p_2}$, wat hier voert tot $x_1 = x_2$. Samen met $p_1x_1 + p_2x_2 = y$ (want $I_* = \{1\}$) geeft dit de kandidaat $(x_1, x_2) = (2, 2)$. Echter, omdat ook $w_1x_1 + w_2x_2 < W$ (strikt, want $2 \notin I_*$) moet gelden, volgt tegenspraak.

Geval 2: $I_* = \{2\}$. Eenzelfde redenatie als boven leidt nu tot de kandidaat $(x_1, x_2) = (1, 1/3)$, welke voldoet aan de resterende ongelijkheid $p_1x_1 + p_2x_2 < y$.

Geval 3: $I_* = \{1, 2\}$. Nu geldt zowel $p_1x_1 + p_2x_2 = y$ als $w_1x_1 + w_2x_2 = W$ en dus volgt $(x_1, x_2) = (5/2, 1/2)$.

De kandidaten die via stap $1(b)$, dus op basis (1) en de aangepaste vorm van budget-gebalanceerdheid, worden aangeleverd zijn dus $(1, 1/3)$ en $(5/2, 1/2)$.

Aangepaste stap $1(c)$: de hoekpunten (d.w.z. punten met tenminste één coördinaat gelijk aan nul) van de "dubbelbudgetlijn" (dat is dus de gebroken lijn die $(8/3, 0)$ via $(5/2, 1/2)$ met $(0, 3)$ verbindt) zijn $(8/3, 0)$ en $(0, 3)$.

Aangepaste stap 2: Uit stap 1 blijkt dat $\{(5/2, 1/2), (1, 1/3), (8/3, 0), (0, 3)\}$ de verzameling van alle optimaliteitskandidaten is. Vergelijking van de respectieve u-waarden toont aan dat daaruit $(5/2, 1/2)$ de optimale oplossing vormt.