Uitwerking Tweede Quiz Speltheorie, 28-11-2012

Attentie! Maak van de onderstaande drie opgaven er slechts twee naar eigen keuze!

Opgave 1 [50 pt]. Van het tweepersoons nulsomspel met de 2×4-uitbetalingsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

is uit sectie 2.2.3 van het boek bekend dat de unieke gemengde evenwichtsoplossing gevormd wordt door $\bar{\mathbf{p}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en $\bar{\mathbf{q}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$. N.B.: dit hoeft niet nogmaals te worden afgeleid.

a. [10 pt] In welke zin is het LP-probleem om $-x_3$ te minimaliseren over de verzameling V van alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ met $10x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 0$, $2x_1 + 10x_2 - x_3 \geq 0$, $5x_1 + 8x_2 - x_3 \geq 0$, $x_1 + 12x_2 - x_3 \geq 0$ en $-x_1 - x_2 \geq -1$ nauw verbonden met het probleem voor speler 1 om de waarde $\nu_1(A)$ van het spel te bepalen?

b. [10 pt] Bewijs volledig uit basisprincipes (dus zonder stellingen over dualiteit e.d. aan te roepen) het verband dat je al in onderdeel a hebt aangegeven.

c. [10 pt] Neem het minimaliseringsprobleem uit onderdeel a als primaal LP-probleem. Formuleer het bijbehorende duale LP-probleem. Geef en bewijs het verband van dat probleem met het probleem voor speler 2 om de waarde $\nu_2(A)$ te bepalen.

d. [10 pt] Wat geeft de LP-dualiteitsstelling concreet als je hem toepast op het primale en duale probleem uit onderdeel c? Wat betekent dit in termen van het oorspronkelijke spel?

e. [10 pt] Bewijs m.b.v. de vorige onderdelen dat bovenstaande vectoren $\bar{\mathbf{p}}$ en $\bar{\mathbf{q}}$ een evenwichtsoplossing vormen voor het spel door te laten zien dat ze aan een zekere dualiteitsrelatie voldoen.

Oplossing. a. Volgens pp. 164-165 en i.h.b. Stelling 12.4 is het minimum van $-x_3$ over V gelijk aan $-\nu(A)$. Merk op dat de op p. 165 ingevoerde verzameling V precies overeenkomt met de V in de aanhef van de opgave; de overige substituties zijn evident.

b. De eerste vier ongelijkheidsvoorwaarden samen zijn equivalent met $x_3 \leq f(x_1, x_2) := \min(10x_1 + 2x_2, \ldots, x_1 + 12x_2)$. Wegens $\min_V -x_3 = -\max_V x_3$ (tekentruc) geldt

$$\min_{(x_1,x_2,x_3)\in V} -x_3 = -\max_{x_1,x_2\geq 0, x_1+x_2\leq 1, x_3 \leq f(x_1,x_2)} x_3 = -\max_{x_1,x_2\geq 0, x_1+x_2\leq 1} f(x_1, x_2).$$

Omdat $f(x_1, x_2)$ in beide argumenten stijgt heb je

$$\max_{x_1,x_2\geq 0, x_1+x_2\leq 1} f(x_1, x_2) = \max_{x_1,x_2\geq 0, x_1+x_2=1} f(x_1, x_2). \tag{1}$$

Immers, als $x_1 + x_2 < 1$ dan geeft bijvoorbeeld $(x_1', x_2') := (x_1 + \frac{\epsilon}{2}, x_2 + \frac{\epsilon}{2})$, met $\epsilon := 1 - x_1 - x_2 > 0$, een strikt hogere waarde aan f dan (x_1, x_2), terwijl toch nog geldt $x_1', x_2' \geq 0$ met $x_1' + x_2' \leq 1$. Zo volgt $\min_{(x_1,x_2,x_3)\in V} -x_3 = -\max_{\mathbf{p}\in\Delta^2} f(\mathbf{p}$. Merk tenslotte nog op: $f(\mathbf{p}) = \min_{j=1,\dots,4} \mathbf{p}A\mathbf{e}^j = \min_{\mathbf{q}\in\Delta^4} \mathbf{p}A\mathbf{q}$ (dit laatste is een bekende identiteit). Dus $\min_V -x_3$ is gelijk aan $-\nu_1(A)(\stackrel{\text{St. 12.2}}{=} -\nu(A))$. Bovendien volgt uit bovenstaande dat $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in V$ dit minimum aanneemt dan en slechts dan als $\bar{x}_3$ gelijk aan $-\nu_1(A)$ en $\min_{\mathbf{q}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)A\mathbf{q} = \max_{\mathbf{p}\in\Delta^2} \min_{\mathbf{q}} \mathbf{p}A\mathbf{q}$.

c. Zij B de 3×5 matrix zoals die conform p. 164 behoort bij de gegeven matrix A (merk op: A heeft alleen positieve elementen, zoals p. 164 vereist. Zij $\mathbf{b} := -\mathbf{e}^5$ en $\mathbf{c} := -\mathbf{e}^3$. Dan luidt bovenstaand LP-probleem $\min_{\mathbf{x}\in V} \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}$ met $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3_+ : \mathbf{x}B \geq \mathbf{b}\}$. Noem dit het *primale* probleem, net als op p. 165. Volgens p. 165 is het bijbehorende duale optimaliseringsprobleem dan: maximaliseer $\mathbf{b}\cdot\mathbf{y}$ over de verzameling $W := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^5_+ : B\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\}$, d.w.z., maximaliseer $-y_5$ over de verzameling W van alle $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$ met $10y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_4 - y_5 \leq 0$, $2y_1 + 10y_2 - +8y_3 + 12y_4 - y_5 \leq 0$ en $-y_1 - y_2 - y_3 - y_4 \leq -1$. De eerste twee voorwaarden zijn samen equivalent met $y_5 \geq g(y_1, y_2, y_3, y_4) := \max(10y_1 + 2y_2 + 5y_3 + y_4, 2y_1 + 10y_2 - +8y_3 + 12y_4)$. Wegens de tekentruc is $\max_{(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\in W} -y_5$ dus gelijk aan

$$-\min_{y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0, y_1+y_2+y_3+y_4\geq 1, y_5\geq g(y_1,y_2,y_3,y_4)} y_5 = -\min_{y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0, y_1+y_2+y_3+y_4\geq 1} g(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Omdat $g(y_1, y_2, y_3, y_4)$ in zijn vier argumenten stijgt heb je

$$\min_{y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0, y_1+y_2+y_3+y_4\geq 1} g(y_1, y_2, y_3, y_4) = \min_{y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0, y_1+y_2+y_3+y_4=1} g(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

en het argument hiervoor is analoog aan wat boven is betoogd n.a.v. (1). Zo volgt $\max_W -y_5 = -\min_{\mathbf{q}\in\Delta^4} g(\mathbf{q})$. Merk tenslotte nog op: $g(\mathbf{q}) = \max_{i=1,2} \mathbf{e}^i A\mathbf{q} = \max_{\mathbf{p}\in\Delta^2} \mathbf{p}A\mathbf{q}$ (dit laatste is een bekende identiteit). Dus $\max_W -y_5$ is gelijk aan $-\nu_2(A)(\stackrel{\text{St. 12.2}}{=} -\nu(A))$. Bovendien volgt uit bovenstaande dat $\bar{\mathbf{y}} := (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_5) \in W$ optimaal is slechts dan als $\bar{y}_5$ gelijk aan $\nu_2(A)$ en $\max_{\mathbf{p}} \mathbf{p}A(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_4) = \min_{\mathbf{q}\in\Delta^4} \max_{\mathbf{p}} \mathbf{p}A\mathbf{q}$.

d. Volgens Corollarium 2.13 geldt $\min_{\mathbf{x}\in V} \mathbf{c}\cdot\mathbf{x} = \max_{\mathbf{y}\in W} \mathbf{b}\cdot\mathbf{y}$. Zo volgt nu dus $-\nu_1(A) = \min_V -x_3 = \max_W -y_5 = -\nu_2(A)$ uit onderdelen a,b, en c. Dus volgt $\nu_1(A) = \nu_2(A)$ zonder dat hiervoor de minimax Stelling 12.2 hoeft te worden gebruikt.

e. Hier geldt $\bar{\mathbf{p}}A\bar{\mathbf{q}} = 6$. Uit onderdelen b en c (of ook Theorem 12.4) volgt dat je moet nagaan of $\bar{\mathbf{x}} := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 6)$ (deze ligt in V) en $\bar{\mathbf{y}} := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 6)$ (deze ligt in W) optimaal zijn voor resp. het primale en duale probleem. Volgens de identiteit in onderdeel d geldt zeker $\mathbf{c}\cdot\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\cdot\mathbf{y}$ voor elke $\mathbf{x} \in V$ en $\mathbf{y} \in W$ (opmerking: zoals op het college is uitgelegd, kun je deze ongelijkheid ook heel eenvoudig rechtstreeks afleiden). Omdat $\mathbf{c}\cdot\bar{\mathbf{x}} = 6 = \mathbf{b}\cdot\bar{\mathbf{y}}$ volgt nu direct dat $\mathbf{c}\cdot\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\cdot\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c}\cdot\bar{\mathbf{x}}$ voor elke $\mathbf{x} \in V$. Dus $\bar{\mathbf{x}} := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 6)$ is optimaal voor het primale probleem en net zo volgt dat $\bar{\mathbf{y}} := (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 6)$ is optimaal voor het duale probleem.

Opgave 2 [**60** pt] Zij $G = (N, S_1, \dots, S_n, u_1, \dots, u_n)$ een eindig spel. **Definitie.** Een strategiecombinatie $\bar{\sigma} \in \Pi_{i=1}^n \Delta(S_i)$ heeft *eigenschap* (*) als het volgende geldt:

Er bestaat een rij foutfuncties $\{\mu^t\}_{t=1}^{\infty}$ met $\lim_{t\to\infty} \mu_i^t(h) = 0$ voor elke i en elke $h \in S_i$ en er bestaat een rij van strategiecombinaties $\{\sigma^t\}_{t=1}^{\infty}$ in $\Pi_{i=1}^n \Delta(S_i)$ zo dat
(i) $\sigma^t \to \bar{\sigma}$ voor $t \to \infty$,
(ii) voor elke t is σ^t een Nash evenwicht voor het gebruikelijke μ^t-geperturbeerde spel $G(\mu^t)$.

a. [15 pt] Bewijs: elk volledig gemengd (= completely mixed) Nash evenwicht $\bar{\sigma}$ voor het spel G heeft eigenschap (*).

b. [25 pt] Bewijs: Als $\bar{\sigma}$ eigenschap (*) heeft, dan moet $\bar{\sigma}$ een Nash evenwicht zijn voor het oorspronkelijke spel G. *Aanwijzing:* Laat eerst zien dat voor elke volledig gemengde strategiecombinatie σ voor het spel G geldt $u_i(\bar{\sigma}) \geq u_i(\sigma)$ voor alle $i = 1, \ldots, n$.[1]

c. [20 pt] Beschouw het tweepersoons-spel met de volgende bimatrix

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0, 100 & 0, 100 \\ -10, -10 & 40, 40 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bepaal voor dit spel alle Nash evenwichten en alle trembling hand perfect Nash evenwichten (zoals gebruikelijk in gemengde strategieën, waarbij zuivere strategieën ook meetellen als – speciale – gemengde stategieën)).

Oplossing. a. Merk op: dit was huiswerkopgave 13.12. Zij $\bar{\sigma}$ een volledig gemengd NE. Dan geldt $\bar{\sigma}_i(h) > 0$ voor alle $i = 1, \ldots, n$ en alle $h \in S_i$. Dan $\alpha := \min_{i,h} \bar{\sigma}_i(h) > 0$, want het betreft hier een *eindig* minimum. Omdat $\mu_i^t(h) \to 0$ voor elke i en elke $h \in S_i$ en – alweer – omdat er hier slechts eindig veel i's en h's bij betrokken zijn, volgt dat voor t groot genoeg (zeg voor alle t met $t \geq t_0$) geldt:

$$\bar{\sigma}_i(h) \geq \alpha \geq \mu_i^t(h) \text{ voor alle } i = 1, \ldots, n \text{ en alle } h \in S_i. \tag{2}$$

Voor alle $t \geq t_0$ geldt dus $\bar{\sigma}_i \in \Delta(S_i, \mu^t)$, $i = 1, \ldots, n$, zodat de strategiebundel $\bar{\sigma}$ toegelaten is voor het bijbehorende spel $G(\mu^t)$. Omdat al gold $u_i(\bar{\sigma}) \geq u_i(\sigma_i, \bar{\sigma}_{-i})$ voor alle i en alle $\sigma_i \in \Delta(S_i)$, geldt diezelfde ongelijkheid zeker ook voor alle i en alle $\sigma_i \in \Delta(S_i, \mu^t) \subset \Delta(S_i)$. Dus geldt voor alle $t \geq t_0$ dat $\bar{\sigma} \in NE(G(\mu^t))$. Door de constante rij $\bar{\sigma}, \bar{\sigma}, \ldots$ te nemen zie je daarom dat $\bar{\sigma}$ de eigenschap (*) heeft.

b. Merk op: boven aan p. 181 staat vermeld dat dit resultaat volgt uit het vier-regelige bewijs van Thm. 13.17. Daarom vraagt deel b eigenlijk alleen naar de uitwerking van "*It is easy to verify*" in de laatste twee regels van dat bewijs. Stel dat $\bar{\sigma}$ de eigenschap (*) heeft. Dan is er een rij $\{\mu^t\}_t$ met $\lim_{t\to\infty} \mu_i^t(h) = 0$ voor elke i en elke $h \in S_i$ en er is ook een rij $\{\sigma^t\}_t$ zo dat $\sigma^t \to \bar{\sigma}$ en $\sigma^t inNE(G(\mu^t))$ voor elke t. Laat $\sigma \in \Pi_i \Delta(S_i)$ willekeurig zijn; dan moet je aantonen: $u_i(\bar{\sigma}) \geq u_i(\sigma_i, \bar{\sigma}_{-i})$ voor iedere i.

Stap 1: veronderstel eerst dat σ volledig gemengd is. Analoog aan onderdeel a heb je dan $\alpha := \min_{i,h} \sigma_i(h) > 0$ en het argument in a toont aan dat voor t groot

[1] Correctie: als aanwijzing was bedoeld $u_i(\bar{\sigma}) \geq u_i(\sigma_i, \bar{\sigma}_{-i})$ voor elke volledig gemengde strategiecombinatie σ, $i = 1, \ldots, n$. Zoals de aanwijzing afgedrukt is, is hij evident fout, want bekend is dat SAD alleen optimalisatie inhoudt over *unilaterale* afwijkingen! Bijv. matching pennies op p. 5 heeft $\bar{\sigma} = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$ als volledig gemengd NE. Volgens onderdeel a heeft $\bar{\sigma}$ dus eigenschap (*); echter, bijv. voor de volledig gemengde $\sigma := ((0.99, 0.01), (0.99, 0.01))$ geldt $u_1(\sigma) \approx 1 > 0 = u_1(\bar{\sigma})$. Dus de aanwijzing zoals afgedrukt kan gewoonweg niet waar zijn.

genoeg (zeg voor $t \geq t_1$) de strategiebundel σ toegelaten is voor het geperturbeerde spel $G(\mu^t)$; daarom geldt dus voor iedere i, $i = 1, \ldots, n$,

$$u_i(\sigma^t) \geq u(\sigma^t_{-i}, \sigma_i) \text{ voor alle } t \geq t_1.$$

In de limiet geeft dit $u_i(\bar{\sigma}) \geq u_i(\sigma_i, \bar{\sigma}_{-i})$, want de verwachte uitbetaling $u_i(\sigma)$ is continu: immers, het is een eindige somexpressie, van hetzelfde type als $\mathbf{p}^T A \mathbf{q} = \sum_{i,j} A_{i,j} p_i q_j$ dat was in het geval $n = 2$ en $i = 1$.

Stap 2: algemene geval. Voor een algemene strategiecombinatie σ construeer je volledig gemengde strategiecombinaties $\tilde{\sigma}^\epsilon$, die er maar heel weinig van verschillen. Zo'n constructie begint op kladpapier, en wel door bijv. te kijken naar $\mathbf{p} := (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0)^T$. Dan is bijv. $\tilde{\mathbf{p}} := (0.2498, 0.7498, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001)^T$ een volledig gemengde benadering van $\mathbf{p}$. Opmerking: zo'n schets werd al *volledig* goed gerekend. De wat moeizamere formele constructie verloopt analoog aan het voorbeeldje: voer in $N_i := \{h \in S_i : \sigma_i(h) = 0\}$ en $P_i := \{h \in S_i : \sigma_i(h) > 0\}$. Dan $S_i = N_i \cup P_i$, waarbij de verzameling N_i eventueel leeg kan zijn, maar P_i niet; de verhouding van hun aantallen elementen is uiteraard $r_i := |N_i|/|P_i|$. Definieer nu

$$\tilde{\sigma}^\epsilon_i(h) := \begin{cases} \sigma_i(h) + \epsilon & \text{als } h \in N_i, \\ \sigma_i(h) - \epsilon r_i & \text{als } h \in P_i. \end{cases}$$

Om ervoor te zorgen dat de uitdrukkingen in de onderste vork strikt positief blijven, kies je $\epsilon < \frac{1}{r_i} \min_{h \in P_i} \sigma_i(h)$ voor elke i, aangenomen dat N_i niet leeg is; als N_i leeg is, wordt niets vereist van ϵ, want dan heb je $r_i = 0$ en $\tilde{\sigma}^\epsilon_i = \sigma_i$. De verevening in bovenstaande formule is zo gekozen dat $\sum_{h \in S_i} \tilde{\sigma}^\epsilon_i(h) = 1$, want

$$\sum_{h \in S_i} \tilde{\sigma}^\epsilon_i(h) = \sum_{h \in N_i} \underbrace{\tilde{\sigma}^\epsilon_i(h)}_{\sigma_i(h)+\epsilon} + \sum_{h \in S_i} \underbrace{\tilde{\sigma}^\epsilon_i(h)}_{\sigma_i(h)-r_i\epsilon} = 1 + |N_i|\epsilon - |P_i| r_i \epsilon = 1,$$

dus dit is conform wat in het bovenstaande kladpapier-voorbeeld gebeurt. Conclusie: voor alle $\epsilon > 0$ met $\epsilon < \epsilon_0 := \min_i \frac{1}{r_i} \min_{h \in P_i} \sigma_i(h)$ (merk op: dit laatste "dubbele" minimum is strikt positief) is $\tilde{\sigma}^\epsilon$ een volledig gemengde strategiecombinatie met de eigenschap dat voor elke i en elke $h \in S_i$ geldt $\lim_{\epsilon \to 0} \tilde{\sigma}^\epsilon_i(h) = \sigma_i(h)$. Uit stap 1 volgt daarom dat $u_i(\bar{\sigma}) \geq u_i(\tilde{\sigma}^\epsilon_i, \bar{\sigma}_{-i})$ geldt voor elke i en elke $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$; in de limiet voor $\epsilon \to 0$ geeft dit dus de gewenste ongelijkheid $u_i(\bar{\sigma}) \geq u_i(\sigma_i, \bar{\sigma}_{-i})$.

c. Je kunt de formele methode gebruiken. Hier $S_1 = \{T, B\}$ en $S_2 = \{L, R\}$. Noem, zoals gebruikelijk, $\sigma_1 = (p, 1-p)$ en $\sigma_2 = (q, 1-q)$, dan moet voor het met de foutfunctie $\mu^t := (\mu^t_1, \mu^t_2)$ geperturbeerde spel $G(\mu^t)$ alleen gekeken worden naar $p \in [\mu^t_1(T), 1 - \mu^t_1(B)]$ en $q \in [\mu^t_2(L), 1 - \mu^t_2(R)]$ (en wel voor t groot genoeg). Uit $F_A(p, q) = -10(1-p)q + 40(1-p)(1-q) = p(50q - 40) - 50q + 40$ volgt voor de gewone beste reactie van speler 1 dat

$$\beta_1(q) = \begin{cases} \{0\} & \text{als } 0 \leq q < \frac{4}{5} \\ [0, 1] & \text{als } q = \frac{4}{5} \\ \{1\} & \text{als } \frac{4}{5} < q \leq 1 \end{cases}$$

en voor diezelfde beste reactie in het spel $G(\mu^t)$ dat

$$\beta_1^t(q) = \begin{cases} \{\mu_1^t(T)\} & \text{als } \mu_2^t(L) \leq q < \frac{4}{5} \\ [\mu_1^t(T), 1-\mu_1^t(B)] & \text{als } q = \frac{4}{5} \\ \{1-\mu_1^t(B)\} & \text{als } \frac{4}{5} < q \leq 1-\mu_2(R) \end{cases}$$

Op dezelfde manier volgt uit $F_B(p,q) = 50pq + 60p - 50q + 40 = q(50p-50) + 60p + 40$ voor speler 2 dat

$$\beta_2(p) = \begin{cases} \{0\} & \text{als } 0 \leq p < 1 \\ [0,1] & \text{als } p = 1 \end{cases}$$

en $\beta_2^t(p) = \{\mu_2^t(L)\}$ voor alle $p \in [\mu_1^t(T), 1-\mu_1^t(B)]$ (met t groot genoeg). Uit $(p,q) \in \beta_1(q) \times \beta_2(p)$ volgt dat er oneindig veel Nash evenwichten zijn, corresponderend met $p = 1$ en $\frac{4}{5} \leq q \leq 1$. Echter, uit $(p,q) \in \beta_1^t(q) \times \beta_2^t(p)$ volgen alleen $q = \mu_2^t(L)$ en $p = \mu_1^t(T)$ voor het NE. Als limiet voor $t \to \infty$ krijg je dus $(0,0)$. Het enige trillende hand perfecte Nash evenwicht is daarom $((0,1),(0,1))$, wat correspondeert met de zuivere strategie B voor speler 1 en R voor speler 2.

Opmerking: Een alternatieve oplossingsmethode is mogelijk m.b.v. Theorems 13.20 en 13.21. Echter, je moet dan wel alle NE's voor het oorspronkelijke spel bepalen (zoals ook is gevraagd) en dat gaat niet met die twee stellingen.

Opgave 3 [50 pt] Beschouw een tweepersoonsspel met $m \times n$ bimatrix (A,B). Beschouw ook het volgende optimaliseringsprobleem: maximaliseer $f(\mathbf{p},\mathbf{q},a,b) := \mathbf{p}A\mathbf{q} + \mathbf{p}B\mathbf{q} - a - b$ over alle $\mathbf{p} \in \Delta^m$, $\mathbf{q} \in \Delta^n$, $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ waarvoor $\mathbf{e}^i A\mathbf{q} \leq a$, $i = 1,\ldots,m$ en $\mathbf{p}B\mathbf{e}^j \leq b$, $j = 1,\ldots,n$. Bewijs: $(\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}},\bar{a},\bar{b})$ is een optimale oplossing van dit probleem dan en slechts dan als $(\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}})$ een Nash evenwicht is en $\bar{a} = \bar{\mathbf{p}}A\bar{\mathbf{q}}$, $\bar{b} = \bar{\mathbf{p}}B\bar{\mathbf{q}}$.

Oplossing. (N.B. dit is opgave 13.7 in het boek). Merk uit de te bewijzen equivalentie op dat de maximum-waarde van het probleem kennelijk gelijk moet zijn aan nul; dat moet dus inhouden dat $f(\mathbf{p},\mathbf{q},a,b) \leq 0$ geldt voor alle toegelaten variabelen van het probleem. Deze observatie is belangrijk als aanzet voor het bewijs.

Stap 1. De ongelijkheden voor a en b zijn equivalent met $\max_i \mathbf{e}^i A\mathbf{q} \leq a$ en $\max_j \mathbf{p}A\mathbf{e}^j \leq b$. Met de tekentruc volgt dus dat de gegeven maximalisatie vereist dat $a = \max_i \mathbf{e}^i A\mathbf{q}$ en $b = \max_j \mathbf{p}A\mathbf{e}^j$ voor elke toegelaten $(\mathbf{p},\mathbf{q},a,b)$. Daarmee is het optimaliseringprobleem teruggebracht tot het volgende hulpprobleem: maximaliseer de functie

$$F(\mathbf{p},\mathbf{q}) := \underbrace{\mathbf{p}A\mathbf{q} - \max_i \mathbf{e}^i A\mathbf{q}}_{\leq 0} + \underbrace{\mathbf{p}B\mathbf{q} - \max_j \mathbf{p}B\mathbf{e}^j}_{\leq 0} \leq 0$$

over alle $(\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \Delta^m \times \Delta^n$. In de twee termen rechts staat ≤ 0 onder de haaktekens, vanwege door de bekende gelijkheden $\max_i \mathbf{e}^i A\mathbf{q} = \max_{\mathbf{p}} \mathbf{p}A\mathbf{q}$ en $\max_j \mathbf{p}A\mathbf{e}^j = \max_{\mathbf{q}} \mathbf{p}B\mathbf{q}$.

Stap 2. Uit de existentiestelling van Nash (Thm. 13.1) volgt dat er minstens één Nash evenwicht $(\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}})$ voor het spel bestaat. Voor elk zo'n NE volgt direct $F(\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{q}}) = 0$ in bovenstaande uitdrukking. De optimale waarde van het hulpprobleem is dus 0. Gevolg: omgekeerd volgt uit de uitdrukkingen ≤ 0 onder de haaktekens voor elke $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) \in \Delta^m \times \Delta^n$ de volgende equivalentie:

$$(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) \text{ is optimaal } \Leftrightarrow F(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}) \text{ is NE.}$$

waarbij optimaliteit voor het *hulpprobleem* is bedoeld. Gezien wat in stap 1 is afgeleid voor de optimale keuzes van a en b voor het oorspronkelijke maximaliseringsprobleem volgt het gevraagde nu.