Over polaire kegels, stelsels lineaire ongelijkheden en hun toepassingen in de financiering*

Erik J. Balder, Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

1 Polaire kegels

Ik geef een stukje lineaire algebra dat uitmondt in de bi-polaire Stelling 1.4.

Definitie 1.1 Een **lineaire deelruimte** van $\mathbb{R}^n$ is een niet-lege verzameling $L \subset \mathbb{R}^n$ waarvoor geldt:

$$\forall_{x,x' \in L} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}\ \alpha x + \beta x' \in L.$$

Definitie 1.2 Een vector x in $\mathbb{R}^n$ **staat loodrecht** (ook wel **orthogonaal**) op een deelruimte L (notatie: $x \perp L$) als $x \cdot y = 0$ voor alle vectoren $y \in L$.

Definitie 1.3 Zij L een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$. Het **orthogonale complement** (oftewel **orthoplement**) van L is de verzameling $L^\perp$, gedefinieerd door

$$L^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp L\}.$$

Merk op dat $L^\perp$ een linaire deelruimte is; deze bestaat dus uit al die vectoren x die loodrecht staan op L.[1] Daarom kan het **bi-orthoplement** $L^{\perp\perp}$ van L door herhaling van definitie worden ingevoerd:

$$L^{\perp\perp} := (L^\perp)^\perp.$$

Stelling 1.1 *Voor elke lineaire deelruimte L van $\mathbb{R}^n$ geldt:*

$$L^{\perp\perp} = L.$$

In woorden samengevat zegt deze stelling: als een vector x loodrecht staat op alle vectoren die loodrecht staan op L, dan moet gelden $x \in L$ (en omgekeerd).

Voorbeeld 1.2 Het volgende simpele voorbeeld illustreert Stelling 1.1. Zij L in $\mathbb{R}^4$ de lineaire deelruimte opgespannen door de twee vectoren $(2,0,0,0)^t$ en $(0,0,0,1)^t$. Dan is $L^\perp$ per definitie de verzameling van alle $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4$ zo dat $x_1 = x_4 = 0$. Daarom is $L^{\perp\perp}$ de verzameling van alle $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ zo dat $y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 + y_4 x_4 = 0$ voor alle x die voldoen aan $x_1 = x_4 = 0$. Dit is equivalent met: $y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0$ voor alle $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, d.w.z. met $y_2 = y_3 = 0$. Conclusie: in dit voorbeeld is $L^{\perp\perp}$ inderdaad gelijk aan L.

*Samenvatting kaleidoscoopvoordracht Utrecht 20-2-07

[1] Qua dimensie gedraagt $L^\perp$ zich complementair: er blijkt n.l. te gelden dimensie $L^\perp = n -$ dimensie L.

Definitie 1.4 Een **convexe kegel** van $\mathbb{R}^n$ is een niet-lege verzameling $K \subset \mathbb{R}^n$ waarvoor geldt:

$$\forall_{x,x' \in K} \forall_{\alpha,\beta \geq 0}\, \alpha x + \beta x' \in K.$$

Voorbeelden van convexe kegels in $\mathbb{R}^n$ zijn: (1) het niet-positieve orthant $\mathbb{R}^n_-$ in $\mathbb{R}^n$, (2) de verzameling $\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \leq x_n\}$ (geef zelf een bewijs), (3) elke lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

Definitie 1.5 Een vector x in $\mathbb{R}^n$ **staat stomp** op een convexe kegel K (notatie: $x \wedge K$) als $x \cdot y \leq 0$ voor alle $y \in K$.

Net als Definitie 1.2 komt deze definitie natuurlijk voort uit het feit dat de cosinus van de hoek ϕ tussen x en y gegeven wordt door de bekende formule $\cos\phi := \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$.

Definitie 1.6 Zij K een convexe kegel in $\mathbb{R}^n$. Het **polaire (of stompe) complement** van K (kortweg: de **polaire** van K) is de verzameling $K^\wedge$ gedefinieerd door

$$K^\wedge := \{x \in \mathbb{R}^n : x \wedge K\}.$$

De verzameling $K^\wedge$ is dus niets anders dan de verzameling van al die x in $\mathbb{R}^n$ die met *alle* vectoren y uit K een stompe hoek maken. Je ziet gemakkelijk dat $K^\wedge$ weer een convexe kegel is. Daarom kan ook het **bi-polaire complement** $K^{\wedge\wedge}$ van K door herhaling van definitie worden ingevoerd:

$$K^{\wedge\wedge} := (K^\wedge)^\wedge.$$

Voorbeeld 1.3 Voor $n = 2$ zij $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2, x_1 \geq 0\}$. Dan $K^\wedge = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq \min(-x_1, 0)\}$. Dus $K^\wedge$ bestaat uit de vereniging van het negatieve quadrant $\mathbb{R}^2_-$ en de verzameling $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq -x_1, x_1 \geq 0\}$.

Stelling 1.4 (bi-polaire stelling) *Voor elke gesloten convexe kegel K van $\mathbb{R}^n$ geldt:*

$$K^{\wedge\wedge} = K.$$

In woorden samengevat zegt deze stelling: als een vector x stompe hoeken maakt met alle vectoren die stompe hoeken maken met K, dan moet gelden $x \in K$ (en omgekeerd). Niet alleen lijkt deze stelling dus op Stelling 1.1, maar hij generaliseert hem zelfs. Dat blijkt uit de volgende eenvoudige propositie:

Propositie 1.5 *Elke lineaire deelruimte L van $\mathbb{R}^n$ is tevens een convexe kegel van $\mathbb{R}^n$ en er geldt $L^\perp = L^\wedge$.*

2 Lineaire ongelijkheden

Ik pas de bi-polaire Stelling 1.4 toe om de stelling van Farkas, een stelling die gaat over de oplosbaarheid van stelsels lineaire ongelijkheden, te verkrijgen.

Zij A een $m \times n$-matrix en zij $b \in \mathbb{R}^m$. De getransponeerde matrix van A zullen we noteren met A^t. Vaak is men geinteresseerd in de vraag of het stelsel vergelijkingen $Ax = b$ een oplossing $x \in \mathbb{R}^n$ heeft. Maar een iets subtielere vraag is of het stelsel $Ax = b$ een oplossing x in het niet-negatieve orthant $\mathbb{R}^n_+$ heeft.[2] De volgende stelling zegt hier iets over:

[2] Hoewel dit stelsel tamelijk speciaal lijkt, is het dat niet! Met eenvoudige trucs kun je namelijk algemene stelsels ongelijkheden herschrijven in bovenstaande gedaante; zie ook Voorbeeld 2.3.

Stelling 2.1 (alternatievenstelling) *Van de volgende uitspraken is er altijd precies één waar:*

1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n_+} Ax = b$,

2. $\exists_{y \in \mathbb{R}^m} A^t y \leq 0$ *en* $b \cdot y > 0$.

Met andere woorden: 1. en 2. vormen elkaar wederzijds uitsluitende alternatieven.

Merk hier op dat $A^t y \leq 0$ betekent dat voor alle $i = 1, \ldots, n$ de i-de component van de vector $A^t y$ hoogstens 0 is. Het bewijs van deze stelling volgt met eenvoudige logica-regels direct uit het volgende resultaat.

Stelling 2.2 (Farkas) *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n_+} Ax = b$,

2. $\forall_{y \in \mathbb{R}^m} A^t y \leq 0 \Rightarrow b \cdot y \leq 0$.

Bewijs. 1. $\Rightarrow$ 2: Stel 1. is waar. Voor elke $y \in \mathbb{R}^m$ geldt dan $b \cdot y = b^t y = x^t A^t y = x \cdot A^t y$. Dus als $A^t y \leq 0$ dan is de rechter uitdrukking niet-negatief, want $x \geq 0$. Conclusie: $b \cdot y \leq 0$.

2. $\Rightarrow$ 1: Zij $K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n_+\}$; dit is een convexe kegel. Merk op dat 1. equivalent is met $b \in K$. Het is dus genoeg om dit laatste te bewijzen. Nu zegt 2. eigenlijk: $\forall_{y \in \mathbb{R}^m} y \wedge K \Rightarrow b \cdot y \leq 0$. Dat wil zeggen: $\forall_{y \in K^\wedge} b \cdot y \leq 0$. Met andere woorden: $b \in K^{\wedge\wedge}$. Gevolg: $b \in K$ wegens Stelling 1.4. QED

Er zijn diverse alternatieve vormen van de alternatievenstelling bekend, zoals de alternatievenstelling van Gordan in het nu volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2.3 Van de volgende twee uitspraken is er altijd precies één waar:

1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n_+, x \neq 0} Ax = 0$.

2. $\exists_{y \in \mathbb{R}^m} A^t y < 0$,

Hierboven betekent $A^t y < 0$ dat *alle* componenten van $A^t y$ strikt negatief zijn. Om dit uit Stelling 2.1 af te leiden moeten we bedenken dat $A^t y < 0$ equivalent is met

$$\exists_{\epsilon > 0} A^t y + \epsilon a \leq 0.$$

Hier $a := (1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$. Schrijf z in plaats van $(y^t, \epsilon)^t$. Dan is 2. hierboven equivalent met

$$\exists_{z \in \mathbb{R}^{n+1}} B^t z \leq 0 \text{ en } z_{m+1} = e^{m+1} \cdot z > 0. \tag{1}$$

Hier is B de $(m+1) \times n$-matrix die ontstaat door aan A nog de vector $a^t = (1, 1, \ldots, 1)$ als $m+1$-ste rij toe te voegen, en e^{m+1} is de $m+1$-ste eenheidsvector $(0, 0, \ldots, 0, 1)^t$ in $\mathbb{R}^{m+1}$. Maar (1) is precies als 2. in Stelling 2.1. Volgens die stelling is het complementaire alternatief daarvan: 1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n_+} Bx = e^{m+1}$, hetgeen equivalent is met $\exists_{x \in \mathbb{R}^n_+, x \neq 0} Ax = 0$ (ga na).

3 Intermezzo stochastiek

Ik introduceer basisbegrippen stochastiek voor eindige ruimten van elementaire uitkomsten.

Definitie 3.1 Een **stochast (of toevalsgrootheid)** is een reëelwaardige functie $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Hier is Ω de **verzameling van elementaire uitkomsten**, d.w.z., de verzameling waarmee alle uitkomsten van X kunnen worden weergegeven. Men zegt dat stochast X **eindig veel waarden heeft** als de verzameling Ω eindig gekozen kan worden.

Merk op dat elke stochast X op een eindige verzameling Ω van elementaire uitkomsten altijd als *vector* beschouwd mag worden. Als $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ zet je n.l. $X_i := X(\omega_i)$. Zo krijg je dan de vector $(X_1, \ldots, X_k)^t$, opgebouwd uit alle waarden die X kan aannemen.

Voorbeeld 3.1 Zij X het totale aantal ogen dat je krijgt bij tweemaal gooien van een dobbelsteen. De verzameling Ω van elementaire uitkomsten bestaat hier uit 36 elementen, n.l. de paren (1,1), (1,2), (1,3), ..., (6,5), (6,6). De waarden van X op deze verzameling worden natuurlijk gegeven door de formule $X(i, j) := i + j$. De bijbehorende vector van alle waarden die X kan aannemen is $(2, 3, 4, \ldots, 11, 12)$.

Definitie 3.2 Een **kansmaat** op een eindige verzameling $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ is een vector $P = (P_1, \ldots, P_k)^t$ met $P_i \geq 0$ voor $i = 1, \ldots, k$ en $\sum_{i=1}^k P_i = 1$. Het getal P_i is de kans op de elementaire uitkomst ω_i. Een eindige stochast X op deze Ω heet **absoluut zeker positief** als $X(\omega_i) > 0$ voor alle $i = 1, \ldots, k$. De **verwachting** van een eindige stochast X op deze Ω wordt gegeven door

$$E_P(X) := \sum_{i=1}^{k} X(\omega_i) P_i = \sum_{i=1}^{k} X_i P_i = X \cdot P.$$

Voorbeeld 3.2 In Voorbeeld 3.1 was $\Omega := \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$ de verzameling van alle 36 elementaire uitkomsten. De standaard kansmaat op deze verzameling is P gegeven door $P_i = 1/36$ (deze modelleert “eerlijke dobbelstenen en eerlijk werpen”). De verwachting van de som van de ogen bij twee keer werpen is dan:

$$E_P(X) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} (i + j) = 7.$$

4 Toepassingen in de financiering: het prijzen van derivaten

Ik geef basisbegrippen financiering in een 1-periode model en ik bewijs een variant van de geen-arbitrage stelling met behulp van de stelling van Farkas. Met behulp van de daaruit verkregen prijsmaat bepaal ik de rationele prijs van een repliceerbare stochast.

Stel er zijn N aandelenfondsen; we nummeren ze van 1 t.e.m. N. Een **investeringsportefeuille** is een vector $H := (H_0, H_1, \ldots, H_N)^t \in \mathbb{R}^{N+1}$. Interpretatie: zo’n H geeft aan dat je H_n aandelen van fonds n hebt, $n = 1, \ldots, N$, en dat je daarnaast nog H_0 euro’s op je bankrekening hebt staan. Let op! Als $H_n < 0$ dan betekent dat *schuldig* *zijn*. Bijvoorbeeld $H_2 = -5$ betekent dat je vijf aandelen van fonds 2 hebt geleend, oftewel: je bezit -5 aandelen ervan.[3] Voor $n = 0$ betekent $H_0 < 0$ natuurlijk dat je geld hebt geleend: $H_0 = -3$ betekent dat je 3 Euro "rood staat" bij de bank. We bekijken de portefeuille op twee tijdstippen, n.l. $t = 0$ ("nu") en $t = 1$ ("morgen").[4] Zij $S_n(j)$ de prijs van 1 aandeel in fonds $n \geq 1$ op tijdstip $t = j$. Van $S_0(0), S_1(0), \ldots, S_N(0)$, de prijzen op $t = 0$ ("nu"), nemen we aan dat ze allemaal bekend zijn, met $S_0(0) = 1$. Zulke prijzen kunnen we "nu" immers in de krant lezen. We nemen ook aan dat $S_0(1) = 1 + r$ de "prijs" is van 1 euro op $t = 1$ ("morgen"). Hier is $r > 0$ de rentevoet. We nemen aan dat de prijzen $S_1(1), \ldots, S_N(1)$ van de aandelenfondsen op het tijdstip $t = 1$ ("morgen") *onbekend* zijn. Preciezer gezegd: deze prijzen zijn stochasten. Zij $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ een verzameling van elementaire uitkomsten. Zij $P = (P_1, \ldots, P_k)$ een kansmaat op Ω. De prijzen op $t = 1$ ("morgen") $S_1(1), \ldots, S_N(1)$ zijn dus stochasten. Dit wil zeggen dat als elementaire uitkomst ω_i gebeurt, dan heeft aandeel n morgen een prijs van $S_n(1)(\omega_i)$ Euro. Op $t = 0$ is de waarde van de aandelenportefeuille $H := (H_0, H_1, \ldots, H_N)^t$ gelijk aan

$$V^H(0) := H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)$$

en dit bedrag is bekend (niet-toevallig). Op $t = 1$ is de waarde van diezelfde portefeuille gelijk aan

$$V^H(1) := H_0(1 + r) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1),$$

maar dit laatste bedrag is toevalsafhankelijk. Anders gezegd: $V^H(1)$ is een stochast.

Definitie 4.1 Een portefeuille H heet **dominant** als $V^H(0) = 0$ en als $V^H(1)$ absoluut zeker positief is.

Een dominante portefeuille H vereist "nu" ($t = 0$) dus beginkapitaal 0 en keert met absolute zekerheid "morgen" ($t = 1$) een positief bedrag uit. Omdat αH dan ook dominant voor elke $\alpha > 0$, volgt door α voldoende groot te kiezen dat men bij gebruik van αH gratis steenrijk kan worden! Maar dat zou tot een volledige ontsporing van de financiële markten leiden.[5] De volgende economische aanname lijkt dus redelijk:

rationeel opererende financiële markten kennen geen dominante strategiën.

Definitie 4.2 Een **lineaire prijsmaat** is een kansmaat $\pi := (\pi_1, \ldots, \pi_k)^t$ op Ω zo dat

$$\forall_{\text{portefeuille } H}\; V^H(0) = E_\pi (1 + r)^{-1} V^H(1)$$

of, wat hetzelfde is, zo dat

$$\forall_{1 \leq n \leq N}\; S_n(0) = E_\pi (1 + r)^{-1} S_n(1).$$

[3] Bij aandelen is dat slim als je verwacht dat de prijs ervan zal gaan *dalen*: de 5 aandelen van fonds 2 die je nu leent, maak je meteen te gelde. Later koop je dan weer 5 aandelen van dat fonds in (tegen een hopelijk lagere prijs), om je schuld te voldoen.

[4] Let op: de keuze van de echte periode tussen $t = 0$ en $t = 1$ is nogal arbitrair: "morgen" mag ook best betekenen: "over precies 1 jaar" of "over precies 1 maand", enz.

[5] Wat er in werkelijkheid zou gebeuren is natuurlijk dat de hevige vraag naar $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N)^t$, via prijsaanpassingen, zou worden gedempt (vraag-en-aanbod-evenwicht): als $H_n > 0$ dan zou aandeel n in prijs omhoogschieten, en als $H_n < 0$ dan zou de prijs van zo'n aandeel, dat de leners ervan immers meteen willen verkopen (zie voetnoot 3), sterk gaan dalen.

Voorbeeld 4.1 Stel $N = 1$ en stel $r = 0.10$, met $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Stel dat aandeel 1 op $t = 0$ ("nu") 2 Euro waard is: $S_1(0) = 2$, en dat het op $t = 1$ ("morgen") in prijs daalt naar 1 Euro als elementaire uitkomst ω_1 plaatsvindt, maar in prijs stijgt naar 3 Euro als elementaire uitkomst ω_2 plaatsvindt. Dus $S_1(1)(\omega_1) = 1$ en $S_1(1)(\omega_2) = 3$. In deze eenvoudige situatie volgt de lineaire prijsmaat $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ uit $S_1(0) = E_\pi(1+r)^{-1}S_1(1)$, dat wil zeggen uit $2 = \pi_1 \frac{10}{11} 1 + \pi_2 \frac{10}{11} 3$, én uit het feit dat π een kansmaat moet zijn, d.w.z. $\pi_1 + \pi_2 = 1$ (naast $\pi_1, \pi_2 \geq 0$). Oplossen van deze twee vergelijkingen met twee onbekenden geeft: $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (4/10, 6/10)$.

Stelling 4.2 *De volgende uitspraken zijn equivalent:*
(1) Er bestaat een lineaire prijsmaat.
(2) Er bestaat geen dominante strategie.

We zagen al dat (2) gewoonlijk vervuld is in een goed werkende financiële markt. Volgens de stelling moet dus ook (1) gelden. Gewoonlijk zal er daarom minstens één lineaire prijsmaat op de markt bestaan en vanaf nu zullen we daar vanuit gaan.

Bewijs. Schrijf $S_i^*(1)(\omega_j) := (1+r)^{-1}S_i(1)(\omega_j)$. Zij A de $N+1 \times k$ matrix gegeven door

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ S_1^*(1)(\omega_1) & \dots & S_1^*(1)(\omega_k) \\ \vdots & & \vdots \\ S_N^*(1)(\omega_1) & \dots & S_N^*(1)(\omega_k) \end{pmatrix}$$

Zij b de vector gegeven door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ S_1(0) \\ \vdots \\ S_N(0) \end{pmatrix}$$

Dan

$$(1) \Leftrightarrow \exists_{\pi \in \mathbb{R}_+^k} \, A\pi = b.$$

Merk hier op dat de vergelijking in de eerste component ervoor zorgt dat $\pi \in \mathbb{R}^k$ een kansmaat is (d.w.z. $\sum_k \pi_k = 1$). Volgens de Stelling van Farkas (Stelling 2.2) geldt dus

$$(1) \Leftrightarrow [\forall_{\text{portefeuille } H} \, A^t H \leq 0 \Rightarrow b \cdot H \leq 0] \Leftrightarrow [\forall_{\text{portefeuille } H} \, A^t H \geq 0 \Rightarrow b \cdot H \geq 0].$$

Hier volgt de tweede equivalentie door eenvoudige wisseling van teken. Volgens eenvoudige propositionele logica geldt

$$[\forall_{\text{portefeuille } H} A^t H \geq 0 \Rightarrow b \cdot H \geq 0] \Leftrightarrow [\forall_{\text{portefeuille } H, A^t H \geq 0} b \cdot H \geq 0 \Leftrightarrow \neg[\exists_{H, A^t H \geq 0} b \cdot H < 0]$$

De conclusie is dus dat

$$(1) \Leftrightarrow \neg\exists_{H,(1+r)^{-1}V_1^H(\omega_i) \geq 0, i=1,\dots,k} \, V^H(0) < 0.$$

en door H iets aan te passen is het gemakkelijk in te zien dat het rechterlid equivalent is met

$$\neg\exists_{H,(1+r)^{-1}V_1^H(\omega_i) > 0, i=1,\dots,k} \, V^H(0) = 0,$$

en dus met (2). Q.E.D.

Definitie 4.3 Een stochast X heet **repliceerbaar** als er een portefeuille H bestaat met $X = V^H(1)$.

Van repliceerbare stochasten, die een stochastische uitbetaling "morgen" (op $t = 1$) modelleren (denk aan opties e.d.), is de prijs "nu" (op $t = 0$) gemakkelijk vast te stellen:

> *Stel $X = V^H(1)$. Dan is de verwachting $E_\pi(1+r)^{-1}X$ een rationele prijs ervoor op $t = 0$. Hier is π een lineaire prijsmaat.*

Bovenstaande prijsbepaling blijkt niet afhankelijk van welke lineaire prijsmaat men kiest. Hij volgt door te redeneren volgens hetzelfde patroon dat eerder leidde tot de conclusie dat rationeel opererende financiële markten geen dominante strategiën kennen. Als namelijk zou gelden $p < E_\pi(1+r)^{-1}X$ (voor de omgekeerde ongelijkheid geldt eenzelfde redenering, die aan de lezer wordt overgelaten), dan zou ook gelden $p < E_\pi(1+r)^{-1}V_H(1) = V^H(0)$, omdat X gerepliceerd wordt door H en omdat π een lineaire prijsmaat is. Op $t = 0$ zou het dus goedkoper zijn om een claim X te kopen dan om de portefeuille H aan te schaffen, terwijl X en H wel tot dezelfde (stochastische) waarde op $t = 1$ leiden. Dit zou dan leiden tot de volgende "droomstrategie": kies op $t = 0$ de portefeuille $-H$ (let op het minteken!) en koop de claim X. Op $t = 0$ incasseer je dan $V^H(0) - p > 0$, want H kost $V^H(0)$ op $t = 0$, dus $-H$ geeft je op $t = 0$ precies $V^H(0)$ Euro in handen. Op $t = 1$ kun je, ongeacht de elementaire uitkomst, je schuld $-V^H(1)$ precies voldoen met je gekochte claim X, want $-V^H(1)(\omega_i) + X(\omega_i) = 0$ voor alle i. Maar de winst uit deze "droomstrategie" zou je vervolgens kunnen vermenigvuldigen door op $t = 0$ ("nu") α maal $-H$ en α maal X te kopen, met $\alpha > 0$ en willekeurig groot. Zo iedere persoon, gratis en zonder enig risico, steenrijk kunnen worden, hetgeen tot een volledige ontsporing van de financiële markten zou leiden. Conclusie: $p < V^H(0)$ kan niet, en $p > V^H(0)$ kan evenmin (beredeneer dit zelf). Het is bijzonder opmerkelijk dat de oorspronkelijke kansmaat P op Ω vrijwel geen enkele rol heeft gespeeld in deze afleiding!

Voorbeeld 4.3 Beschouw in Voorbeeld 4.1 een stochast X, die op $t = 1$ ("morgen") de volgende uitbetalingen garandeert: als elementaire uitkomst ω_1 optreedt, dan krijg je $X(\omega_1) = 10$ Euro, en als ω_2 optreedt, dan krijg je $X(\omega_2) = 5$ Euro. Wat is op $t = 0$ ("nu") een rationele prijs p voor deze zogenaamde *claim* X? Merk eerst op dat X repliceerbaar is, omdat

$$(10, 5)^t = H_0(\frac{11}{10}, \frac{11}{10})^t + H_1(1, 3)^t$$

geldt voor $H_0 = 125/11$ en $H_1 = -5/2$. Volgens bovenstaande is de rationele prijs p dus gelijk aan

$$\pi_1 \frac{10}{11} 10 + \pi_2 \frac{10}{11} 5 = \frac{70}{11} \text{ Euro,}$$

wegens $\pi_1 = 4/10$ en $\pi_2 = 6/10$ uit Voorbeeld 4.1.

5 Financiële wiskunde en de arbeidsmarkt

Door de komst van steeds meer verfijnde financiële instrumenten enerzijds, en de behoefte aan rationele risico-inschattingen vanuit maatschappij en politiek anderzijds (pensioensproblematiek, accoord van Basel, enz.), is de behoefte bij banken, verzekeringsmaatschappijen, enz. aan kwantitatief-financieel geschoolde deskundigen de afgelopen vijftien jaar explosief gestegen. Om als wiskundige later als kwantitatief-financieel analyst te kunnen werken, is kennis van meerdere van de volgende vakken erg nuttig: kansrekening (WISB 261), maattheorie (WISB 312), stochastische processen (WISB 362), stochastische analyse, optimalisering (WISB 372), partiële differentiaalvergelijkingen (WISM 437, WISM 456), tijdreeksen (WISM 459), simulatie. In Utrecht kun je als kennismaking met financiële wiskunde het college Investeringstheorie (WISB 373) volgen.[6] Op Master-niveau wordt, in samenwerking met UvA en VU, een specialisatie Financiële Wiskunde verzorgd binnen het programma Stochastics and Financial Mathematics (SFM).

6 Opgave

Opgave 1 Bewijs met behulp van de alternatievenstelling: van de volgende uitspraken is er altijd precies één waar:

1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n}\, Ax = b$,
2. $\exists_{y \in \mathbb{R}^m}\, A^t y = 0$ en $b \cdot y = 1$.

Aanwijzing: Elke vector $x \in \mathbb{R}^n$ kan (niet-eenduidig) worden ontbonden als $x = x' - x''$ met $x', x'' \in \mathbb{R}^n_+$. Hier $Ax = C \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix}$, met C de $m \times 2n$-matrix $C := (A; -A)$.

Opgave 2 Beschouw het model uit sectie 4 met $N = 1$. Zij $r = 1/9$, $S_1(0) = 16/3$ en zij $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Als ω_1 gebeurt, dan heeft aandeel 1 de prijs $S_1(1)(\omega_1) = 80/9$ op $t = 1$ en als ω_2 gebeurt, dan is diezelfde prijs $S_1(1)(\omega_2) = 40/9$.
a. Laat zien: de unieke lineaire prijsmaat is hier $\pi = (1/3, 2/3)^t$.
b. Een *call-optie* op aandeel 1 is een stochast $X = \max(S_1 - u, 0)$. Hier is u de zogenaamde uitoefenprijs. Stel dat $u = 6$ als uitoefenprijs wordt gekozen. Wat is dan een rationele prijs voor X op $t = 0$? *Aanwijzing:* Je moet uiteraard eerst aantonen dat X repliceerbaar is.

[6] N.B.: Dit vereist geen voorkennis Economie, maar wel enige voorkennis WISB 261 (Kansrekening).