Over polaire kegels, etc.

1 Polaire kegels:

Def. Verzameling $L \subset \mathbb{R}^n$ is **lineaire deelruimte van** $\mathbb{R}^n$**:** als $L \neq \emptyset$ en

$$\forall_{x,x' \in L} \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}\, \alpha x + \beta x' \in L.$$

Van nu af: L is deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

Def. Vector x in $\mathbb{R}^n$ **staat loodrecht** op L als

$$x \cdot y = 0 \text{ voor alle } y \in L.$$

Notatie: $x \perp L$.

Def. Het **orthogonale complement** (oftewel **orthoplement**) van L is

$$L^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp L\}.$$

Opm. $L^\perp$ is zelf ook linaire deelruimte. Dus kun je definiëren

$$L^{\perp\perp} := (L^\perp)^\perp.$$

Naam: **bi-orthoplement** van L

St. 1.1 *Voor elke lineaire deelruimte L geldt:*

$$L^{\perp\perp} = L.$$

Bewijs vergt kennis van **projecties**.

Vb. (nagaan of stelling klopt). Zij L in $\mathbb{R}^4$ lineair opspansel van $(2,0,0,0)^t$ en $(0,0,0,1)^t$. Dan

$$L^{\perp} = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_4 = 0\}.$$

Dus per definitie is $L^{\perp\perp}$ gelijk aan

$$\{y \in \mathbb{R}^4 : \forall_{x, x_1 = x_4 = 0}\, y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + y_4x_4 = 0\}.$$

Voorschrift equivalent met: $\forall_{x_2,x_3}\, y_2x_2 + y_3x_3 = 0$, dus met $y_2 = y_3 = 0$. Conclusie: $L^{\perp\perp} = L$.

Def. Convexe kegel is $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$, met

$$\forall_{x,x' \in K} \forall_{\alpha,\beta \geq 0}\, \alpha x + \beta x' \in K.$$

Van nu af: K is convexe kegel in $\mathbb{R}^n$.

Voorbeelden:

i. $\mathbb{R}^n_-$ en $\mathbb{R}^n_+$,

ii. $\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \leq x_n\}$,

iii. elke lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

Def. Vector $x \in \mathbb{R}^n$ **staat stomp** op K als

$$\forall_{y \in K}\, x \cdot y \leq 0.$$

Notatie: $x \wedge K$.

Verklaring naam: voor hoek ϕ tussen x en y geldt
$$\cos\phi := \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}.$$

Def. Het **polaire complement** van K is
$$K^\wedge := \{x \in \mathbb{R}^n : x \wedge K\}.$$

Opm. $K^\wedge$ is zelf ook convexe kegel. Dus kun je definiëren
$$K^{\wedge\wedge} := (K^\wedge)^\wedge.$$

Naam: **bi-polaire complement** van K

Vb. Zij $K := \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2, x_1 \geq 0\}$. Dan $K^\wedge = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq \min(-x_1, 0)\}$.

St. 1.2 (bi-polaire stelling) *Voor elke gesloten convexe kegel K van $\mathbb{R}^n$ geldt:*
$$K^{\wedge\wedge} = K.$$

Bewijs: bv. met convexe optimaliseringstheorie of st. van Hahn-Banach. Deze stelling generaliseert Stelling 1.1. Dat volgt uit

Prop. 1.3 *Elke lineaire deelruimte L is convexe kegel en $L^\perp = L^\wedge$.*

2 Lineaire ongelijkheden

A: $m \times n$-matrix,

A^t: getransponeerde van A,

b: vector in $\mathbb{R}^m$.

Vraag: Wanneer heeft $Ax = b$ oplossing x in $\mathbb{R}^n_+$?

Let op! Oplossing gezocht in $\mathbb{R}^n_+$, niet in $\mathbb{R}^n$!

St. 2.1 (alternatievenstelling) *Van de volgende uitspraken is altijd precies één waar:*
1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n_+}\ Ax = b$,
2. $\exists_{y \in \mathbb{R}^m}\ A^t y \le 0$ *en* $b \cdot y > 0$.

Gebruikte notatie:

$A^t y \le 0 \Leftrightarrow$ alle componenten van $A^t y$ zijn niet-positief.

Bewijs alternatievenstelling volgt direct uit

St. 2.2 (Farkas) *Equivalent zijn:*
1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n_+}\ Ax = b$,
2. $\forall_{y \in \mathbb{R}^m}\ A^t y \le 0 \Rightarrow b \cdot y \le 0$.

Bewijs. $1 \Rightarrow 2$: Omdat 1 waar is, geldt

$$b \cdot y = b^t y = x^t A^t y = x \cdot A^t y.$$

Dus $b \cdot y \le 0$ voor elke y met $A^t y \le 0$ (wegens $x \ge 0$).

$2 \Rightarrow 1$: $K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n_+\}$ is convexe kegel.
Merk op: $1 \Leftrightarrow b \in K$. Dus te bewijzen is $b \in K$.
Nu zegt 2:

$$\forall_{y \in \mathbb{R}^m}\, y \wedge K \Rightarrow b \cdot y \leq 0.$$

D.w.z. $\forall_{y \in K^\wedge}\, b \cdot y \leq 0$. Dus

$$2 \Leftrightarrow b \in K^{\wedge\wedge}.$$

Gevolg: $b \in K$ wegens Stelling 1.2. QED

Diverse versies van alternatievenstelling, zoals

St. (Gordan) Van de volgende twee uitspraken is altijd precies één waar:
1. $\exists_{x \in \mathbb{R}^n_+, x \neq 0}\, Ax = 0$.
2. $\exists_{y \in \mathbb{R}^m}\, A^t y < 0$,

Notatie hier:

$A^t y < 0 \Leftrightarrow$ alle componenten van $A^t y$ strikt negatief.

Bewijs uit Stelling 2.1: zie uitgedeeld stukje.

3 Intermezzo stochastiek

Def. Een **stochast** is reeëlwaardige functie $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Hier is Ω de **verzameling van alle elementaire uitkomsten.**

Van nu af: Ω is **eindige** verzameling, en wel

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}.$$

Opm. Stochasten zijn gewoon *vectoren* in $\mathbb{R}^k$ (en vice versa). Want

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ is eigenlijk } (X_1, \ldots, X_k)^t,$$

met $X_i := X(\omega_i)$ voor $i = 1, \ldots, k$.

Vb. (tweemaal gooien met dobbelsteen).

Zij X het totale aantal ogen.

Dan $X(i,j) := i + j$ met

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,5), (6,6)\}.$$

Dat geeft voor X de vector

$$X = (2, 3, 4, \ldots, 11, 12)^t.$$

Def. Een **kansmaat** op Ω is vector $P = (P_1, \ldots, P_k)^t$ met

$$\forall_i P_i > 0 \text{ en } \sum_{i=1}^{k} P_i = 1.$$

Hier P_i: kans op elementaire uitkomst ω_i.

Def. Stochast X heet **absoluut zeker positief** als $X(\omega_i) > 0$ voor alle $i = 1, \ldots, k$.

Def. De **verwachting** van stochast X is

$$E_P(X) := \sum_{i=1}^{k} X(\omega_i) P_i = \sum_{i=1}^{k} X_i P_i = X \cdot P.$$

Vb. (voortzetting) Als dobbelstenen "eerlijk":

$$P = (\frac{1}{36}, \frac{1}{36}, \ldots, \frac{1}{36})^t.$$

Dan is verwachting van totale aantal ogen

$$E_P(X) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} (i + j) = 7.$$

4 Toepassing: prijzen van derivaten

$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$: verz. elementaire uitkomsten

N aandelenfondsen: nummers $n = 1$ t.e.m. $n = N$.

bankfonds: nummer $n = 0$ (1 aandeel = 1 Euro op spaarrekening).

Def. Een **investeringsportefeuille** is vector $H := (H_0, H_1, \ldots, H_N)^t \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Interpretatie: H geeft aan dat je H_n aandelen van fonds n hebt, $n = 0, \ldots, N$.

Let op! Als $H_n < 0$: dan ben je H_n aandelen van fonds n *schuldig*.

1-periode model: $t = 0$ begintijdstip en $t = 1$ eindtijdstip.

$S_n(j)$: prijs van 1 aandeel in fonds $n \geq 0$ op tijdstip $t = j$.

Op $t = 0$: $S_1(0), \ldots, S_N(0)$ zijn **bekend**.

Op $t = 1$: $S_1(1), \ldots, S_N(1)$ zijn **onbekend**, dus stochasten.

$S_n(1)(\omega_i)$: de prijs van 1 aandeel in fonds n op $t = 1$ als elementaire uitkomst ω_i gebeurt.

Apart $n = 0$: $S_0(0) = 1$ en $S_0(1) = 1 + \text{r(ente)}$ zijn **bekend**.

Waarde van portefeuille $H := (H_0, H_1, \ldots, H_N)^t$ op $t = j$: $V^H(j)$.

Als $t = 0$ dan

$$V^H(0) := H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) \text{ is } \textbf{bekend}.$$

Als $t = 1$ dan

$$V^H(1) := H_0(1 + r) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) \text{ is } \textbf{stochast}.$$

Def. Portefeuille H heet **dominant** als
i. $V^H(0) = 0$ (dus aanschaf gratis!),
ii. $V^H(1)$ is absoluut zeker positief (dus "altijd prijs"!).

Financieel-economisch uitgangspunt:

Rationele financiële markten kennen geen dominante strategiën.

Def. Een **lineaire prijsmaat** is een kansmaat $\pi := (\pi_1, \ldots, \pi_k)^t$ op Ω met

$$\forall_{\text{portefeuille } H}\, V^H(0) = E_\pi \frac{V^H(1)}{1 + r},$$

m.a.w. met

$$\forall_{1\leq n\leq N}\, S_n(0) = E_\pi \frac{S_n(1)}{1+r}.$$

Vb. Stel $N = 1$, $r = 0.10$, met $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Stel voor $n = 1$:

Op $t = 0$ kost 1 aandeel 2 Euro.

Op $t = 1$ kost 1 aandeel 1 Euro als ω_1 plaatsvindt.

Op $t = 1$ kost 1 aandeel 3 Euro als ω_2 plaatsvindt.

Dan volgt lineaire prijsmaat $\pi = (\pi_1, \pi_2)^t$ uit $S_1(0) = E_\pi \frac{S_1(1)}{1+r}$, d.w.z.

$$2 = \pi_1 \frac{10}{11} 1 + \pi_2 \frac{10}{11} 3$$

en uit $\pi_1 + \pi_2 = 1$ (met $\pi_1, \pi_2 \geq 0$). Oplossen geeft: $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (4/10, 6/10)$.

St. 4.1 *De volgende uitspraken zijn equivalent:*
(1) Er bestaat een lineaire prijsmaat.
(2) Er bestaat geen dominante strategie.

Bewijs. Schrijf $S_i^*(1)(\omega_j) := (1+r)^{-1} S_i(1)(\omega_j)$. Zij A de $N+1 \times k$ matrix gegeven door

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ S_1^*(1)(\omega_1) & \dots & S_1^*(1)(\omega_k) \\ \vdots & & \vdots \\ S_N^*(1)(\omega_1) & \dots & S_N^*(1)(\omega_k) \end{pmatrix}$$

Zij b de vector gegeven door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ S_1(0) \\ \vdots \\ S_N(0) \end{pmatrix}$$

Dan

$$(1) \Leftrightarrow \exists_{\pi \in \mathbb{R}^k_+} \, A\pi = b.$$

Eerste rij van A garandeert: π is kansmaat. Volgens Stelling 2.2 (Farkas) geldt

$$\begin{aligned} (1) \;&\Leftrightarrow\; [\forall_{\text{portefeuille } H} \, A^t H \leq 0 \Rightarrow b \cdot H \leq 0] \\ &\Leftrightarrow\; [\forall_{\text{portefeuille } H} \, A^t H \geq 0 \Rightarrow b \cdot H \geq 0]. \end{aligned}$$

Dus logica geeft

$$\begin{aligned} (1) \;&\Leftrightarrow\; [\forall_{\text{portefeuille } H, A^t H \geq 0} \, b \cdot H \geq 0] \\ &\Leftrightarrow\; \neg[\exists_{H, A^t H \geq 0} \, b \cdot H < 0]. \end{aligned}$$

Conclusie is dus

$$(1) \Leftrightarrow \neg \exists_{H, (1+r)^{-1} V_1^H(\omega_i) \geq 0, i=1,\ldots,k} \, V^H(0) < 0.$$

en door H iets aan te passen is RL equivalent met

$$\neg \exists_{H, (1+r)^{-1} V_1^H(\omega_i) > 0, i=1,\ldots,k} \, V^H(0) = 0,$$

en dus met (2). QED

Gevolg: Financiëel-economisch uitgangspunt zegt: (2) is waar. Conclusie: ook (1) is waar. Dus er zal gewoonlijk een lineaire prijsmaat bestaan. Deze gaan we nu gebruiken om *prijzen van derivaten* te bepalen.

Def. Stochast X heet **repliceerbaar** als er een portefeuille H bestaat met $X = V^H(1)$.

Stochast X modelleert een stochastische uitbetaling op $t = 1$. Denk aan derivaten zoals opties e.d.

Het **geen dominantie prijsprincipe** is alsvolgt:

> *Stel X repliceerbaar. Dan is op $t = 0$ de verwachting $E_\pi \frac{X}{1+r}$ een rationele prijs ervoor. Hier is π een lineaire prijsmaat.*

Opm. Bovenstaande prijs blijkt niet afhankelijk van welke lineaire prijsmaat π men precies kiest.

Opm. De oorspronkelijke kansmaat P op Ω speelt vrijwel geen enkele rol in deze formule!

Afleiding geen dominantie prijsprincipe:

Noem die rationele prijs p en stel je had $p < E_\pi \frac{X}{1+r}$.

Er is een H met $X = V_1^H$, wegens repliceerbaarheid.

Gevolg: $p < E_\pi \frac{V_H(1)}{1+r} = V^H(0)$.

Koop nu op $t = 0$ de portefeuille $-H$ (minteken!) en koop ook X.

Netto opbrengst: $V^H(0) - p > 0$, want aankoop $-H$ kost $-V^H(0)$ – en brengt dus $V^H(0)$ op – en aankoop X kost p. Dus je verdient eraan!

Op $t = 1$ heffen X en $-H$ elkaar op, want $X = V^H(1)$. Dus geen "naheffing".

Nu heb je **gratis** en risicoloos een positief bedrag verdiend! Herhaal deze truc dan in het triljoen-voudige. Dat kan natuurlijk niet echt: p zal stijgen vanwege grote vraag naar X.

Conclusie: $p < V^H(0)$ kan niet. Net zo: $p > V^H(0)$ kan niet. Volgt: $p = V^H(0)$.

Vb. (vervolgd). Stel bezit van derivaat X garandeert op $t = 1$ de volgende uitbetalingen:

Als ω_1 gebeurt, dan krijgt eigenaar $X(\omega_1) = 10$ Euro.

Als ω_2 optreedt, dan krijgt eigenaar $X(\omega_2) = 5$ Euro.

Wat is op $t = 0$ een rationele prijs p voor dit derivaat?

Merk op: X is repliceerbaar is, want $X = V^H(1)$ zegt

$$(10,5)^t = H_0(\frac{11}{10}, \frac{11}{10})^t + H_1(1,3)^t,$$

en dat geldt met $H_0 = 125/11$ en $H_1 = -5/2$. Volgens bovenstaande is de rationele prijs p dus gelijk aan

$$p = \pi_1 \frac{10}{11} 10 + \pi_2 \frac{10}{11} 5 = \frac{70}{11} \text{ Euro},$$

wegens $\pi_1 = 4/10$ en $\pi_2 = 6/10$ uit eerdere voorbeeld.

Opm. Algemene prijstheorie véél gecompliceerder, want

Geen eindige ruimten Ω.

Meer perioden $t = 0, 1, \ldots, T$.

Advies: Houd financiële wiskunde in het oog vanwege de volgende niet-alledaagse combinatie:

- gebruik geavanceerde moderne wiskunde (maattheorie, PDV's, functionaalanalyse, stochastiek, ...),
- uitstekende beroepsmogelijkheden (banken, verzekeringsmaatschappijen).