Opgaven Functies en Reeksen

E.P. van den Ban

Geheel herzien, Najaar 2020

1 Rijen en reeksen van functies

Opgave 1.1 Voor $k \geq 1$ beschouwen we de functie $f_k : x \mapsto \sin(x/k)$. Toon aan dat $f_k \to 0$ uniform op $[-R, R]$ voor iedere $R > 0$. $\oslash$

Opgave 1.2 Zij V een verzameling. Een functie $f : V \to \mathbb{C}$ heet begrensd indien er een $M > 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in V$. Zij $B(V, \mathbb{C})$ de lineaire ruimte van begrensde functies $f : V \to \mathbb{C}$.

Voor $f \in B(V, \mathbb{C})$ definiëren we

$$\|f\|_V = \sup_{x \in V} |f(x)| = \sup\{|f(x)| \mid x \in V\}.$$

Dit getal heet ook wel de sup-norm van de functie f op V.

(a) Toon aan dat door $\| \cdot \|_V$ inderdaad een norm op $B(V, \mathbb{C})$ gedefinieerd wordt.

Als gevolg hiervan wordt door $d_V(f, g) := \|f - g\|_V$ een afstand op V gedefinieerd.

(b) Toon aan dat voor een rij $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $B(V, \mathbb{C})$ en een functie $f \in B(V, \mathbb{C})$ geldt dat de volgende uitspraken gelijkwaardig zijn:

- De rij f_k convergeert op V uniform naar f.
- In de metrische ruimte $(B(V, \mathbb{C}), d)$ geldt $\lim_{k \to \infty} f_k = f$.

(c) Veronderstel nu dat $V \subset \mathbb{R}^n$, en zij $C_b(V, \mathbb{C})$ de ruimte van begrensde continue functies $f : V \to \mathbb{C}$. Toon aan dat $C_b(V, \mathbb{C})$ een gesloten deelverzameling van $B(V, \mathbb{C})$ is.

$\oslash$

Opgave 1.3 Het doel van deze opgave is de volgende verscherping van Gevolg 3.13 te bewijzen. Zij $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval, en $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ een rij Riemann-integreerbare functies $I \to \mathbb{R}$. Veronderstel dat de rij f_k op I uniform convergeert naar een functie $f : I \to \mathbb{R}$. Dan is f Riemann-integreerbaar en

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Bewijs:

(a) Per definitie van Riemann-integreerbaarheid geldt dat iedere functie f_k begrensd is. Toon aan dat f begrensd is.

(b) Zij $V = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ een verdeling van I. Toon aan dat voor de bovensommen van f en f_k ten aanzien van V geldt dat

$$|\overline{S}(f, V) - \overline{S}(f_k, V)| \leq \|f - f_k\|_I (b - a).$$

(c) Geef een soortgelijke schatting voor de ondersommen.

(d) Toon aan dat bij iedere $\epsilon > 0$ een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor elke verdeling V van $[a, b]$ geldt dat:

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) \leq \overline{S}(f_k, V) - \underline{S}(f_k, V) + \frac{\epsilon}{2}.$$

(e) Toon aan dat f Riemann-integreerbaar op $[a, b]$ is.

$\oslash$

Opgave 1.4 Zij $I = [a, \infty[$, met $a \in \mathbb{R}$. Zij $g : I \to \mathbb{R}$ een niet-negatieve oneigenlijk Riemann-integreerbare functie en zij voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een lokaal Riemann-integreerbare functie $f_k : I \to \mathbb{R}$ gegeven met $|f_k| \leq g$ op I. Veronderstel tenslotte dat $f : I \to \mathbb{R}$ een functie is zodat $f_k \to f$ uniform op ieder deelinterval $[a, \beta] \subset I$.

(a) Toon aan dat de functie f lokaal Riemann integreerbaar op I is. Hint: gebruik de vorige opgave.

(b) Toon aan dat $|f| \leq g$. Waarom mag u nu concluderen dat f oneigenlijk Riemann-integreerbaar op I is?

(c) Toon aan dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een element $\beta_0 \in I$ bestaat zo dat

$$0 \leq \int_{\beta_0}^{\infty} g(t)\, dt < \epsilon/4$$

(d) Toon aan dat voor alle $\beta \in [\beta_0, \infty[$ geldt dat

$$\left| \int_{\beta}^{\infty} f(t)\, dt \right| < \epsilon/4, \quad \text{en} \left| \int_{\beta}^{\infty} f_k(t)\, dt \right| < \epsilon/4, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

(e) Toon aan dat

$$\int_a^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{k \to \infty} \int_a^{\infty} f_k(t)\, dt.$$

$\oslash$

Opgave 1.5 Zij I een begrensd interval in $\mathbb{R}$ en zij f_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, een rij van continu differentieerbare complexwaardige functies op I.

(a) Neem aan dat de rij van afgeleiden ${f_n}'$ uniform convergeert naar de functie g en dat er een $a \in I$ en $c \in \mathbb{C}$ is, waarvoor $f_n(a)$ naar c convergeert als $n \to \infty$. Bewijs dat er een continu differentieerbare functie f op I is, waarvoor f_n uniform naar f convergeert als $n \to \infty$ en verder $f' = g$, $f(a) = c$.

Hint: gebruik de hoofdstelling van de integraalrekening en schrijf, voor iedere $x \in I$,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(y)\, dy$$

en bewijs dat dit voor $n \to \infty$ convergeert naar $c + \int_a^x g(y)\, dy$.

(b) Neem aan dat de reeks van functies $\sum_{k \geq 1} {f_k}'$ uniform convergent is en dat de reeks van getallen $\sum_{k \geq 1} f_k(a)$ convergeert. Bewijs dat de reeks van functies $\sum_{k \geq 1} f_k$ uniform convergeert, dat de som een continu differentieerbare functie is en dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_k(x), \quad x \in I.$$

Men noemt dit de *regel van differentiatie onder het somteken*.

$\oslash$

Opgave 1.6 Definieer de rij van functies $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, door

$$f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_k f_k(x)$ convergent is en bereken de som $s(x)$. Behandel hierbij het geval dat $x = 0$ apart. Is $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu? Bewijs dat de reeks $\sum_k f_k(x)$ niet uniform convergent is op $\mathbb{R}$.

(b) Zij $\delta > 0$. Bewijs dat de reeks $\sum_k f_k(x)$ uniform convergent is op $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \delta\}$.

$\oslash$

Opgave 1.7 We beschouwen een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in een metrische ruimte (V, d). Onder een **limietpunt** van de rij verstaan we een punt $a \in V$ met de eigenschap dat voor iedere $\varepsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $a_n \in B(a;\varepsilon)$. Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn, voor elke $a \in V$.

(a) Er bestaat een deelrij $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

(b) Het punt a is een limietpunt van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

We beperken ons vanaf nu tot $V = \mathbb{R}$ en nemen aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ begrensd is. We definiëren een nieuwe rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door

$$b_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

(c) Bespreek waarom dit een correcte definitie is.

(d) Toon aan dat de rij (b_n) monotoon dalend is.

(e) Toon aan dat de rij (b_n) convergent is.

De limiet van de rij (b_n) wordt ook wel genoteerd met

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

In het vervolg schrijven we $\lambda := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(f) Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat er voor elke $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $b_n - \varepsilon < \lambda \leq b_n$. Toon aan dat hierbij een $k \geq n$ bestaat zo dat $b_n - \varepsilon < a_k \leq b_n$.

(g) Toon aan dat λ een limietpunt is van de rij (a_n).

(h) Zij μ een limietpunt van de rij (a_n). Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $b_N < \lambda + \frac{1}{2}\varepsilon$. Toon aan dat hierbij een $k \geq N$ bestaat zo dat $\mu < a_k + \frac{1}{2}\varepsilon$. Toon aan dat $\mu \leq \lambda + \varepsilon$. Bewijs dat $\mu \leq \lambda$.

Zij L de verzameling limietpunten van de rij (a_n).

(i) Toon aan dat $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \max L$.

(j) Definieer en bespreek een vergelijkbare limiet $\liminf_{n\to\infty} a_n$. Merk in het bijzonder op dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min L.$$

$\oslash$

Opgave 1.8

(a) Toon aan dat door

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sin kx$$

een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

(b) Toon aan dat door

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{x^{2k}+1}$$

een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

$\oslash$

Opgave 1.9 Beschouw de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ in $\mathbb{R}$ met $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$.

(a) Bewijs dat de reeks convergent is.

(b) Bewijs dat de reeks niet absoluut convergent is.

(c) Construeer een bijectie $k \mapsto n(k)$ van $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ op zichzelf, zo dat de reeks

$$\sum_{k\geq 1} a_{n(k)}$$

convergent is met som 0.

$\oslash$

Opgave 1.10 Definieer de functie $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f_k(x) = (\sin x)^k$ en beschouw de reeks

$$\sum_{k\geq 0} f_k \qquad (*)$$

(a) Bepaal de verzameling S van punten $x \in \mathbb{R}$ waarin de reeks (*) puntsgewijs convergent is. Bepaal de bijbehorende somfunctie $g : S \to \mathbb{R}$.

(b) Op welke in S gelegen intervallen $I \subset \mathbb{R}$ convergeert (*) uniform met som g?

$\oslash$

Opgave 1.11 Gegeven zijn twee rijen $(f_k)_{k\geq 0}$ en $(g_k)_{k\geq 0}$ van functies $[0,1] \to \mathbb{R}$. Gegeven is verder dat $|f_k(x)| \leq g_k(x)$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ en $x \in [0,1]$.

Toon aan: als $\sum_{k\geq 0} g_k$ uniform convergent is op $[0,1]$, dan is ook $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent op $[0,1]$. $\oslash$

2 Machtreeksen en complex differentieerbare functies

Opgave 2.1 Definieer $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ als $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en $f(0) = 1$. Bewijs dat f rond 0 ontwikkelbaar is in een machtreeks (in machten van z). Bepaal de convergentiestraal van die machtreeks. $\oslash$

Opgave 2.2 Zij $c \in \mathbb{R}$ en zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1 + c\,x^2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zij $c \neq 1$. Bepaal, voor iedere $a \in \mathbb{R}$, de convergentiestraal van de Taylor-reeks van f in het punt a. Wat gebeurt er voor $c = 1$ met de convergentiestraal? $\oslash$

Opgave 2.3

(a) Bewijs dat, als $z \neq 1$ en $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k + \frac{z^n}{1 - z}.$$

Substitueer $z = -y^2$, integreer over y van 0 tot x en bewijs dat

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k + 1}\, x^{2k+1} + (-1)^n\, R_n(x),$$

waarin

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{y^{2n}}{1 + y^2}\, dy.$$

(b) Bewijs dat de machtreeks

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k + 1}\, x^{2k+1} \quad (*)$$

niet absoluut uniform convergent is op $[0, 1]$. Hint: bewijs dat deze uitspraak equivalent is met de uitspraak dat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = \infty$. Waarom is dit laatste waar?

(c) Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ en $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt dat

$$\frac{1}{1 + x^2}\, \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} \leq R_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}.$$

Bewijs dat de machtreeks $(*)$ uniform convergent is op $[0, 1]$. Wat is de convergentiestraal? Wat is de som?

(d) Bewijs dat

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k + 1} + (-1)^n\, r_n, \quad \text{met} \quad \frac{1}{2}\, \frac{1}{2n + 1} \leq r_n \leq \frac{1}{2n + 1}.$$

Bewijs dat $r_n \to 0$, ofwel $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \to \pi/4$ als $n \to \infty$. Daarbij laat de eerste ongelijkheid echter zien dat de convergentie uitermate langzaam is: als je een benadering met 6 nauwkeurige decimalen wilt hebben, dan moet je al zo'n half miljoen termen sommeren. Voor iedere extra nauwkeurige decimaal zijn 10 maal zoveel termen nodig.

Een stuk sneller gaat de benadering van $\pi/2^m$ met behulp van de partiële sommen van (*), als we $x = a_m = \tan(\pi/2^m)$ nemen met m een geheel getal dat groter is dan 2; de benadering gaat des te sneller naarmate m groter is. Hierbij kunnen de a_m inductief bepaald worden door $a_2 = 1$ en door a_{m+1} te bepalen als de positieve oplossing x van de vergelijking $a_m\, x^2 + 2x - a_m = 0$. Deze x kan zeer snel met zeer grote nauwkeurigheid bepaald worden met behulp van Newton's benaderingsprocedure.

$\oslash$

Opgave 2.4 Het eerste onderdeel dient als voorbereiding voor de rest van de opgave.

(a) Zij $x > 0$. Toon aan dat $\lim_{k\to\infty} x^{1/k} = 1$. Hint: schrijf x als een e-macht.

We beschouwen nu een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van positieve reële getallen zo dat

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = S,$$

Hierbij is $S \in [0, \infty]$. We veronderstellen eerst dat $S < \infty$.

(b) Zij $\epsilon > 0$. Toon dat er een N bestaat zo dat $n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq S + \epsilon$.

(c) Toon aan dat voor alle $k \geq N$ geldt dat

$$a_k \leq a_N (S + \epsilon)^{k-N}$$

(d) Toon aan dat $\limsup_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \leq S + \epsilon$. Concludeer dat geldt

$$\limsup_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \leq S.$$

Dit geldt uiteraard ook als $S = \infty$.

(e) Toon aan dat

$$\limsup_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Op soortgelijke wijze kan men een ongelijkheid voor liminf bewijzen. Dit leidt tot de volgende schattingen:

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \liminf_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

(f) Bewijs het volgende. Laat $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ een complexe machtreeks zijn met $c_k \neq 0$ voor alle $k \geq 0$. Veronderstel dat

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = L.$$

Dan is de convergentiestraal van de machtreeks gelijk aan $1/L$. (Laat zien dat deze uitspraak ook een natuurlijke en correcte interpretatie heeft in het geval dat $L = 0$ of $L = \infty$).

$\oslash$

Opgave 2.5 Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

(a) $\sum_{k\geq 0} k^2 z^k$

(b) $\sum_{k\geq 0}(-1)^k k(k-i)z^k$

(c) $\sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k^3}$

(d) $\sum_{k\geq 0} \frac{(z-i)^k}{k!}$

(e) $\sum_{k\geq 0} \frac{k! z^k}{2}$

(f) $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ (pas hier op: $a_k = 0$ voor k oneven).

$\oslash$

Opgave 2.6 Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

(a) $\sum n! z^n$;

(b) $\sum \frac{n!}{(2n)!} z^n$;

(c) $\sum \frac{3^n z^n}{n!}$;

(d) $\sum \frac{n^n z^n}{n!}$.

$\oslash$

Opgave 2.7 Het *convergentiecriterium van Dirichlet* zegt het volgende. Zij a_n, $n \geq 1$, een monotoon niet-stijgende rij van reële getallen die naar 0 convergeert als $n \to \infty$. Zij b_n, $n \geq 1$, een rij van complexwaardige functies op een verzameling V waarvan de partiële sommen uniform begrensd zijn, in de zin dat er een positieve constante M is met de eigenschap dat voor iedere $p \geq 0$ en iedere $z \in V$ geldt dat

$$\left| \sum_{n=1}^{p} b_n(z) \right| \leq M.$$

Dan is er een functie f op V waarvoor

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{p} a_n\, b_n(z) = f(z), \quad \text{uniform voor} \quad z \in V.$$

(a) Om dit te bewijzen, schrijf $s_p(z) = \sum_{n=1}^{p} a_n\, b_n(z)$ en $B_p(z) = \sum_{n=1}^{p} b_n(z)$. Bewijs met volledige inductie over q dat voor iedere $q > p \geq 1$ geldt dat

$$s_q(z) - s_p(z) = \sum_{n=p+1}^{q} (a_n - a_{n+1})\; B_n(z) - a_{p+1}\, B_p(z) + a_{q+1}\, B_q(z).$$

(Deze truc wordt ook wel *partiële sommatie*, of *Abel-sommatie* genoemd.) Gebruik nu dat $a_n - a_{n+1} \geq 0$ en $a_n \geq 0$ om aan te tonen dat

$$|s_q(z) - s_p(z)| \leq \sum_{n=p+1}^{q} (a_n - a_{n+1})\; M + a_{p+1}\, M + a_{q+1}\, M = 2a_{p+1}\, M.$$

Toon hiermee aan dat de functies $s_p(z)$ een uniforme Cauchy-rij vormen en maak het bewijs van Dirichlet's convergentiecriterium af.

(b) Als toepassing nemen we nu $b_n(z) = z^n$, en voor $V = V_\delta$ de verzameling der complexe getallen z, waarvoor $|z| \le 1$ en $|1 - z| > \delta$, waarbij δ een strikt positief reëel getal is. Bewijs dat als a_n een rij van positieve reële getallen is die monotoon naar nul convergeert, dan is voor iedere $\delta > 0$ de machtreeks $\sum_{n \ge 1} a_n\, z^n$ uniform convergent op V_δ. (Deze conclusie geldt natuurlijk ook als we een willekeurige constante term a_0 aan de reeks toevoegen.)

Zij V_0 de verzameling der $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \le 1$ en $z \ne 1$. Bewijs dat het voorgaande impliceert dat voor iedere $z \in V_0$ de machtreeks $\sum_{n \ge 1} a_n\, z^n$ convergeert en dat de functie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n$$

continu is op V_0.

(c) Neem nu $a_n = 1/n$ in b). Bewijs dat in dit geval de machtreeks niet absoluut convergeert als $|z| = 1$, hoewel zij wel voor iedere $\delta > 0$ uniform convergeert op V_δ.

Bewijs dat als $|z| < 1$, dan is f complex differentieerbaar in z, terwijl $f'(z) = 1/(1 - z)$ en $f(0) = 0$. Bewijs hiermee dat $f(z) = -\log(1 - z)$ als $|z| < 1$, waarbij we de standaardkeuze voor de hoekfunctie gebruiken. Gebruik tenslotte de continuïteit van f op V_0 om aan te tonen dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, z^n = \log \frac{1}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| \le 1,\ z \ne 1.$$

Bewijs dat de reeks divergeert als $|z| > 1$ en ook als $z = 1$.

⊘

Opgave 2.8 Bepaal alle complexe z waarvoor de volgende reeksen convergent zijn:

(a) $\sum \frac{z^n}{\log n}$;

(b) $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$;

(c) $\sum \frac{z^n}{n^3}$.

⊘

Opgave 2.9 Bepaal alle complexe z waarvoor de volgende reeksen convergent zijn, en bepaal de som voor die z (neem $n \ge 1$):

(a) $\sum (-1)^n z^{2n}$;

(b) $\sum (-1)^n n^2 z^n$;

(c) $\sum \frac{n+1}{n} z^n$;

(d) $\sum \frac{n^2}{n+1} z^n$.

⊘

Opgave 2.10 Toon aan dat als $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ partieel differentieerbaar zijn en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen, dan voldoet ook de productfunctie $h = fg$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. ⊘

Opgave 2.11 Gegeven is een open deel $U \subset \mathbb{C}$, een punt $a \in U$ en een functie $f : U \to \mathbb{C}$ die complex differentieerbaar is in a.

(a) Toon aan dat

$$Df(a) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

voor zekere $u, v \in \mathbb{R}$.

(b) Toon aan dat $|f'(a)| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

(c) Toon aan dat $Df(a)$ het produkt is van een scalarvermenigvuldiging en een rotatie.

In het bijzonder is $Df(a)$ hoekbehoudend. De afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heet daarom wel *conform* in a. ⊘

Opgave 2.12 De functies $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$f(x,y) = \left(x^2y - \frac{1}{3}y^3, \frac{1}{3}x^3 - xy^2 \right), \quad \text{en} \quad g = f \circ f.$$

(a) Ga na dat f (totaal) differentieerbaar is en bereken de afgeleide $Df(x,y)$.

(b) Controleer of de functies $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$F(x+iy) := f_1(x,y) + if_2(x,y), \qquad G(x+iy) := g_1(x,y) + ig_2(x,y)$$

complex differentieerbaar zijn. ⊘

Opgave 2.13 De functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \\ 4y^2 \end{pmatrix}, \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

en

$$g(u,v,w) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u+v-w \\ u-v \end{pmatrix}, \qquad ((u,v,w) \in \mathbb{R}^3).$$

(a) Bereken de Jacobi-matrix van f en toon aan dat f (totaal) differentieerbaar is.

(b) Bereken de Jacobi-matrix van g en toon aan dat g (totaal) differentieerbaar is. Wat valt op?

(c) De compositie $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieert op de gebruikelijke manier een complexe functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dus

$$h(x+iy) = g_1(f(x,y)) + ig_2(f(x,y)), \qquad (x+iy \in \mathbb{C}).$$

In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is de functie h complex differentieerbaar?

⊘

Opgave 2.14 De reeksen $\sum \frac{z^n}{n!}$ en $\sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ hebben convergentiestraal $R = \infty$. We definiëren

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Bewijs dat

$$f'(z) = f(z),$$
$$g''(z) + g(z) = 0.$$

$\oslash$

Opgave 2.15

(a) Bepaal de convergentiestralen van de machtreeksen in (2.9), (2.10), (2.11) en (2.12) in het dictaat.

(b) Differentieer de machtreeksen in (2.9), (2.10), (2.11) en (2.12) in het dictaat termsgewijs en identificeer de daardoor gegeven functies.

(c) Bepaal de machtreeks voor $(1-z)^{-2}$ in $z = 0$. Wat is de convergentiestraal?

(d) Zij $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Bepaal de machtreeks voor $(1-z)^{-1-m}$ in $z = 0$.

$\oslash$

Opgave 2.16 Gegeven is dat de machtreeks

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

convergeert op de schijf $D(a; r)$, waarbij $a \in \mathbb{C}$ en $r > 0$.

(a) Toon aan dat er een complex differentieerbare functie $F : D(a; r) \to \mathbb{C}$ bestaat zo dat $F' = f$; dus F is een primitieve van f op $D(a; r)$. Toon aan dat F gegeven wordt door een machtreeks, en bepaal die machtreeks.

(b) Bewijs dat alle primitieven van f op $D(a; r)$ worden gegeven door $F + C$ met C een complexe constante functie.

(c) Toon aan dat F uniek bepaald is door de voorwaarde $F(a) = 0$.

$\oslash$

Opgave 2.17 Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en veronderstel dat $f : U \to \mathbb{C}$ en $g : U \to \mathbb{C}$ complex analytisch zijn. Zij verder $a \in U$ en z_j een rij in U met $z_j \neq a$ voor iedere j en $z_j \to a$ als $j \to \infty$. Neem tenslotte aan dat voor iedere j geldt dat $f(z_j) = g(z_j)$. Bewijs dat voor iedere $z \in U$ geldt dat $f(z) = g(z)$.

Hint: schrijf $h(z) = f(z) - g(z)$. Bewijs met volledige inductie over l dat voor iedere $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat $h^{(l)}(a) = 0$. Maak daarbij gebruik van de Taylor-ontwikkeling van $h(z)$ rond het punt a, en deel door een geschikte macht van $(z - a)$. $\oslash$

Opgave 2.18 Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$, die symmetrisch is ten aanzien van de spiegeling om de reële as, dat wil zeggen, als $z \in U$ dan is $\overline{z} \in U$. Zij verder $a \in U \cap \mathbb{R}$ en zij $f : U \to \mathbb{C}$ complex analytisch. Bewijs dat de volgende uitspraken a) – c) equivalent zijn.

(a) Als $x \in U \cap \mathbb{R}$ dan is $f(x) \in \mathbb{R}$.

(b) Voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$.

(c) Voor iedere $z \in U$ geldt dat $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Hint voor b) $\Rightarrow$ c): bewijs eerst dat de functie g, gedefinieerd door

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in U,$$

complex analytisch is in U. $\oslash$

Opgave 2.19

(a) We beschouwen een machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ die convergent is op de open schijf $D(0;r)$ voor een $r > 0$, en definiëren de functie $f : D(0;r) \to \mathbb{C}$ door

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n.$$

Veronderstel dat $f(x) \in \mathbb{R}$ voor alle $x \in D(0;r) \cap \mathbb{R}$. Toon aan dat $c_n \in \mathbb{R}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Toon aan dat voor alle $z \in D(0;r)$ geldt dat

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}).$$

(c) Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|e^{it}| = 1.$$

Opmerking: het is niet de bedoeling dat u gebruik maakt van de bekende eigenschappen van $\sin$ en $\cos$.

(d) Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

$\oslash$

Opgave 2.20 We willen een C^1-kromme $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiëren met startpunt 1, en zo dat $\gamma(t)$ de eenheidscirkel $|z| = 1$ eenparig met snelheid 1 doorloopt

In formules vertaald betekent dit dat γ differentieerbaar moet zijn, γ' continu, en dat

1. $\gamma(0) = 1$,
2. $|\gamma(t)| = 1$,
3. $|\gamma'(t)| = 1$,

voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(a) Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$. Hierin stelt $\langle \cdot\, , \,\cdot \rangle$ het Euclidische inproduct op $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ voor.

(b) Toon aan dat ofwel $\gamma'(t) = i\gamma(t)$ ofwel $\gamma'(t) = -i\gamma(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

In het vervolg eisen we bovendien dat $\gamma(t)$ op $t = 0$ de snelheidsvector $i = (0,1)$ heeft, dus $\gamma'(0) = i$.

(c) Toon aan dat in dit geval geldt: $\gamma'(t) = i\gamma(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(d) Toon aan dat er een unieke C^1-kromme $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bestaat met de eigenschappen 1,2,3 en $\operatorname{Im} \gamma'(0) > 0$.

(e) Toon aan dat er een uniek paar differentieerbare functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bestaat met $f' = g$, $g' = -f$ en $f(0) = 1$, $g(0) = 0$.

We zien dus dat $\cos$ en $\sin$ als unieke oplossingen van een specifiek stelsel differentiaalvergelijkingen met beginwaarden geïntroduceerd kunnen worden. $\oslash$

Opgave 2.21

(a) Toon aan dat de machtreeks $\sum_{n\geq 1} n^{-1}z^n$ convergentiestraal 1 heeft.

Op de eenheidsschijf $D = D(0;1)$ definiëren we de functie f door

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

(b) Toon aan dat f complex differentieerbaar is op D met afgeleide

$$f'(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (z \in D).$$

(c) Toon aan dat $e^{-f(z)} = 1 - z$ voor alle $z \in D$.

(d) Toon aan dat er een complex differentieerbare functie $L : D(1;1) \to \mathbb{C}$ bestaat met $L(1) = 0$ en

$$e^{L(z)} = z, \qquad (z \in D(1;1)).$$

Hierna zullen we $\log z$ schrijven voor $L(z)$. In het vervolg mag u de bekende eigenschappen van sinus en cosinus gebruiken.

(e) Toon aan dat voor alle $z \in D(1;1)$ geldt dat

$$\log z = \log|z| + i\arg(z),$$

met $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$.

$\oslash$

Opgave 2.22 (Eulers formule) Bewijs dat

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

door gebruik te maken van de context van Opmerking 2.48 in het dictaat. $\oslash$

Opgave 2.23 (Dictaat, Opmerking 2.49)

(a) Bewijs dat $2\sqrt{2} < \pi$.

(b) Bewijs dat $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en leid hieruit af dat $\pi < 4$.

$\oslash$

Opgave 2.24 (Dictaat, Opmerking 2.53) Toon aan dat voor ieder tak van de logarithme geldt dat

$$\frac{d}{dw} \log w = \frac{1}{w}.$$

$\oslash$

Opgave 2.25 (Dictaat, Opmerking 2.54) Zij $\mu \in \mathbb{C}$. Toon aan dat een tak van de machtsfunctie $z \mapsto z^\mu$ complex differentieerbaar is op zijn definitiegebied en dat

$$\frac{d}{dz} z^\mu = \mu z^{\mu-1}.$$

$\oslash$

Opgave 2.26 Zij $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ een machtreeks met convergentiestraal $\rho > 0$. Toon aan dat voor alle $-\rho < a < b < \rho$ geldt:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k b^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k a^{k+1}}{k+1}.$$

$\oslash$

Opgave 2.27 Definieer de reëelwaardige functie f op $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$ door middel van

$$f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

Hierbij heet een reeks functies van de vorm $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k$ (puntsgewijs of uniform) convergent indien beide reeksen $\sum_{k\geq 0} g_k$ en $\sum_{k\geq 1} g_{-k}$ (puntsgewijs, resp. uniform) convergent zijn. Bovendien noteren we

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_{-k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

(a) Ga na dat voor iedere $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ de reeks uniform convergeert op $[\epsilon, 1-\epsilon]$. Concludeer dat f continu is op $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(b) Bewijs met Taylor-ontwikkeling van de functie $x \mapsto \sin(\pi x)$ in het punt 0 dat

$$\lim_{x\to 0,\, x\neq 0} f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ en iedere $l \in \mathbb{Z}$ geldt dat $f(x+l) = f(x)$. Bewijs dat f kan worden voortgezet tot een functie, die we ook f noemen, die continu is op $\mathbb{R}$. Concludeer dat de aldus gedefinieerde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue periodieke functie is, en dat f bijgevolg begrensd op $\mathbb{R}$ is.

(c) Toon aan dat

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=4f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Bewijs hiermee dat voor iedere $x\in\mathbb{R}$ geldt dat $|f(x)|\le\frac{1}{4}\sup|f|+\frac{1}{4}\sup|f|$, en daarmee dat $\sup|f|\le\frac{1}{2}\sup|f|$. Concludeer dat $f\equiv 0$ op $\mathbb{R}$, m.a.w., voor iedere $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ geldt dat

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-k)^2}.$$

Bewijs dat $f(0)=0$, resp. $f(1/2)=0$ leiden tot

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad\text{resp.}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

(d) Bewijs dat voor iedere gehele $n\ge 1$ geldt dat

$$\pi\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\tan(\pi\,x)=n!\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}-x\right)^{n+1}}.$$

(e) De *zèta-functie van Riemann* is gedefinieerd door

$$\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad\mathrm{Re}\,s>1.$$

Bewijs dat

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^s}+2^{-s}\,\zeta(s).$$

Bewijs dat voor iedere $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat

$$\pi^{2m}\,\tan^{(2m-1)}(0)=(2m-1)!\,2^{2m}\,\left(1-2^{-2m}\right)\,2\,\zeta(2m).$$

Door $\tan^{(n)}$ voor $n=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,\ldots$ achtereenvolgens te bepalen, kan $\zeta(2m)$ voor $m=1,\,2,\,3,\,\ldots$ achtereenvolgens bepaald worden. Bereken $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$.

$\oslash$

3 De stelling van Cauchy

Opgave 3.1 Bereken de volgende lijnintegralen:

(a) $\int_\gamma \cos z \, dz$ met $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ een injectieve C^1 parametrisering van het lijnstuk met beginpunt $1-i$ en eindpunt $2+2i$.

(b) $\int_\sigma (z^2 - 2\sin z)\, dz$, met σ een injectieve C^1 parametrisering van het lijnstuk met beginpunt 1 en eindpunt $2i$.

(c) $\int_\tau e^z \; dz$, met τ een injectieve C^1 parametrisering van het lijnstuk met beginpunt $a \in \mathbb{R}$ en eindpunt $b \in \mathbb{R}$.

$\oslash$

Opgave 3.2 Gegeven is een open deel $U \subset C$ en een C^1 complex differentieerbare functie $F : U \to \mathbb{C}$. Verder is $\gamma : [a,b] \to U$ een C^1-kromme.

(a) Toon aan dat $F \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ differentieerbaar is met als afgeleide

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\, \gamma'(t), \qquad (t \in [a,b]).$$

Hint: volgens de kettingregel voor de totale afgeleide is het linkerlid gelijk aan $DF(\gamma(t))(\gamma'(t))$.

(b) Zij $f = F'$. Toon aan dat

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

$\oslash$

Opgave 3.3 Bereken de integraal $\int_C \overline{z}\, dz$, waarbij C een der volgende krommen met beginpunt 0 en eindpunt $4+2i$ is:

(a) C wordt geparametrizeerd door $\sigma(t) = t^2 + it \;\; (0 \le t \le 2)$;

(b) C is de vereniging van het lijnstuk van 0 tot $2i$ en het lijnstuk van $2i$ tot $4+2i$.

$\oslash$

Opgave 3.4 Zij C het deel van de kromme $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ dat de punten $1+i$ en $2+3i$ verbindt. Bereken de integraal

$$\int_C (12z^2 - 4iz)\, dz.$$

$\oslash$

Opgave 3.5 Zij $a, b \in \mathbb{C}$ en $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ een tweetal krommen met beginpunt a en eindpunt b. Toon aan dat γ_0 en γ_1 homotoop zijn met behoud van eindpunten. $\oslash$

Opgave 3.6 We beschouwen het open deel $U := \mathbb{C} \setminus \{i\}$ van $\mathbb{C}$.

(a) Laat $R > 1$. Bepaal een gesloten stuksgewijze C^1 kromme $\gamma : [0, 2\pi] \to U$ zo dat $\gamma([0,2\pi])$ gelijk is aan de vereniging van het lijnstuk $[-R, R]$ en de cirkelboog $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

(b) Zij $r > 0$ willekeurig en definieer de cirkelparametrisering $\sigma : [0, 2\pi] \to U$ door $\sigma(t) = i + re^{it}$. Bewijs dat γ en σ in U homotoop zijn als gesloten krommen.

$\oslash$

Opgave 3.7 Bereken de integraal $\int_C z^2 \sin(4z)\, dz$ met C het in $\operatorname{Im} z \geq 0$ gelegen deel van de positief georiënteerde cirkel met middelpunt $(\pi, 0)$ en straal π. $\oslash$

Opgave 3.8 Bereken de integraal $\int_C (z+2)e^{iz}\, dz$ met C het deel van de parabool $\pi^2 y = x^2$ dat het punt 0 met het punt $\pi + i$ verbindt. $\oslash$

Opgave 3.9 Laat D de cirkelschijf met straal r en middelpunt α in het complexe vlak zijn.

(a) Toon aan dat voor een, op een open omgeving van $\overline{D}$ gedefinieerde, complex differentieerbare functie f geldt:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt.$$

In woorden: $f(\alpha)$ is de gemiddelde waarde van f over de cirkel ∂D.

(b) Toon aan dat dezelfde formule voor een harmonische functie f geldt.

$\oslash$

Opgave 3.10 Vervolg op de vorige opgave. Laat Ω een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn.

(a) Toon aan dat het volgende 'maximumprincipe voor harmonische functies' geldt voor een niet constante harmonische functie $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$: de functie φ neemt nergens in Ω een maximale waarde aan. (Andersgezegd: voor iedere $\alpha \in \Omega$ is er een $\beta \in \Omega$ zo dat $\varphi(\beta) > \varphi(\alpha)$.)

(b) Toon aan dat het volgende maximumprincipe geldt voor een niet constante complex differentieerbare functie $f : \Omega \to \mathbb{C}$: de functie $|f(z)|$ neemt nergens in Ω een maximum waarde aan (hint: gebruik de formule van Cauchy).

$\oslash$

De volgende opgaven zijn gewijd aan een bewijs van de **Stelling van Goursat**, die zegt dat de afgeleide van een complex differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{C}$ (met $U \subset \mathbb{C}$ open) altijd continu is op U.

In de eerste opgave zijn de volgende twee resultaten uit Inleiding Analyse in Meer Variabelen nodig.

Stelling 1: *Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ open en $a, b \in \mathbb{R}$ zo dat $a < b$. Is $f : V \times [a, b] \to \mathbb{R}^p$ een continue functie, dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}^p$ gedefinieerd door*

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt, \qquad (x \in V). \qquad (*)$$

continu $V \to \mathbb{R}^p$.

Stelling 2: *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval en a, b een tweetal reële getallen met $a < b$. Is $f : I \times [a, b] \to \mathbb{R}^p$ continu en partieel differentieerbaar naar de eerste variabele, terwijl de bijbehorende partiële afgeleide $\partial f / \partial x : I \times [a, b]$ continu is, dan is de functie $F : I \to \mathbb{R}^p$ gedefinieerd door (*) continu differentieerbaar met afgeleide gegeven door*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt, \qquad (x \in I).$$

Opgave 3.11 We beschouwen een deel $U \subset \mathbb{C}$. De variabele in U noteren we met $z = x + yi$. Verder is gegeven een C^1-kromme $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ en een continue functie $f : U \times \gamma([0, 1]) \to \mathbb{C}$ zo dat voor elke $w \in \gamma([0, 1])$ de functie $z \mapsto f(z, w)$ complex differentieerbaar is, terwijl de bijbehorende partiële afgeleide

$$\frac{\partial f}{\partial z} : U \times \gamma([0, 1]) \to \mathbb{C}$$

continu is.

(a) Bewijs dat de functie $F : U \to \mathbb{C}$ gedefineerd door

$$F(z) = \int_\gamma f(z, w)\, dw$$

complex differentieerbaar is met complexe afgeleide

$$F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z, w)\, dw.$$

Hint: gebruik de Cauchy-Riemann vergelijkingen.

(b) Toon aan dat F' continu is op U.

$\oslash$

Opgave 3.12 Zij $U \subset \mathbb{C}$ open en $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar. We veronderstellen *niet* dat de afgeleide van f continu is.

Zij $\mathcal{R}$ de collectie van alle rechthoeken $R \subset U$ van de vorm $R = [a_1, a_2] + [b_1, b_2]i = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ met $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$ $(j = 1, 2)$. Voor zo'n rechthoek R noteren we de omtrek met $l(\partial R) := 2(b_1 - a_1) + 2(b_2 - a_2)$. Bovendien definiëren we het complexe getal $I(V)$ door

$$I(R) = \int_{\partial R} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\sigma_{R,j}} f(z)\, dz,$$

waarbij de krommen $\sigma_{R,j} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ de standaardparametriseringen zijn van de randlijnstukken van ∂R, positief georiënteerd, dwz. volgens de doorlooprichting tegen de richting van de wijzers van de klok.

(a) Toon aan dat voor iedere $R \in \mathcal{R}$ een $R' \in \mathcal{R}$ bestaat zo dat $R' \subset R$, $l(R') = l(R)/2$ en $I(R') \geq I(R)/4$. Hint: verdeel R op de voor de hand liggende manier in vier congruente rechthoeken $R_1, \ldots, R_4$ en toon aan dat $I(R) = \sum_{j=1}^4 I(R_j)$.

We nemen een vaste $R \in \mathcal{R}$ en kiezen inductief een rij $(R_k)_{k \geq 0}$ in $\mathcal{R}$ zo dat $R_0 = R$ terwijl voor $k \geq 0$ geldt $R_{k+1} = (R_k)'$ als in (a) met R_k in plaats van R.

(b) Toon aan dat voor alle $k \geq 0$ geldt dat

$$l(\partial R_k) = l(\partial R)/2^k, \quad |I(R_k)| \geq |I(R)|/4^k.$$

(c) Toon aan dat de doorsnede $\cap_{k\geq 0} R_k$ gelijk is aan $\{a\}$ voor een unieke $a \in U$. Hint: bewijs eerst dat de doorsnede niet leeg is.

(d) Toon aan dat

$$I(R_k) = \int_{\partial R_k} [f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)]\, dz.$$

Toon vervolgens aan dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $k \geq 0$ bestaat zo dat

$$|I(R_k)| \leq \varepsilon\, l(R)^2/4^k.$$

Hint: gebruik een geschikte schatting van $\rho(z) = f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)$.

(e) Toon aan dat $I(R) = 0$.

$\oslash$

Opgave 3.13 De stelling van Goursat. Gegeven is een open deel U van $\mathbb{C}$ en een complex differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{C}$. Doel van deze opgave is te bewijzen dat de complexe afgeleide f' continu is elk punt $\alpha \in U$. We fixeren een willekeurige $\alpha \in U$.

(a) Laat R en R' een tweetal rechthoeken van de vorm $[a_1, b_1] + [a_2, b_2]i$ respectievelijk $[a'_1, b'_1] + [a'_2, b'_2]i$ zijn zo dat $R \subset R'$ en $\alpha \in \mathrm{inw}(R')$. Bewijs dat

$$\int_{\partial R} \frac{f(w)}{w - \alpha}\, dw = \int_{\partial R'} \frac{f(w)}{w-\alpha}\, dw.$$

Hint: kies een geschikte verdeling van R in 9 rechthoeken R_j, $(1 \leq j \leq 9)$, met $R_1 = R'$ en beschouw de integralen van $f(w)/(w-\alpha)$ over elke ∂R_j, positief georiënteerd (dus tegen de richting van de klokwijzers).

(b) Toon aan dat er een dalende rij rechthoeken $R = S_0, S_1, S_2, \dots$ bestaat zo dat $a \in \mathrm{inw}(S_j)$ voor alle j en

$$\lim_{j\to\infty} \left| \int_{\partial S_j} \frac{f(w)}{w-\alpha}\, dw - \int_{\partial S_j} \frac{f(a)}{w-\alpha}\, dw \right| = 0.$$

(c) Toon aan dat voor alle $z \in \mathrm{inw}(R)$ geldt

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial R} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

(d) Toon aan dat de afgeleide functie f' continu is in α.

$\oslash$

Opgave 3.14 Gegeven is een open deel $U \subset \mathbb{C}$ en een rij $f_k : U \to \mathbb{C}$ van complex differentieerbare functies die puntsgewijs op U convergeert met limiet $f : U \to \mathbb{C}$. Verder is gegeven dat op iedere gesloten schijf $S := \bar{D}(a; r) \subset U$ de convergentie uniform is, dwz., $\|f_k - f\|_S \to 0$ voor $k \to \infty$. Een dergelijke convergentie wordt wel lokaal uniform op U genoemd.

Bewijs dat f complex differentieerbaar is en dat $f_k' \to f'$ lokaal uniform op U. Hint: gebruik de Cauchy integraal formule. $\oslash$

Opgave 3.15 Geef de machtreeksontwikkeling van de functie $f(z) = (1 + z^2)^{-1}$ rond het punt $z = 0$. Wat is de convergentiestraal van de gevonden reeks? $\oslash$

Opgave 3.16 Geef de eerste vier termen van de machtreeksontwikkeling van de functie $f(z) = (1 + z^3)^{-1}$ rond de punten: $z = 0$ en $z = 1$. Wat is de convergentiestraal van de betreffende machtreeks? $\oslash$

Opgave 3.17 Bepaal de eerste vier termen van de Taylorreeks van

(a) $\frac{1}{e^z+3}$ in de buurt van $z = 0$;
(b) $\frac{z}{z^2-1}$ in de buurt van $z = i$;
(c) $\frac{z}{(z+1)^3}$ in de buurt van $z = 0$.

Bepaal voor elk van de reeksen de convergentiestraal. $\oslash$

Opgave 3.18 Zij $z_0 \in \mathbb{C}$ en zij $\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$ een machtreeks met positieve convergentiestraal; neem aan dat $a_1 \neq 0$. Bewijs dat er een éénduidig bepaalde machtreeks $\sum_{k \geq 0} b_k (w - a_0)^k$ met positieve convergentiestraal is, met de eigenschappen dat $b_0 = z_0$ en dat als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (w - a_0)^k,$$

dan is $g(f(z)) = z$ voor alle z in een omgeving van $z = z_0$.

Bereken b_1 in termen van a_1 en bereken b_2 in termen van a_1 en a_2. $\oslash$

Opgave 3.19 Bepaal de volgende limieten:

(a) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{(e^{\sin z} - 1)^3}{\sin z - z}$;
(b) $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{e^{\cos z} - e^{1-z^2}}{\sin^2 z}$;
(c) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right]$.

$\oslash$

Opgave 3.20 Bereken de volgende integralen, waarbij de contour $C : |z| = 1$ eenmaal in positieve zin wordt doorlopen:

(a) $\int_C (z^2 - \sin z)\, dz$;

(b) $\int_C \frac{\sin z}{z}\,dz$;

(c) $\int_C \frac{\sin z}{(z+4)^2}\,dz$;

(d) $\int_C \frac{\cosh z}{z}\,dz$;

(e) $\int_C \frac{\sin z}{z^2}\,dz$;

(f) $\int_C \frac{e^z}{z^5}\,dz$.

⊘

Opgave 3.21 We beschouwen de rechthoek $D = \{z \in \mathbb{C};\ |x| \le 2,\ |y| \le 1\}$. Bereken de integraal

$$\int_{\partial D} \frac{z+4}{z-4}\,\frac{e^z}{\sin z}\,dz.$$

⊘

Opgave 3.22 Beschouw de negatief georiënteerde cirkel $C : |z| = 3$. Bereken de integraal

$$\int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz.$$

⊘

Opgave 3.23 Geef de Laurentreeksontwikkeling van de functie $f(z) = (z-1)^{-1}$ naar machten van z op de gebieden $0 < |z| < 1$ en $|z| > 1$. ⊘

Opgave 3.24 Geef de Laurentreeksontwikkeling van de functie $f(z) = (\cos z)^{-1}$ naar machten van $z - \frac{\pi}{2}$ op de gereduceerde omgeving $0 < |z - \frac{\pi}{2}| < \pi$. ⊘

Opgave 3.25 Ontwikkel de volgende functies naar machten van z rond $z = 0$ (u mag volstaan met het geven van drie termen). Wat is daarbij het geldigheidsgebied?

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{z^2 \sinh z}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{1}{2(z^3+z)}.$$

⊘

Opgave 3.26 De functie $F(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ heeft een Laurentreeksontwikkeling op een gereduceerde omgeving van $z = 0$. Geef de eerste vier termen en het geldigheidsgebied. ⊘

Opgave 3.27 Ontwikkel de functie $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ naar machten van z in de gebieden:

$$\text{(a)}\quad |z| < 1, \quad \text{(b)}\quad 1 < |z| < 3, \quad \text{(c)}\quad |z| > 3.$$

⊘

Opgave 3.28 Bepaal voor de onderstaande complexe functies de aard van de singulariteiten en bereken de residuen:

(a) $\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$,

(b) $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$,

(c) $\frac{e^z}{\sin^2 z}$.

⊘

Opgave 3.29 Gegeven is een complexe functie $z \mapsto f(z)$ die in het punt $\alpha \in \mathbb{C}$ een pool van de orde m heeft. Bewijs dat:

$$Res_{z=\alpha} f(z) = \lim_{z\to\alpha} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-\alpha)^m f(z)].$$

⊘

Opgave 3.30 Bereken het residu in $z = 0$ van de functie: $F(z) = z^{-3} \cot z \coth z$. ⊘

Opgave 3.31 Bereken de volgende integralen:

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$,

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$.

⊘

Opgave 3.32 Bereken de volgende integralen:

(a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\, dx$,

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$,

(c) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\, dx \qquad (a > 0)$.

⊘

Opgave 3.33 De eerste twee onderdelen van de nu volgende opgave dienen ter voorbereiding op de laatste twee.

(a) Toon aan dat voor alle $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ geldt: $\frac{2}{\pi} t \le \sin t \le t$. (Maak een plaatje!)

(b) Toon aan dat $\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2t}\, dt \le \frac{\pi}{4R^2}$ voor alle $R > 0$.

(c) Bepaal de integraal $\int_0^{\infty} e^{ix^2} dx$ door gebruik te maken van de residuenstelling. Hint: integreer over de rand van de cirkelsector $S = \{re^{i\varphi};\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le R\}$, en laat $R \to \infty$.

(d) Bereken de integralen van Fresnel: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\, dx$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\, dx$.

⊘

Opgave 3.34 Bereken de integraal

$$\int_{\partial V} \frac{\sinh 3z}{(z-\pi/4)^3}\, dz$$

waarbij V het vierkant met hoekpunten $\pm 2 \pm 2i$ is. ⊘

Opgave 3.35 Bereken de integraal

$$\int_{\partial V} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz$$

waarbij V het vierkant met hoekpunten $\pm 3 \pm 3i$ is. $\oslash$

Opgave 3.36 Bepaal de *Laurentreeksontwikkeling van*

(a) $(z^2 - 3)^{-1}$ naar machten van z, en ook naar machten van $z - \sqrt{3}$, in het gebied $|z| < \sqrt{3}$;

(b) $(e^z - 1)^{-1}$ naar machten van z, in het gebied $0 < |z| < 2\pi$;

(c) $(z^3 + 4z)^{-1}$ naar machten van $z - 2i$, in het gebied Re $z > 4$.

$\oslash$

Opgave 3.37

(a) Bewijs dat de functie

$$f(z) = \frac{1}{2} z \cot \frac{1}{2} z$$

een ophefbare singulariteit heeft in $z = 0$.

(b) Laat zien dat de Laurentreeks van f in een gereduceerde omgeving van $z = 0$ van de vorm

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n z^{2n}}{(2n)!}$$

is; bepaal B_0, B_1, B_2 en B_3.
De B_n heten *de getallen van Bernoulli.*

$\oslash$

Opgave 3.38 Bepaal de aard van de singuliere punten van de volgende functies; bepaal in de geïsoleerde singuliere punten het residu.

(a) $\frac{1}{z(z^2+1)}$;

(b) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$;

(c) $e^{z^{-1}}$;

(d) $\frac{1}{e^z-1}$;

(e) $\tan z$;

(f) $\sin \frac{1}{z}$;

(g) $\frac{1}{\sin z^{-1}}$;

(h) $\frac{1}{(z+1)^3}$.

$\oslash$

Opgave 3.39 Bereken met behulp van de residuenstelling de volgende integralen (a is een reëel getal, n is een natuurlijk getal):

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \varphi}{a + \cos \varphi} d\varphi \quad (a > 1)$;

(b) $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2} d\varphi \quad (|a|<1)$;

(c) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos(n\varphi - \sin\varphi) d\varphi$;

(d) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \quad (a>0)$;

(e) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx \quad (a>0)$;

(f) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx \quad (a>0)$;

(g) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^4+1} dx$.

⊘

Opgave 3.40 Zij w de weg die ontstaat door de rand van de rechthoek met hoekpunten $-R, R, R+2\pi i$ en $-R+2\pi i$ te onderbreken door binnenwaarts beschreven halve cirkeltjes met middelpunten 0 en $2\pi i$ (en met voldoend kleine straal δ). Zij $0<a<1$; bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ax}-e^{(1-a)x}}{e^x-1} dx$$

door integratie van

$$\frac{e^{ax}}{e^z-1}$$

over w. ⊘

Opgave 3.41 Bepaal de eerste drie termen van de Taylorreeks van:

(a) de hoofdwaarde van $(1+z+z^2)^{\frac{1}{2}}$, in de buurt van $z=0$;

(b) de hoofdwaarde van $(\cos z)^{\frac{1}{2}}$, in de buurt van $z=0$;

(c) de hoofdwaarde van $\sqrt[3]{z}$, in de buurt van $z=i$;

(d) de hoofdwaarde van $(1+z^2)^{-\frac{1}{2}}$, in de buurt van $z=0$;

(e) de hoofdwaarde van $\log\cos z$, in de buurt van $z=0$.

⊘

Opgave 3.42 Laat G het complexe vlak zijn, gecoupeerd volgens twee halfrechten: één vanuit -1 langs de reële as naar links, één vanuit 1 langs de reële as naar rechts.

(a) Definieer $f(z)=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ als op G analytische functie zó dat $f(0)=i$.

(b) Bepaal de eerste drie termen van de Taylorreeks van f in de buurt van 0.

(c) Bereken $f(5i)$.

(d) Bereken

$$\int_k f(z)dz$$

waarin k het lijnstuk van $-i$ naar i is.

⊘

Opgave 3.43 Laat G het complexe vlak zijn met de coupure $\varphi=\frac{1}{2}\pi$.

(a) Definieer $f(z)=\log z$ analytisch in G, zó dat $f(-i)=-\frac{1}{2}\pi i$.

(b) Bereken $f(1)$.
(c) Definieer $g(z) = (\sqrt{z})\log z$ analytisch in G, zó dat $g(1) = 0$ en $g(2) < 0$.
(d) Bereken $g(-i)$.
(e) Bepaal de eerste drie termen van de Taylorreeks van g in de buurt van $z = -i$.

$\oslash$

Opgave 3.44 Laat G het complexe vlak zijn, gecoupeerd volgens het lijnstuk [1,2].

(a) Definieer $f(z) = (z^2 - 3z + 2)^{\frac{1}{2}}$ analytisch in G, zó dat $f(0) = -\sqrt{2}$.
(b) Bereken $f(-1)$, $f(4)$ en $f\left(\frac{3+i}{2}\right)$.

Bepaal de eerste drie termen van:

(c) de Taylorreeks van f in de buurt van 0;
(d) de Laurentreeks van f, naar machten van z, in het gebied $|z| > 2$.

$\oslash$

Opgave 3.45 Bereken met behulp van de residuenstelling de volgende integralen:

(a) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{x}}$
(b) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{1+x^2} dx$.

$\oslash$

Opgave 3.46 Bereken de integralen

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx \qquad \text{en} \qquad \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^2} dx$$

door integratie van de functie $\frac{\log^2 z}{1+z^2}$. $\oslash$

Opgave 3.47 Bereken

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+x+1)^2} dx$$

. $\oslash$

4 Fourier-reeksen

Opgave 4.1 Beschouw de Fourier-reeks

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} e^{i\,k\,x},$$

waarbij $c_k = 0$ als $k < 0$. Bewijs dat deze Fourier-reeks absoluut uniform convergeert en bereken de som. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\,x)}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x}\,\cos(\sin x), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\,x)}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x}\,\sin(\sin x).$$

$\oslash$

Opgave 4.2 Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die is gegeven door de Fourier-reeks

$$a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k\,\cos kx + \sum_{k\geq 1} b_k\,\sin kx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{ikx},$$

waarbij de convergentie uniform is. Bewijs dat

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos kx\,dx, \quad k\geq 1,\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin kx\,dx, \quad k\geq 1.
\end{aligned}$$

Bewijs dat f symmetrisch is in de zin dat $f(-x) = f(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$, dan en slechts dan als f gegeven is door een cosinusreeks, dat wil zeggen, voor iedere $k \geq 1$ geldt dat $b_k = 0$. En dat f antisymmetrisch is in de zin dat $f(-x) = -f(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$, dan en slechts dan als f gegeven is door een sinusreeks, dat wil zeggen, voor iedere $k \geq 0$ geldt dat $a_k = 0$. $\oslash$

Opgave 4.3 Schrijf $(\cos x)^3$ als een eindige Fourier-reeks. Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x)^3\,\mathrm{e}^{-ik\,x}\,dx = \begin{cases} 1/8 & \text{als} \quad k = \pm 3,\\ 3/8 & \text{als} \quad k = \pm 1,\\ 0 & \text{in alle andere gevallen.}\end{cases}$$

Het *binomium van Newton* luidt:

$$(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^{n-l}\,b^l \quad \text{waarin} \quad \binom{n}{l} = \frac{n!}{(n-l)!\,l!}\,.$$

Bewijs voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x)^n\,\mathrm{e}^{-ik\,x}\,dx = \begin{cases} 2^{-n}\binom{n}{l} & \text{als} \quad k = n-2l,\ l\in\mathbb{Z},\ 0\leq l\leq n,\\ 0 & \text{in alle andere gevallen.}\end{cases}$$

Bewijs dat als $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan is het gemiddelde van de functie $(\cos x)^{2l}$ gelijk aan $(2l)!/\left((l!)^2\, 2^{2l}\right)$. $\oslash$

Opgave 4.4 We beschouwen een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek is met periode 2π en definiëren de partiële som van de bijbehorende Fourierreeks door

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} (\mathcal{F}f)_k e^{ikx}.$$

Bewijs dat

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

met

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$$

en

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\ dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\ dx \qquad (1 \leq k \leq n) \end{aligned}$$

(let op de afwijkende factor voor de integralen). $\oslash$

Opgave 4.5 In het vervolg noteren we met $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek zijn met periode 2π, d.w.z., $f(x+2\pi) = f(x)$, voor alle $x \in \mathbb{R}$. Voor $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiëren we de functie $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y)\ dy.$$

Deze functie heet de convolutie van f en g. In de leeswijzer is aangetoond dat $f * g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voor alle $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Convolutie kan dus gezien worden als bewerking op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. In de leeswijzer is verder aangetoond dat deze bewerking commutatief is, dwz. $f * g = g * f$ voor alle $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Toon aan dat de volgende rekenregels gelden, voor alle $f, g, h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $\lambda \in \mathbb{C}$:

(a) bi-lineariteit: $(f + \lambda g) * h = f * h + \lambda(g * h)$;

(b) associativiteit: $(f * g) * h = f * (g * h)$ voor alle $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

In het vervolg zullen we daarom spreken over het convolutie-product.

(c) Bewijs dat voor alle $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $k \in \mathbb{Z}$ geldt:

$$\mathcal{F}(f * g)_k = \mathcal{F}(f)_k \mathcal{F}(g)_k.$$

We noteren dit ook als $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

Tenslotte zullen we in deze opgave aantonen dat de ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geen eenheidselement ten aanzien van de convolutie bevat. Veronderstel dat $\varphi \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo'n element zou zijn, dus $\varphi * f = f$ voor alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(d) Toon aan dat $\mathcal{F}(\varphi)_k = 1$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

(e) Toon aan dat $\varphi * P_r \to 0$ puntsgewijs op $[-\pi, \pi\,] \setminus \{0\}$, voor $r \uparrow 1$.

(f) Leidt een tegenspraak af.

$\oslash$

Opgave 4.6 Zelfde notatie als in de voorgaande opgave. Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. We definiëren de functie $f^\vee : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door $f^\vee(x) = \overline{f(-x)}$. Het is duidelijk dat $f^\vee \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. We schrijven $g = f * f^\vee$.

(a) Bewijs dat $\mathcal{F}(g)_k = |\mathcal{F}(f)_k|^2$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Gebruik de ongelijkheid van Bessel voor f om te bewijzen dat

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)_k|^2 e^{ikx}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Bewijs de gelijkheid van Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)_k|^2.$$

Hierin staat $\|f\|_2$ voor de kwadraatintegraalnorm, gedefinieerd door

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

(d) Pas het bovenstaande toe op de functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd wordt door $f(x) = |x|$, en leidt een interessante identiteit af.

$\oslash$

Opgave 4.7 Zij D_n de in het dictaat gedefinieerde Dirichlet kern. Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Toon aan dat voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $f * \epsilon_k = \mathcal{F}(f)_k\, \epsilon_k$.

(b) Bewijs dat

$$f * D_n = \sum_{k=-n}^{n} \mathcal{F}(f)_k \epsilon_k.$$

$\oslash$

Opgave 4.8 Zij f de 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = x^2$ als $-\pi \le x \le \pi$. Maak een schets!

Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Bereken de symmetrische partiële sommen van de Fourier-reeks van f. Onderzoek de convergentie van de Fourier-reeks van f.

Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\,x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \le x \le \pi,$$

waarbij de convergentie uniform is. Bewijs dat deze identiteit *niet* geldt als $|x| > \pi$. Ga na dat invullen van $x = 0$, resp. $x = \pi$ leidt tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

waarbij we de laatste identiteit al eens eerder hebben gezien. Probeer nog wat meer waarden van x, waarvoor u voor iedere positieve gehele n de waarde van $\cos(n\,x)$ expliciet kent. $\oslash$

Opgave 4.9 Zij f de 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = 1$ als $0 < x < \pi$ en $f(x) = -1$ als $-\pi < x < 0$. Voor $x = 0$ en $x = \pi$ mag u aan $f(x)$ iedere waarde geven die u wilt. Maak een schets!

Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Bereken de symmetrische partiële sommen van de Fourier-reeks van f. Onderzoek de convergentie van de Fourier-reeks van f. Wat gebeurt er voor $x = 0$ en voor $x = \pi$?

Bewijs dat

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin((2l-1)\,x)}{2l-1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{als} \quad 0 < x < \pi.$$

Wat gebeurt er als $-\pi < x < 0$, als $x = 0$ en als $x = \pi$? Op wat voor intervallen is de convergentie uniform? $\oslash$

Opgave 4.10 Zij c_k, $k \in \mathbb{Z}$, een rij van complexe getallen waarvoor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\,c_k| < \infty.$$

Bewijs dat de Fourier-reeksen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{ikx}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{i}\,k\,c_k\,\mathrm{e}^{ikx}$$

uniform abolute convergent zijn. Noteer de som met $f(x)$, resp. $g(x)$. Bewijs, gebruik makend van Opgave 1.5, dat f continu differentieerbaar is en dat $f' = g$. Anders gezegd,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{i}\,k\,c_k\,\mathrm{e}^{ikx},$$

ofwel de Fourier-reeks mag termsgewijs gedifferentieerd worden.

Gebruik Opgave 4.8 om $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(n\,x)$ te berekenen. Wat wordt dit voor $x = \frac{\pi}{2}$? $\oslash$

Opgave 4.11 Zij f een continue 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvan de Fourier-coëfficiënten c_k, $k \in \mathbb{Z}$, absoluut sommeerbaar zijn. Zij I de integraal van f over het interval $[0, 2\pi]$. Definieer, voor iedere $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, de Riemann-som

$$R_N := \frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi\,n}{N}\right).$$

Bewijs dat $I = 2\pi\, c_0$ en dat

$$R_N = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{l\,N}.$$

Hint: substitueer de Fourier-reeks van f in de definitie van R_N. Onderscheid bij de berekening het geval dat k een geheel veelvoud van N is en het geval dat k geen geheel veelvoud is van N. Bewijs dat $R_N \to I$ als $N \to \infty$.

Neem nu aan dat $f \in \mathrm{C}^m$, $m \geq 2$. Bewijs dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ met $k \neq 0$ geldt dat

$$|c_k| \leq C_m(f)\, |k|^{-m},$$

waarin

$$C_m(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f^{(m)}(x) \right| dx.$$

Bewijs hiermee dat

$$|R_N - I| \leq 4\pi\, C_m(f)\, \beta_m\, N^{-m},$$

waarin

$$\beta_m := \sum_{l=1}^{\infty} l^{-m}.$$

Dit betekent dat voor $N \to \infty$ de Riemann-sommen R_N des te sneller convergeren naar de integraal I van f over een periodeninterval, naarmate de functie f een gladdere periodieke functie is.

Opmerking Men noemt een numerieke integratiemethode met N tussenpunten van de orde m als de fout in de benadering van de integraal van iedere voldoend gladde functie geschat kan worden op een constante maal N^{-m}. Voor willekeurige gladde functies op een gegeven interval is de benadering met Riemann-sommen van de orde één, en niet beter. Om een benadering van hogere orde te krijgen moeten men andere lineaire combinaties van de waarden van de functie in de tussenpunten gebruiken dan de Riemann-sommen. Als geldt dat $f^{(j)}(2\pi) = f^{(j)}(0)$ voor alle $0 \leq j \leq m$, dan is de 2π-periodieke uitbreiding van f tot $\mathbb{R}$ een m keer continue differentieerbare functie. In dit geval doet zich het opmerkelijke verschijnsel voor dat de Riemann-som toch een benadering van de orde m oplevert. Men kan dit ook bewijzen zonder gebruik te maken van Fourier-reeksen, maar het is vrij natuurlijk om aan Fourier-reeksen te denken als men zich realiseert dat de voorwaarde $f^{(j)}(2\pi) = f^{(j)}(0)$ voor alle $0 \leq j \leq m$ betekent dat f een m keer continu differentieerbare uitbreiding heeft tot een 2π-periodieke functie.

Men zegt dat de Riemann-sommen R_N exponentieel snel naar I convergeren voor $N \to \infty$ als er constanten $C > 0$ en $0 < \rho < 1$ zijn, met de eigenschap dat voor iedere N geldt dat $|R_N - I| < C\, \rho^{-N}$. Men kan bewijzen dat dit het geval is indien $f(x) = \varphi\left(\mathrm{e}^{ix}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, voor een complex analytische functie φ die gedefinieerd is op een open omgeving U van de eenheidscirkel in het complexe vlak. $\oslash$

Opgave 4.12 In dit vraagstuk bekijken we hoe Fourier de naar hem vernoemde reeksen toepaste in zijn theorie van warmte. Is $u(x,\, t)$ de warmtedichtheid, die afhangt van één positiecoördinaat $x \in \mathbb{R}$ en van de tijd t, dan wordt de diffusie van de warmte beschreven door de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u(x,\, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial x^2}. \tag{4.1}$$

a) We maken de volgende veronderstellingen.

i) $0 < T \leq \infty$ en u is een continue functie op $\mathbb{R} \times [0,\, T[$.

ii) Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is $t \mapsto u(x,\, t)$ differentieerbaar. De functie $(x,\, t) \mapsto \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ is continu op $\mathbb{R} \times]0,\, T[$.

iii) Voor iedere $t \in]0,\, T[$ is de functie $u(t) : x \mapsto u(x,\, t)$ een tweemaal continu differentieerbare en 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$.

iv) u voldoet op $\mathbb{R} \times]0,\, T[$ aan de warmtediffusievergelijking (4.1).

Noteer, voor iedere $k \in \mathbb{Z}$, de k-de Fourier-coëfficiënt van de functie $u(t)$ met $c_k(t)$. Bewijs dat c_k continu is op $[0,\, T[$, differentieerbaar op $]0,\, T[$ en dat voor iedere $t \in]0,\, T[$ geldt dat ${c_k}'(t) = -k^2\, c_k(t)$. Bewijs dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ en $t \in]0,\, T[$ geldt dat $c_k(t) = c_k(0)\, \mathrm{e}^{-k^2 t}$. Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ en $t \in]0,\, T[$ geldt dat

$$u(x,\, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(0)\, \mathrm{e}^{-k^2 t}\, \mathrm{e}^{ik\,x}\,. \tag{4.2}$$

b) Zij nu u_0 een continue 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvan de Fourier-coëfficiënten $c_k(0)$ absoluut sommeerbaar zijn. Definieer de functie u op $\mathbb{R} \times [0,\, \infty[$ door middel van de formule (4.2). Bewijs dat u continu is op $\mathbb{R} \times [0,\, \infty[$ en dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $u(x,\, 0) = u_0(x)$. Bewijs, gebruikmakend van Opgave 4.10, dat op $\mathbb{R} \times]0,\, \infty[$ de functie u willekeurig vaak differentieerbaar is en voldoet aan de warmtediffusievergelijking (4.1).

$\oslash$

Opgave 4.13 Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oneven en 2π–periodiek. Bewijs dat $f(k\pi) = 0$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. $\oslash$

Opgave 4.14 Zet de op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerde functie $f(x) = \frac{1}{8}\pi x(\pi - |x|)$ 2π–periodiek voort naar heel $\mathbb{R}$ en ga na dat de zo gedefinieerde functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is. Bereken de Fouriercoëficiënten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ van f. $\oslash$

Opgave 4.15 Zij $-1 < q < 1$ en $p > 0$. Toon aan dat de Keplerse vergelijking $E - q \sin E = p$ een unieke oplossing E heeft en approximeer deze d.m.v. de contractiestelling (uit Inleiding Analyse). Aanwijzing: definieer $E_0 = p$ en recursief $E_{n+1} = q \sin E_n + p$. Men kan bewijzen dat de oplossing $E = E(p, q)$ willekeurig vaak differentieerbaar van (p, q) afhangt. $\oslash$

Opgave 4.16 Schrijf $\psi(p, q)$ voor de in opgave 4.15 verkregen oplossing van de Keplerse vergelijking $\psi(p, q) = p + q \sin \psi(p, q)$ en bewijs dat de eenduidigheid impliceert dat $\psi(p + 2\pi, q) = \psi(p, q) + 2\pi$ en dat $\psi(-p, q) = -\psi(p, q)$. Hieruit volgt dat de functie $p \mapsto f(p, q) := \psi(p, q) - p$ 2π–periodiek en oneven in p is. Bewijs dat

$$\psi(p, q) \;=\; p \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k(q) \sin kp$$

waarin de Fouriercoëfficiënten

$$b_k(q) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p, q) \sin(kp)\, dp \tag{4.3}$$

snel afnemend zijn, in de zin dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een constante $C = C(n, q)$ is met de eigenschap dat $|b_k(q)| \leq Ck^{-n}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

Het probleem is dat de integraal (4.3) gedefinieerd is in termen van de functie $\psi(p, q) = p + f(p, q)$, die niet expliciet bekend is. Pas partiële integratie toe (en gebruik de Keplerse vergelijking) om dit te verbeteren. $\oslash$

Opgave 4.17 Beschouw de Fourierreeks van de functie $f(x) = \frac{\pi}{4}|\sin x|$.

(i) Toon aan dat de Fourierreeks puntsgewijs naar f convergeert.

(ii) Bereken de Fouriercoëfficiënten van f.

(iii) Bewijs dat de Fourierreeks uniform op $\mathbb{R}$ naar f convergeert.

$\oslash$

Opgave 4.18 Definieer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$ voor $x \in [-\pi, \pi[$ tot heel $\mathbb{R}$ voort te zetten tot een 2π–periodieke functie.

(i) Toon aan dat de Fourierreeks uniform op $\mathbb{R}$ naar f convergeert.

(ii) Bereken de Fouriercoëfficiënten van f.

$\oslash$

Opgave 4.19 Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} := \mathcal{F}(f)$ de bijbehorende rij Fourier-coëfficiënten.

(a) Toon aan: indien f continu differentieerbaar is en stuksgewijs C^3 dan bestaat er een $\gamma > 0$ met de eigenschap dat
$$|c_k| \leq \gamma(1 + |k|^3)^{-1} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

(b) Veronderstel nu dat $f \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat f stuksgewijs C^{p+2} is, met $p \geq 1$. Bewijs dat er een $\Gamma > 0$ bestaat zo dat
$$|c_k| \leq \Gamma(1 + |k|^{p+2})^{-1} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\oslash$

Opgave 4.20 We definiëren de functie $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ door
$$f(x) = \begin{cases} e^{ix} & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x \in \{0, \pi\}) \\ -e^{ix} & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$
en 2π-periodieke voortzetting tot $\mathbb{R}$. We definiëren $g = \operatorname{Re} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $h = \operatorname{Im} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De Fourier-coëfficiënten van deze functies worden genoteerd met $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(g)$ en $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(h)$.

(a) Toon aan dat $h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$ uniform op $\mathbb{R}$.

(b) Bereken de Fourier-coëfficiënten c_k (of alternatief de coëfficiënten a_k en b_k van de reële gedaante van de Fourier reeks).

(c) Bewijs dat $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \notin l^1(\mathbb{Z})$.

$\oslash$

Opgave 4.21 Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een continue 2π-periodieke functie met Fourier-coëfficiënten c_k, voor $k \in \mathbb{Z}$. Bewijs de volgende beweringen.

(a) Indien er een $\gamma > 0$ bestaat zo dat

$$|c_k| \le \gamma(1 + |k|^3)^{-1} \quad \text{voor alle} \quad k \in \mathbb{Z},$$

dan is f continu differentieerbaar.

(b) Zij $p \in \mathbb{Z}_+$. Indien er een $\Gamma > 0$ bestaat zo dat

$$|c_k| \le \Gamma(1 + |k|^{p+2})^{-1} \quad \text{voor alle} \quad k \in \mathbb{Z},$$

dan is $f \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

$\oslash$

5 De gelijkheid van Parseval, orthonormale stelsels

Opgave 5.1 Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door: $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ als $0 \le x \le \pi$, $f(x) = f(-x)$ als $-\pi \le x \le 0$ en f is 2π-periodiek. Maak een schets van f. Is f continu?

a) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Bewijs dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergent is. Bewijs dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\,x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}\,x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Wat geeft dit voor $x = 0$?

b) Wat is, voor een willekeurige 2π-periodieke continue functie, de identiteit van Parseval? Bewijs dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

c) Leid uit a) af dat, voor iedere $0 \le x \le \pi$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)\,x) = \frac{\pi^2}{8}\,x - \frac{\pi}{8}\,x^2.$$

Bewijs vervolgens dat, voor iedere $0 \le x \le \pi$,

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \cos((2n+1)\,x) = \frac{\pi^2}{16}\left[x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] - \frac{\pi}{24}\left[x^3 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right].$$

$\oslash$

Opgave 5.2 Zij c een gegeven strikt positief reëel getal. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door: $f(x) = \mathrm{e}^{cx} + \mathrm{e}^{-cx}$ als $-\pi < x \le \pi$, en f is 2π-periodiek.

a) Maak een schets van f op het interval $[-2\pi, 2\pi]$. Is f continu? Merk op dat $f(x) = f(-x)$ als $-\pi < x < \pi$.

b) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Gebruik daarbij dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\mathrm{e}^{-ik\pi} = \mathrm{e}^{ik\pi} = (-1)^k.$$

Bewijs dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergent is. Bewijs dat

$$\frac{1}{c^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2+k^2} \cdot \cos(k\,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2+k^2} \cdot \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c\,x} + \mathrm{e}^{-c\,x}}{\mathrm{e}^{c\,\pi} - \mathrm{e}^{-c\,\pi}}, \quad -\pi < x \le \pi.$$

c) Bewijs dat

$$\frac{1}{c^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^2+k^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2+k^2} = \frac{\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c\,\pi} + \mathrm{e}^{-c\,\pi}}{\mathrm{e}^{c\,\pi} - \mathrm{e}^{-c\,\pi}}.$$

Formuleer een voorwaarde waaronder een reeks van functies een continue functie definieert. Bewijs daarmee dat de functie

$$c \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^2 + k^2}$$

continu is op $\mathbb{R}$. Bewijs hiermee vervolgens dat

$$\lim_{c \downarrow 0} \left[\frac{\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c\pi} + \mathrm{e}^{-c\pi}}{\mathrm{e}^{c\pi} - \mathrm{e}^{-c\pi}} - \frac{1}{c^2} \right] = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Bewijs met behulp van Taylor-ontwikkeling dat het linkerlid gelijk is aan $\frac{\pi^2}{3}$.

d) Wat is, voor een willekeurige 2π-periodieke continue functie, de identiteit van Parseval? Pas de identiteit van Parseval toe op de in dit vraagstuk gegeven functie f en bereken hiermee

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + k^2)^2}.$$

e) Leid uit b) af dat, voor iedere $0 \leq x \leq \pi$,

$$\frac{x}{c^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2\, k + k^3} \cdot \sin(k\, x) = \frac{\pi}{c^2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c\,x} - \mathrm{e}^{-c\,x}}{\mathrm{e}^{c\,\pi} - \mathrm{e}^{-c\,\pi}}.$$

⊘

Opgave 5.3 Bereken de integraal $\int_0^{2\pi} (\cos x)^6\, dx$ door de functie $(\cos x)^3$ met behulp van de formule van Euler als een complexe Fourier-reeks te schrijven en vervolgens daarop de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen toe te passen. ⊘

Opgave 5.4 Pas de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen toe op de functie f in Voorbeeld 5.25, resp. Voorbeeld 5.46, resp. Opgave 4.8, resp. Opgave 4.9. Laat zien dat hieruit de volgende identiteiten volgen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

⊘

Opgave 5.5 Een functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ is een trigonometrische veelterm als

$$f(t) \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_k\, \mathrm{e}^{i\mu_k t}$$

met $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. Verifieer dat

$$\langle f \mid g \rangle \;:=\; \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) \overline{g(t)}\, dt$$

een inproduct op de ruimte F van alle trigonometrische veeltermen definieert en dat de functies $e_\mu(t) := \mathrm{e}^{i\mu t}$ een (overaftelbaar) orthonormaalsysteem $(e_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$ vormen. ⊘

Opgave 5.6

(a) Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Toon aan dat voor iedere Riemann-integreerbare functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ geldt dat

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \int_a^b f(x)\, e^{i\xi x}\, dx = 0. \qquad (*)$$

Dit is het Riemann-Lebesgue lemma, dat in het dictaat bewezen is voor het speciale geval dat f continu is. Hint: gebruik Lemma 6.22 om f te benaderen met een continue functie.

In het vervolg beschouwen we de algemenere situatie dat $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ een lokaal Riemann-integreerbare functie is zo dat $|f|$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $]a, b[$. Voor $n \geq 1$ definiëren we de functie $\varphi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ door

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad |x - a| \leq 1/n \\ 0 & \text{als} \quad |x - b| \leq 1/n \\ 1 & \text{als} \quad \min(|x - a|, |x - b|) > 1/n. \end{cases}$$

(b) Toon aan dat voor iedere $n \geq 1$ de functie $\varphi_n f$ Riemann-integreerbaar is op $[a, b]$ en dat

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x) f(x)|\, dx = 0.$$

(c) Toon aan dat (*) ook geldt in de huidige algemenere situtatie.

(d) Formuleer een Riemann-Lebesgue lemma voor intervallen van de vorm $]a, b[$ met $a = -\infty$ of $b = \infty$.

$\oslash$