# Dictaat Functies en Reeksen

E.P. van den Ban

© Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Herzien, Najaar 2021

# Voorwoord

Dit dictaat is een flink herziene versie van het dictaat dat gebruikt is in de jaren 2011-2019. Dat dictaat was op zijn beurt weer een aanpassing van het dictaat Functies en Reeksen van Prof.dr. J.J. Duistermaat, versie juni 2005.

De wijziging ten aanzien van de voorgaande jaren bestaat er op de eerste plaats uit dat de onderwerpen differentiëren in meer variabelen, verwisselingsstellingen en convergentie van reeksen en oneigenlijke integralen verplaatst zijn naar het nieuwe dictaat 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen', bij de gelijknamige nieuwe cursus in het najaar van 2020. De daardoor vrijgekomen ruimte is benut voor een introductie tot de theorie van de complexe lijnintegralen, culminerend in de residuenstelling. Het leidend principe daarbij is de homotopieversie van de stelling van Cauchy. Deze is gebaseerd op de homotopie-invariantie van lijn-integralen van rotatie-vrije vectorvelden als behandeld in het genoemde nieuwe dictaat 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen'.

De onderwerpen die in het huidige dictaat aan bod komen zijn: uniforme convergente van rijen en reeksen, de theorie van de complexe machtreeksen, de stelling van Cauchy, Laurent-reeksen en de residuenstelling, en tenslotte de theorie van de Fourier-reeksen met een korte introductie tot de idee van de theorie van de Hilbert-ruimten.

Graag bedank ik Heinz Hanßmann voor een suggestie en een discussie, die geleid hebben tot het toevoegen van Stelling 4.42, Gevolg 4.43 en Lemma 4.44.

# Notatie

Net als in het dictaat 'Inleiding Analyse' gebruiken we in dit dictaat de volgende notatie, die afwijkt van de notatie bij de cursus 'Wat is Wiskunde.'

(a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; wij beschouwen dus ook $0$ als natuurlijk getal. Daarnaast schrijven we $\mathbb{N}^*$ of $\mathbb{Z}_+$ voor $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

(b) Als $A$ en $B$ verzamelingen zijn, dan betekent $A \subset B$ dat ieder element van $A$ ook tot $B$ behoort. Bij 'Wat is Wiskunde' was de notatie $A \subseteq B$ gebruikelijk. Verder gebruiken wij de notatie $A \subsetneq B$ voor de uitspraak $A \subset B$ en $A \neq B$. Bij 'Wat is Wiskunde' was hiervoor de notatie $A \subset B$ gebruikelijk.

(c) Intervallen worden als volgt genoteerd, voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ :

$$[\,a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad ]\,a, b\,[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Verder gebruiken we bijvoorbeeld de notatie: $[a, \infty\,[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$.

Tenslotte gebruiken we nog de notatie $a := b$ voor de uitspraak '$a$ is per definitie gelijk aan $b$.'

# Inhoudsopgave

# 1 Rijen en reeksen van functies

## 1.1 Uniforme convergentie van een rij functies

Met het oog op latere toepassingen op machtreeksen en Fourier-reeksen werken we in het vervolg steeds met *complexwaardige* functies. In het vervolg veronderstellen we dat $V$ een niet-lege verzameling is, en $p \in \mathbb{Z}$. Verder veronderstellen we dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq p}$ een functie $f_k : V \to \mathbb{C}$ gegeven is. We schrijven $(f_k)_{k \geq p}$ of $(f_k)_{k=p}^{\infty}$ voor de bijbehorende *rij van functies* $V \to \mathbb{C}$.

**Definitie 1.1** (puntsgewijze convergentie) De rij functies $(f_k)_{k \geq p}$ heet *puntsgewijs convergent* op de verzameling $V$ indien voor iedere $x \in V$ de rij $(f_k(x))_{k \geq p}$ in $\mathbb{C}$ convergent is. Is dit het geval, dan heet de functie $g : V \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$g(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x), \qquad (x \in V),$$

de puntsgewijze limiet van de rij $(f_k)_{k \geq p}$. ⊘

Indien $V$ een metrische ruimte is, dan kan het gebeuren dat elk van de functies $f_k$ continu is, terwijl de puntsgewijze limiet dat niet is.

**Voorbeeld 1.2** Veronderstel dat $V = \mathbb{R}$ en dat de rij functies gegeven wordt door

$$f_k(x) = \frac{kx}{1 + k|x|}, \qquad (k \geq 1,\, x \in \mathbb{R}).$$

Volgens de gebruikelijke rekenregels is elk van de functies $f_k$ continu op $\mathbb{R}$. Als $x \neq 0$, dan geldt

$$f_k(x) = \frac{x}{1/k + |x|} \to \frac{x}{|x|}, \qquad (k \to \infty).$$

Anderzijds geldt dat $f_k(0) = 0$ voor alle $k$. Hieraan zien we dat de rij $(f_k)$ puntsgewijs convergeert naar de functie $g = \operatorname{sgn}$, waarbij de *tekenfunctie* $\operatorname{sgn}$ gedefinieerd is door

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x > 0, \\ 0 & \text{als} \quad x = 0, \\ -1 & \text{als} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Het is duidelijk dat $g(x)$ niet continu is in het punt $x = 0$. ⊘

De voorwaarde van puntsgewijze convergentie is blijkbaar niet sterk genoeg om continuïteit van de puntsgewijze limiet $g$ te kunnen afleiden uit puntsgewijze convergentie van een rij continue functies $(f_k)_{k \geq p}$. In het onderstaande zullen we een sterker begrip van convergentie invoeren dat dit wel mogelijk maakt.

Het is daarbij prettig te kunnen werken met een verruiming van het begrip $\sup$ (supremum) van een verzameling. In het college Inleiding Analyse is het begrip supremum of kleinste bovengrens ingevoerd op basis van het volgende lemma, dat afgeleid werd uit de volledigheid van $\mathbb{R}$.

**Lemma 1.3** *Zij $A \subset \mathbb{R}$ een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling. Dan is er een uniek getal $s \in \mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen:*

(a) *$s$ is een bovengrens van $A$, dat wil zeggen, voor alle $x \in A$ geldt $x \leq s$.*

(b) *voor iedere bovengrens $b$ van $A$ geldt $b \geq s$.*

Het in bovenstaand lemma vastgelegde getal $s$ heet de *kleinste bovengrens*, of het *supremum*, van $A$. Notatie

$$s = \sup A.$$

We verruimen deze definitie nu zo dat de notie van supremum wordt uitgebreid naar willekeurige deelverzamelingen van $A$.

**Definitie 1.4** Zij $A \subset \mathbb{R}$.

(a) $\sup A = s$ met $s \in \mathbb{R}$ betekent dat $A$ niet-leeg en naar boven begrensd is en dat $s$ de eigenschappen (a) en (b) van Lemma 1.3 heeft.

(a) $\sup A = \infty$ betekent dat $A$ niet naar boven begrensd is, dwz, voor iedere $R \in \mathbb{R}$ bestaat een $x \in A$ met $x > R$.

(b) $\sup A = -\infty$ betekent dat $A$ de lege verzameling is.

$\oslash$

Als gevolg van deze afspraken bestaat er voor *iedere* $A \subset \mathbb{R}$ een uniek element $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zo dat $\sup A = s$.

Zij nu $V$ een niet-lege verzameling en $f : V \to \mathbb{C}$ een functie. Dan definiëren we

$$\sup_{x \in V} |f(x)| := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in V\}.$$

en noteren we

$$\|f\|_V := \sup_{x \in V} |f(x)|.$$

Merk op dat de verzameling $\{|f(x)| \ : \ x \in V\}$ niet-leeg is, zodat $\|f\|_V \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Het volgende principe volgt direct uit de definitie, maar wordt zo vaak in allerlei schattingen gebruikt dat we het ondergebracht hebben in een lemma.

**Lemma 1.5** *Zij $f : V \to \mathbb{C}$ een functie, en $M \in [0, \infty[$ of $M = \infty$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) $\|f\|_V \leq M$;

(b) *voor alle $x \in V$ geldt $|f(x)| \leq M$.*

**Bewijs** Is $M = \infty$, dan zijn beide beweringen evident waar. Veronderstel dus dat $0 \leq M < \infty$.

Stel dat (a) geldt. Dan geldt voor iedere $x \in V$ dat $|f(x)| \leq \|f\|_V \leq M$, dus (b) geldt. Veronderstel nu dat (b) geldt. Dan is $M$ een bovengrens van de verzameling $\{|f(x)| \ : x \in V\}$. De kleinste bovengrens van deze verzameling is $\|f\|_V$, dus (a) geldt. $\square$

Na invoering van $\| \cdot \|_V$ definiëren we het aangekondigde sterkere begrip van convergentie als volgt.

**Definitie 1.6** De rij $(f_k)_{k=p}^{\infty}$ van functies $V \to \mathbb{C}$ heet *uniform convergent* indien er een functie $g : V \to \mathbb{C}$ bestaat zo dat

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k - g\|_V = 0.$$

In dit geval heet $g$ de *uniforme limiet* van de rij $(f_k)_{k \geq p}$. $\oslash$

Schrijven we uitspraak (1.6) uit met de definitie van limiet dan zien we dat de uitspraak equivalent is met

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in V \quad \forall k \geq N : \qquad |g(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Anders gezegd, de bij $\varepsilon > 0$ bestaande index $N = N(\varepsilon)$ 'werkt' voor alle $x \in V$ tegelijk. Dit verklaart de naam uniforme convergentie.

**Voorbeeld 1.7** We beschouwen $V = ]0, 1]$ en de rij functies $f_k : V \to \mathbb{R}$, voor $k \geq 0$, gedefinieerd door

$$f_k(x) = \frac{k}{x(x+k)}.$$

Dan is iedere functie $f_k$ onbegrensd op $V$. Toch geldt dat de rij uniform convergeert naar de functie $g : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = 1/x$. Immers, voor alle $k \geq 1$ en alle $x \in V$ geldt

$$|f_k(x) - g(x)| = \left|\frac{-1}{x+k}\right| = \frac{1}{x+k} \leq \frac{1}{k}.$$

Hieruit volgt dat $\|f_k - g\|_V \leq \frac{1}{k}$ dus $\|f_k - g\|_V \to 0$ voor $k \to \infty$.

We merken nog op dat $f_k$ en $g$ weliswaar onbegrensd zijn, maar dat $f_k - g$ begrensd is op $V$. $\oslash$

In het vervolg noemen we $\|f\|_V$ ook wel de *sup-norm* van de functie $f : V \to \mathbb{C}$. Strikt genomen is deze terminologie niet correct omdat we ook de waarde $\|f\|_V = \infty$ toelaten, hetgeen betekent dat de functie $f$ niet-begrensd is. Anderzijds geldt het volgende lemma, dat zegt dat $\|\cdot\|_V$ de definiërende eigenschappen van een norm heeft (behalve de $\mathbb{R}$-waardigheid).

**Lemma 1.8** *Voor alle $f, g : V \to \mathbb{C}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt dat*

(a) $\|f\|_V \geq 0$ *en* $\|f\|_V = 0 \Rightarrow f = 0$,

(b) $\|f + g\|_V \leq \|f\|_V + \|g\|_V$,

(c) $\|\lambda f\|_V = |\lambda| \|f\|_V$,

**Bewijs** Voor alle $x \in V$ geldt

$$|f(x)| \leq \|f\|_V.$$

Omdat we verondersteld hebben dat $V \neq \emptyset$, volgt hieruit dat $\|f\|_V \geq 0$. Is $\|f\|_V = 0$ dan volgt uit de schatting dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in V$, dus $f$ is de nul functie. We concluderen dat (a) geldt.

Voor (b) merken we op dat voor alle $x \in V$ geldt

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_V + \|g\|_V.$$

Hieruit volgt (b), zie Lemma 1.5.

Tenslotte is het voldoende (c) te bewijzen voor $\lambda \neq 0$. Voor alle $x \in V$ geldt $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|\|f\|_V$, dus $\|\lambda f\|_V \leq |\lambda|\|f\|_V$. Hieruit volgt weer dat

$$\|f\|_V = \|\lambda^{-1}\lambda f\|_V \leq |\lambda^{-1}|\|\lambda f\|_V.$$

Door te vermenigvuldigen met $|\lambda|$ concluderen we tenslotte dat (c) geldt. $\square$

Er is een natuurlijke setting waarin $\|\cdot\|$ wel een norm in strikte zin definieert. Veronderstel dat $V$ een niet-lege verzameling is, en beschouw de ruimte $B(V)$ van begrensde functies $f : V \to \mathbb{C}$. Dus

$$B(V) = \{f : V \to \mathbb{C} \ : \ \|f\|_V < \infty\}.$$

Voorzien van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is $B(V, \mathbb{C})$ een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$. Bovendien definieert $\| \cdot \|_V : B(V) \to [0, \infty[$ een echte norm op $B(V)$, wegens Lemma 1.8.

In het dictaat Inleiding Analyse is reeds behandeld dat een norm op een lineaire ruimte aanleiding geeft tot een afstand of metriek op die ruimte. In het geval van $(B(V), \| \cdot \|_V)$ is deze metriek de functie $d : B(V) \times B(V) \to [0, \infty[$ gedefinieerd door

$$d(f, g) = \|f - g\|_V.$$

In de metrische ruimte $(B(V), d)$ bestaat nu de uit Inleiding Analyse bekende notie van convergentie van rijen. We merken op dat voor een rij $(f_k)_{k \geq p}$ en een functie $g$ in $B(V)$ de volgende twee uitspraken gelijkwaardig zijn.

(a) de rij $(f_k)$ convergeert op $V$ uniform naar $g$;

(b) de rij $(f_k)$ convergeert naar $g$ in de metrische ruimte $(B(V), d)$.

Voor uniforme convergentie van rijen van functies gelden daarom de resultaten die we reeds kennen voor convergentie van rijen in metrische ruimten.

Uit het volgende lemma blijkt dat uniforme convergentie inderdaad sterker is dan puntsgewijze convergentie.

**Lemma 1.9** *Zij $V$ een verzameling en $(f_k)$ een rij functies $V \to \mathbb{C}$. Zij voorts $f : V \to \mathbb{C}$. Indien $f_k \to f$ uniform op $V$, voor $k \to \infty$, dan geldt ook dat $f_k \to f$ puntsgewijs op $V$.*

**Bewijs** Zij $x_0 \in V$ een vast punt. Dan geldt dat

$$0 \leq |f_k(x_0) - f(x_0)| \leq \|f_k - f\|_V.$$

Uit de uniforme convergentie volgt dat $\|f_k - f\|_V \to 0$ voor $k \to \infty$. Door toepassing van de insluitstelling volgt nu dat $|f_k(x_0) - f(x_0)| \to 0$, dus $f_k(x_0) \to f(x_0)$, voor $k \to \infty$. $\square$

**Opmerking 1.10** We vergelijken nogmaals uniforme convergentie met puntsgewijze convergentie. Uitschrijven van de definitie van puntsgewijze convergentie van de rij functies $f_k : V \to \mathbb{C}$ geeft:

$$\forall x \in V \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N : \qquad |g(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Het feit dat het hierbij nodig kan zijn om voor diverse $x \in V$ steeds grotere $N$ te kiezen geeft men soms aan door $N = N(x, \epsilon)$ te schrijven, terwijl we bij uniforme convergentie $N = N(\epsilon)$ kunnen schrijven. $\oslash$

**Voorbeeld 1.11** We beschouwen de rij functies $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_k(x) = x^k$, voor $k \geq 1$ en $x \in [0, 1]$.

Is $0 \leq x < 1$, dan is $\lim_{k \to \infty} x^k = 0$. Anderzijds is $f_k(1) = 1 \to 1$ voor $k \to \infty$. We zien hieraan dat de rij $(f_k)$ puntsgewijs convergent is, met limiet $g$ gegeven door $g(x) = 0$ voor $0 \leq x < 1$ en $g(1) = 1$.

We zullen aantonen dat de rij $(f_k)$ niet uniform convergent is. Stel dat de rij dat wel was, met limiet $f$. Dan zou de rij $(f_k)$ ook puntsgewijs convergent zijn naar $f$, dus $f = g$. Hieruit volgt dat $f_k(x) - g(x) = x^k$ voor $0 \leq x < 1$ en $f_k(1) - g(1) = 0$. Hieruit blijkt in ieder geval dat

$|f_k(x) - g(x)| \leq 1$ voor alle $k$ en alle $x \in [0,1]$, dus $\|f_k - g\|_{[0,1]} \leq 1$. Anderzijds geldt voor elke $0 \leq x < 1$ dat

$$x^k = |f_k(x) - g(x)| \leq \|f_k - g\|_{[0,1]} \leq 1.$$

Door de limiet voor $x \uparrow 1$ te nemen leiden we hieruit af dat $\|f_k - g\|_{[0,1]} = 1$. De convergentie van de rij is dus niet uniform. $\oslash$

De uniforme norm is vaak bijzonder nuttig bij het schatten van integralen. Vooral het volgende wordt daarbij gebruikt.

**Lemma 1.12** *Zij $V = [a,b]$ een gesloten en begrensd interval en $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ een Riemann-integreerbare (dus in het bijzonder begrensde) functie. Dan geldt dat*

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\ dx \right| \leq \|\varphi\|_{[a,b]} \cdot (b-a). \tag{1.2}$$

**Bewijs** De functie $|\varphi|$ is Riemann integreerbaar en voor elke $x \in [a,b]$ geldt dat $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{[a,b]}$. Hieruit leiden we af dat

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\, dx \leq \int_a^b \|\varphi\|_{[a,b]}\ dx = \|\varphi\|_{[a,b]} \cdot (b-a).$$

$\square$

**Gevolg 1.13** *Laten $f_k$, $(k \geq p)$ en $g$ Riemann-integreerbare functies op het gesloten en begrensde interval $[a,\ b]$ zijn. Veronderstel dat $f_k \to g$ uniform op $[a,b]$. Dan geldt dat*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

**Bewijs** Wegens het bovenstaande lemma geldt, voor elke $k \geq p$, dat

$$0 \leq \left| \int_a^b f_k(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \right| \leq \|f_k - g\|_{[a,b]} \cdot (b-a).$$

Uit de uniforme convergentie volgt dat $\|f_k - g\|_{[a,b]} \to 0$. Pas nu de insluitstelling toe. $\square$

**Voorbeeld 1.14** De conclusie van Gevolg 1.13 hoeft zeker *niet* te gelden als slechts puntsgewijze convergentie is gegeven. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld.

Zij $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie met de eigenschap dat $\phi = 0$ buiten $[0,2]$, terwijl

$$\int_0^2 \phi(x)\ dx = 1.$$

Als specifiek voorbeeld kunnen we de functie $\phi(x) = \max(1 - |x-1|, 0)$ nemen (maak een plaatje). Voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ definiëren we de functie

$$\phi_k(x) := k^2\, \phi(k\, x), \quad x \in [0,2].$$

Als $x = 0$, dan geldt voor iedere $k$ dat $\phi_k(x) = 0$, dus $\phi_k(x)$ convergeert op triviale wijze naar nul als $k \to \infty$. Is $0 < x \leq 2$, dan is $\phi_k(x) = 0$ zodra $k\,x \geq 1$, ofwel $k \geq 1/x$. Dus ook in dit geval convergeert $\phi_k(x)$ naar nul voor $k \to \infty$. De conclusie is dat de rij van functies $(\phi_k)$ op de verzameling $[0, 2]$ puntsgewijs naar de nulfunctie convergeert voor $k \to \infty$.

Anderzijds is, voor $k \geq 1$,

$$\int_0^2 \phi_k(x)\,dx = k \int_0^{2k} \phi(y)\,dy = k \int_0^2 \phi(y)\,dy = k.$$

Dus hoewel de rij $\phi_k$ op $[0, 2]$ puntsgewijs naar nul convergeert, gaat de integraal over dat interval naar $\infty$. $\oslash$

We behandelen nu een belangrijk principe: is $(f_k)$ een rij van continue functies die uniform convergeert naar een functie $g$, dan is de limietfunctie $g$ vanzelf continu. Voor het formuleren van continuïteit van de betreffende functies hebben we nodig dat $V$ voorzien is van een metriek $d$. Hieronder valt in het bijzonder het geval dat $V$ een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is, voorzien van de beperking van de Euclidische metriek.

**Stelling 1.15 (Behoud van continuïteit bij uniforme convergentie)** *Zij $(V, d)$ een metrische ruimte. Laat $f_k$ een rij functies $V \to \mathbb{C}$ zijn die uniform convergeert naar een limietfunctie $g : V \to \mathbb{C}$. Veronderstel dat elk der functies $f_k$ continu is op $V$. Dan is ook de limietfunctie $g$ continu op $V$.*

**Bewijs** Zij $a \in V$ vast, dan zullen we de continuïteit van $g$ in $a$ aantonen. Daartoe gebruiken we de schatting

$$\begin{aligned} |g(x) - g(a)| &\leq |g(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - g_k(a)| \\ &\leq \|g - f_k\|_V + |f_k(x) - f_k(a)| + \|f_k - g\|_V \\ &= 2\|f_k - g\|_V + |f_k(x) - f_k(a)|. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Wegens de uniforme convergentie is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $k \geq N$ geldt

$$\|f_k - g\|_V < \varepsilon/3.$$

In het bijzonder geldt dit voor $k = N$. De functie $f_N$ is continu in $a$. Er bestaat dus een $\delta > 0$ zo dat

$$|f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3, \qquad \text{voor} \quad x \in B_V(a; \delta).$$

Combineren we deze schattingen met (1.3) voor $k = N$, dan vinden we dat voor alle $x \in B_V(a; \delta)$ geldt dat

$$|g(x) - g(a)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Hiermee is de continuïteit van $g$ in $a$ aangetoond. $\square$

Vaak heeft men aanvankelijk alleen maar de rij van functies $(f_k)$ gegeven en nog niet de kandidaat $g$ voor de limietfunctie. In deze gevallen is het Cauchy-criterium voor convergentie nuttig. We veronderstellen weer dat $V$ een niet-lege verzameling is.

**Definitie 1.16** Laat voor ieder geheel getal $k \geq p$ een complexwaardige functie $f_k : V \to \mathbb{C}$ gegeven zijn. De rij $(f_k)$ heet een *uniforme Cauchy-rij* indien voor er elke $\epsilon > 0$ een rangnummer $N \geq p$ bestaat zo dat

$$k, l > N \implies \|f_k - f_l\|_V < \varepsilon.$$

$\oslash$

Zij $B(V)$ voorzien van de uniforme afstand $d(f, g) := \|f - g\|_V$. Dan komt het bovenstaande begrip uniforme Cauchy-rij voor een rij $(f_k)$ in $B(V)$ overeen met het in Inleiding Analyse gedefinieerde begrip van Cauchy-rij in een metrische ruimte. Uit het onderstaande resultaat zullen we in het bijzonder afleiden dat de metrische ruimte $(B(V), d)$ volledig is, i.e., iedere Cauchy-rij in $B(V)$ is convergent.

**Stelling 1.17 (Uniform Cauchy-criterium)** *Zij $(f_k)$ een rij functies $V \to \mathbb{C}$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De rij $(f_k)$ is een uniforme Cauchy-rij.*

(b) *De rij $(f_k)$ is uniform convergent.*

**Bewijs** De implicatie '(b) $\Rightarrow$ (a)' is een algemeenheid voor convergente rijen in metrische ruimten. Immers, veronderstel dat (b) geldt en zij $g : V \to \mathbb{C}$ de uniforme limiet van de rij $(f_k)$. Dan volgt uit de driehoeksongelijkheid voor de sup-norm, zie Lemma 1.8 (b), dat

$$\|f_k - f_l\|_V \;\le\; \|f_k - g\|_V + \|g - f_l\|_V, \qquad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Is $\varepsilon > 0$ dan bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$k > N \implies \|f_k - g\| < \varepsilon/2.$$

Voor $k, l > N$ geldt dus $\|f_k - f_l\|_V < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Veronderstel nu dat (a) geldt. Voor iedere $x \in V$ geldt dat

$$|f_k(x) - f_l(x)| \le \|f_k - f_l\|_V,$$

waaruit we afleiden dat de $f_k(x)$ een Cauchy-rij in $\mathbb{C}$ vormen. Wegens de volledigheid van $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ impliceert dit dat $f_k(x) \to g(x)$ voor een unieke $g(x) \in \mathbb{C}$. (In het college Inleiding Analyse is bewezen dat $\mathbb{R}^n$ volledig is.) Anders gezegd, er is een unieke functie $g : V \to \mathbb{C}$ zo dat $f_k \to g$ puntsgewijs op $V$ voor $k \to \infty$.

We gaan nu bewijzen dat de convergentie $f_k \to g$ uniform is. Zij $\epsilon > 0$ en zij $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $k, l \ge N$ geldt dat $\|f_k - f_l\|_V < \varepsilon/2$. Voor alle $k, l > N$ en $x \in V$ geldt dan dat

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon/2.$$

Door de limiet voor $l \to \infty$ te nemen vinden hieruit dat

$$|f_k(x) - g(x)| \le \varepsilon/2.$$

Dit geldt voor alle $x \in V$, dus ook

$$\|f_k - g\|_V \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Dit laatste geldt voor alle $k > N$. We concluderen dat (b) geldt. $\square$

**Gevolg 1.18** *De metrische ruimte $(B(V), d)$ is volledig.*

**Bewijs** Zij $(f_n)_{n\ge 1}$ een Cauchy-rij in $B(V)$. Dan volgt uit Stelling 1.17 dat er een unieke functie $f : V \to \mathbb{C}$ bestaat zo dat $f_n \to f$ uniform op $V$, voor $n \to \infty$. We voltooien het bewijs door aan te tonen dat $f \in B(V)$.

Hiertoe merken we op dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $n \ge N \implies \|f_n - f\|_V \le \varepsilon := 1$, dus in het bijzonder $\|f\|_V \le \|f - f_N\|_V + \|f_N\|_V \le \|f_N\|_V + 1 < \infty$. Dus $f$ is begrensd op $V$. $\square$

## 1.2 Reeksen in $\mathbb{C}$

In de volgende paragraaf zullen we reeksen van functies bestuderen. Als voorbereiding daarop brengen we in deze paragraaf enige definities en resultaten uit die theorie in herinnering.

Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. We gebruiken de notatie $\sum_{k\geq 0} a_k$ om aan te geven dat we de intentie hebben om de elementen van de rij $(a_n)$ te sommeren. Voor $n \geq 0$ definiëren we de *$n$-de partiële som* van de reeks door

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1.4}$$

**Opmerking 1.19** Merk op dat de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ iets anders is dan de rij $(a_k)_{k\geq 0}$. Als we de reeks als formeel wiskundige object willen introduceren, dan kunnen we dit beter doen door de reeks te definiëren als de rij $(A_n)_{n\geq 0}$ van partiële sommen. $\oslash$

**Definitie 1.20** Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. De reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ heet *convergent* indien de $n$-de partiële sommen $A_n$, gedefinieerd door (1.4), een convergente rij in $\mathbb{C}$ vormen. In dat geval schrijven we

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Dit getal heet de *som van de reeks*. $\oslash$

**Lemma 1.21** *Laat $a_k \in \mathbb{C}$, voor $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt:*

$$\sum_{k\geq 0} a_k \ \text{convergent} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.5}$$

**Bewijs** Schrijf $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Dan heeft de complexe rij $(A_n)_{n\geq 0}$ een limiet die we noteren met $A$. Dus $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Hieruit volgt dat ook $\lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A$. Anderzijds geldt $a_n = A_n - A_{n-1}$. Met de somregel voor limieten leiden we nu af dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0.$$

$\square$

Het omgekeerde van de bewering (1.5) is in het algemeen niet waar. Dit blijkt bijvoorbeeld uit het volgende lemma.

**Lemma 1.22** *Zij $s \in \mathbb{R}$. De reeks*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s}$$

*is convergent dan en slechts dan als $s > 1$.*

**Bewijs** Als $s \leq 0$, dan geldt niet dat $1/k^s \to 0$ voor $k \to \infty$. Wegens het voorgaande lemma mogen we dus veronderstellen dat $s > 0$.

In het vervolg schrijven we $A_n$ voor de $n$-de partiële som van de reeks. We beschouwen de functie $f : x \mapsto 1/x^s$ op $[1, \infty[$. Zij $V_n$ de verdeling van het interval $[1, n+1]$ in stukken van lengte 1. Dan geldt voor de ondersom en de bovensom van de integraal van $f$ over $[1, n+1]$ ten aanzien van deze verdeling dat

$$\underline{S}(f, V_n) \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq \overline{S}(f, V_n),$$

dus

$$A_{n+1} - 1 = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^s} \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = A_n$$

(maak een plaatje!). De monotoon stijgende rij $(A_n)$ is convergent dan en slechts dan als hij begrensd is. Uit de bovenstaande schatting blijkt nu dat de monotoon stijgende rij $(A_n)$ convergent is dan en slechts dan als de integraal

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx$$

dat is. In de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' hebben we gezien dat dit laatste het geval is dan en slechts dan als $s > 1$. $\square$

Ter voorbereiding op de theorie van de reeksen geven we nog het volgende resultaat.

**Lemma 1.23** *Zij $(a_k)$ een rij complexe getallen zo dat de reeks $\sum_{k \geq 0} a_k$ convergent is. Dan is voor iedere $n \in \mathbb{N}$ de reeks $\sum_{k \geq n} a_k$ convergent. Bovendien geldt*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0.$$

**Bewijs** Voor alle $m \geq n$ geldt $\sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{m} a_k$. Door de limiet voor $m \to \infty$ te nemen blijkt hieruit dat de genoemde reeks $\sum_{k \geq n} a_k$ convergent is, terwijl

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Door de limiet voor $n \to \infty$ te nemen leiden we hieruit met de somregel voor limieten af dat

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = 0.$$

$\square$

**Definitie 1.24** Een complexe reeks $\sum_{k \geq 0} a_k$ heet *absoluut* convergent indien $\sum_{k \geq 0} |a_k|$ convergent is. $\oslash$

Het volgende resultaat geeft in het bijzonder een gegeneraliseerde driehoeksongelijkheid voor reeksen.

**Lemma 1.25** *Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. Indien de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ absoluut convergent is, dan is hij ook convergent, en er geldt:*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \tag{1.6}$$

**Bewijs** Uit de absolute convergentie volgt dat de rij $B_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ convergent is, dus Cauchy. Zij $\varepsilon > 0$ dan bestaat er een $N$ zo dat voor alle $q \geq p \geq N$ geldt $|B_p - B_q| < \varepsilon$. Zij $A_n$ de $n$-de partiële som van de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$. Dan geldt voor alle $q \geq p \geq N$ dat

$$|A_q - A_p| = |\sum_{k=p+1}^{q} a_k| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| = |B_q - B_p| < \varepsilon.$$

Dus $(A_n)$ is een Cauchy-rij, en aangezien $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ volledig is, concluderen we dat deze rij van partiële sommen convergeert. De reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ convergeert dus.

Voor alle $n \geq 0$ geldt dat

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Nemen we de limiet voor $n \to \infty$, dan concluderen we dat (1.6) geldt. □

Om voor de hand liggende redenen vatten we de uitspraak dat de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ absoluut convergeert soms ook samen in de formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Het volgende resultaat wordt zeer vaak gebruikt om de convergentie van reeksen aan te tonen.

**Lemma 1.26 (Majorantie-kenmerk voor convergentie)** *Laat $(a_k)$ een complexe rij zijn, en $(t_k)$ een reële rij, terwijl er een $C > 0$ bestaat zo dat*

$$|a_k| \leq C t_k \qquad (\forall k \geq 0).$$

*Indien $\sum_k t_k$ convergeert, dan convergeert $\sum_k a_k$ absoluut, en er geldt dat*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} t_k. \tag{1.7}$$

**Bewijs** We noteren de $n$-de partiële som van de reeks $\sum_{k\geq 0} t_k$ met $T_n$, en die van $\sum_{k\geq 0} |a_k|$ met $B_n$. Uit het gegeven volgt dat $B_n \leq CT_n$ voor alle $n$. Veronderstel dat de reeks $\sum_k t_k$ convergent is, dan is de rij $(T_n)$ convergent, dus begrensd. Er is dus een $M > 0$ zo dat $T_n \leq M$. De rij $(B_n)$ is dus begrensd door $CM$. Uit

$$B_{n+1} = B_n + |a_{n+1}| \geq B_n$$

volgt dat de rij $(B_n)$ monotoon stijgend en naar boven begrensd is, dus convergent. We concluderen dat de reeks $\sum_k |a_k|$ convergent is. Voor alle $n \geq 0$ geldt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq C \sum_{k=0}^{n} t_k.$$

De ongelijkheid (1.7) volgt hieruit door limietovergang voor $n \to \infty$. □

## 1.3 Reeksen van functies

We zullen nu reeksen van functies behandelen op een manier waaruit de analogie met de voorgaande paragraaf blijkt. Zij $V$ een niet-lege verzameling, en $(f_k)_{k\geq 0}$ een rij functies $V \to \mathbb{C}$. De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ vatten we op als notatie die aangeeft dat we de functies $f_k$ willen sommeren. Voor $n \geq 0$ definiëren we de $n$-de partiële som van de reeks als de functie $F_n : V \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Voor iedere $x \in V$ is het complexe getal $F_n(x)$ dus de $n$-de partiële som van de complexe reeks $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$.

**Definitie 1.27** De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ heet *puntsgewijs convergent* op $V$ indien de rij $(F_n)$ van partiële sommen puntsgewijs convergent is op $V$. In dat geval definiëren we de puntsgewijze som van de reeks als de puntsgewijze limiet van de rij $(F_n)$ van partiële sommen. $\oslash$

Uit de eerder ingevoerde begrippen voor reeksen complexe getallen volgt dat de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ puntsgewijs convergent is dan en slechts dan als de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$ convergent is voor elke $x \in V$. Bovendien wordt in dat geval de puntsgewijze som gegeven door

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \ : \ \ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

Ten aanzien van uniforme convergentie hebben we de volgende definitie.

**Definitie 1.28** De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ heet *uniform convergent* op $V$ indien de rij $(F_n)$ van partiële sommen uniform convergent is op $V$. $\oslash$

Is de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent, dan weten in verband met Lemma 1.9 dat de reeks tevens puntsgewijs convergent is. De uniforme limiet van de rij $(F_n)$ valt dus samen met de puntsgewijs gedefinieerde somfunctie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Wegens Lemma 1.23 volgt hieruit dat voor iedere $n \geq 0$ de reeks $\sum_{k\geq n} f_k$ puntsgewijs convergent is op $V$.

**Lemma 1.29** *Zij $(f_k)_{k\geq 0}$ een rij functies $V \to \mathbb{C}$. Dan zijn de twee volgende uitspraken gelijkwaardig.*

(a) *De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ is uniform convergent op $V$.*

(b) *De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ is puntsgewijs convergent op $V$ en er geldt dat*

$$\|\sum_{k=n}^{\infty} f_k\|_V \to 0, \qquad (n \to \infty).$$

**Bewijs** Als (a) geldt, dan is de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ puntsgewijs convergent. Dus zowel in geval (a) als in geval (b) is de reeks puntsgewijs convergent. Dit kunnen we daarom vanaf het begin veronderstellen. Zij $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ de $n$-de partiële som van de reeks, en $F = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ de puntsgewijze limiet van de rij $(F_n)$. Dan geldt voor alle $n$ dat

$$F - F_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k.$$

Hieruit volgt gemakkelijk dat (a) en (b) equivalent zijn. □

Uit Stelling 1.15 leiden we het volgende af.

**Stelling 1.30 (Continuïteit bij een uniform convergente reeks)** *Laat $V$ een metrische ruimte zijn, en $(f_k)_{k\geq 0}$ een rij continue functies $V \to \mathbb{C}$. Is de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent op $V$, dan is de somfunctie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ continu op $V$.*

**Bewijs** Noteer de $n$-de partiële som met $F_n$ en de somfunctie met $F$. Dan is iedere $F_n$ een eindige som van continue functies, dus continu op $V$. Voorts geldt $F_n \to F$, uniform op $V$. Hieruit volgt met Stelling 1.15 dat de functie $F$ continu is. □

**Lemma 1.31** *Is de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent op $V$, dan geldt $\|f_k\|_V \to 0$, voor $k \to \infty$.*

**Bewijs** Het bewijs is geheel analoog aan dat van Lemma 1.21. Zij $F_n$ de $n$-de partiële som van de reeks. Veronderstel dat de reeks uniform convergeert met som $F$, dan geldt dat $F_n \to F$ uniform op $V$ dus ook $\|F_{n-1} \to F\|_V \to 0$, voor $n \to \infty$. Aangezien

$$\|f_n\|_V = \|F_n - F_{n-1}\|_V \leq \|F_n - F\|_V + \|F - F_{n-1}\|_V$$

volgt hieruit dat $\|f_n\|_V \to 0$ voor $n \to \infty$. □

**Definitie 1.32** De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ heet absoluut uniform convergent indien de reeks $\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_V$ convergent is. ⊘

**Lemma 1.33** *Zij $\sum_{k\geq 0} f_k$ absoluut uniform convergent. Dan is de reeks ook uniform convergent, en er geldt dat*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_V \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_V .$$

**Opmerking 1.34** Is naast de voorwaarden van Lemma 1.33 bovendien gegeven dat $V$ een metrische ruimte is, en zijn de functies $f_k : V \to \mathbb{C}$ continu, dan volgt door toepassing van Stelling 1.30 dat de somfunctie $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \ : \ V \to \mathbb{C}$ continu is. ⊘

**Bewijs** Het bewijs is gebaseerd op dezelfde idee als het bewijs van Lemma 1.25.

We beschouwen de partiële somfunctie:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$$

en de partiële som $B_n = \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_V \in [0, \infty[$. Er geldt voor alle $q \geq p$ dat

$$\|F_q - F_p\|_V = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} f_k \right\|_V \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|f_k\|_V = |B_q - B_p|.$$

Veronderstel dat de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ absoluut uniform convergent is. Dan is de rij $(B_n)$ convergent in $\mathbb{R}$ dus een Cauchy-rij. Met de bovenstaande schatting zien we dat de rij $(F_n)$ een uniforme Cauchy rij van functies $V \to \mathbb{C}$ is, dus convergent met limietfunctie $F$. Dus $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = F$. Voor elke $n \geq 0$ geldt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_V \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_V$$

Hieruit volgt de gewenste schatting door limietovergang voor $n \to \infty$. □

Tenslotte hebben we voor reeksen van functies ook een majorantiekenmerk.

**Gevolg 1.35 (Uniforme majorantie van een reeks)** *Veronderstel dat $C > 0$ en dat $t_n \in [0, \infty[$, voor $n \geq 0$, terwijl*

$$\|f_k\|_V \leq C t_k \qquad (k \geq 0). \tag{1.8}$$

*Is de reeks $\sum_{k\geq 0} t_k$ convergent, dan is de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ absoluut uniform convergent op $V$, en er geldt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_V \leq C \sum_{k=0}^{\infty} t_k.$$

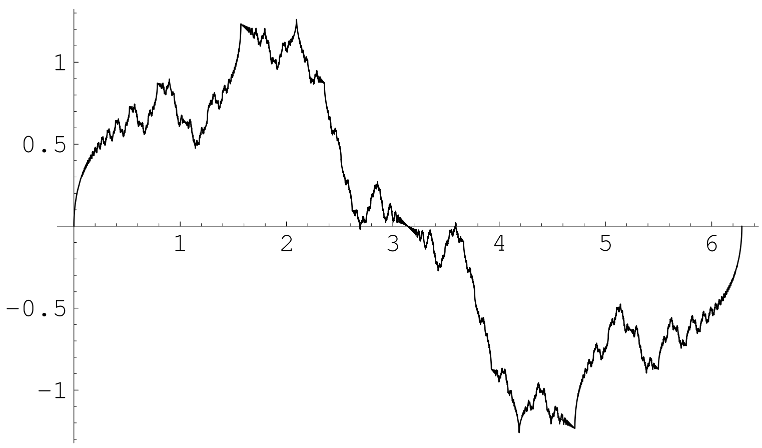
**Bewijs** Dit volgt door combinatie van Lemma 1.26 met Lemma 1.33. □

**Opmerking 1.36** We merken op dat de in (1.8) gegeven majorantie gelijkwaardig is met

$$\forall k \geq 0 \; \forall x \in V : \quad |f_k(x)| \leq C t_k.$$

⊘

**Opmerking 1.37** Is naast de voorwaarden van Gevolg 1.35 bovendien gegeven dat $V$ een metrische ruimte, en zijn de functies $f_k$ continu op $V$, dan volgt wegens Lemma 1.33 en Stelling 1.30 weer dat de somfunctie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ continu is. ⊘




De som van $k^{-2} \sin(k^2 x)$ over alle positieve gehele $k$.

**Voorbeeld 1.38** De reeks

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \sin\left(k^2\, x\right)$$

is absoluut uniform convergent.

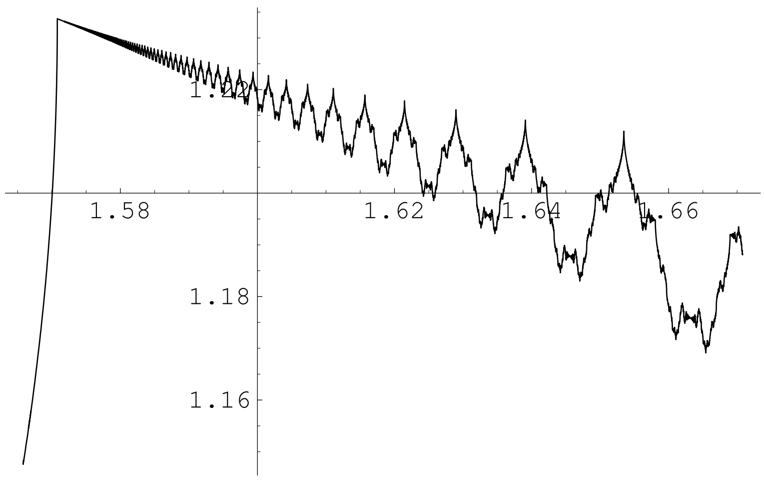
Bewijs: voor iedere $k$ geldt dat

$$\left|\frac{1}{k^2} \sin\left(k^2\, x\right)\right| \leq \frac{1}{k^2}$$

en wegens Lemma 1.22 convergeert de reeks $\sum_{k\geq 1} k^{-2}$. De absolute uniforme convergentie volgt door toepassing van Gevolg 1.35, zie ook Opmerking 1.36.

Omdat bovendien voor iedere $k$ de functie $x \mapsto k^{-2} \sin(k^2\, x)$ continu is, definieert de reeks een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zie ook Opmerking 1.37.

Het bovenstaande plaatje laat zien dat deze continue functie zich behoorlijk ‘hakkelig’ gedraagt. Bij uitvergroten wordt de hakkeligheid niet minder en wordt de functie niet goed benaderd door een lineaire functie, zoals zou moeten gebeuren als de functie differentieerbaar zou zijn.




Uitvergroting van het vorige plaatje bij $x = \pi/2$.

Dat er iets mis is met de differentieerbaarheid van deze functie kan vermoed worden door de reeks te beschouwen die ontstaat door alle termen naar $x$ te differentiëren:

$$\sum_{k\geq 1} \cos\left(k^2 x\right)$$

Deze reeks convergeert niet erg best: alle termen oscilleren voortdurend tussen $-1$ en $1$ en voor $x = 0$ is de som gelijk aan plus oneindig. $\oslash$

# 2 Machtreeksen en complex differentieerbare functies

## 2.1 Machtreeksen

Zij $a \in \mathbb{C}$. Onder een *machtreeks rond het punt* $a$ verstaan we een reeks van functies van $z \in \mathbb{C}$ van de vorm

$$\sum_{k \geq 0} c_k \, (z-a)^k; \tag{2.1}$$

hierbij zijn de $c_k \in \mathbb{C}$, voor $k \in \mathbb{N}$, gegeven coëfficiënten. Voor $n \in \mathbb{N}$ is de $n$-de partiële som van de machtreeks (2.1) gelijk aan de $n$-de graads veelterm functie

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, (z-a)^k.$$

Zoals gebruikelijk bedoelen we dat de 0-de orde term in deze notatie gelijk is aan de constante functie $c_0$. In het bijzonder is $s_0(z) = c_0, \ (z \in \mathbb{C})$.

De reeks is *convergent in het punt* $z$ als de rij van partiële sommen $(s_n(z))$ convergeert voor $n \to \infty$. In dit geval noteren we de limiet limiet $s(z)$ met

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (z-a)^k.$$

Als de rij $(s_n(z))$ van partiële sommen niet convergeert, dan heet de reeks *divergent in het punt* $z$.

Een zeer belangrijke voorbeeld van een machtreeks, zowel uit theoretisch oogpunt alsook ten aanzien van allerlei praktische toepassingen, is de *meetkundige reeks*

$$\sum_{k \geq 0} z^k. \tag{2.2}$$

In de notatie (2.1 betekent dit dat $a = 0$ en dat $c_n = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

**Lemma 2.1** *De $n$-de partiële som van de meetkundige reeks (2.2) wordt gegeven door*

$$s_n(z) := \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \tag{2.3}$$

*als $z \neq 1$, terwijl $s_n(1) = n + 1$.*

**Bewijs** De laatste bewering is duidelijk. Voor de eerste merken we op dat

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k, \quad z s_n(z) = \sum_{k=1}^{n+1} z^k.$$

Trekken we deze uitdrukkingen van elkaar af, dan vinden we

$$(1 - z) s_n(z) = 1 - z^{n+1}.$$

Hieruit volgt het resultaat voor $z \neq 1$. $\square$

**Lemma 2.2** *De meetkundige reeks (2.2) convergeert voor* $|z| < 1$ *en divergeert voor* $|z| \geq 1$. *Voor* $|z| < 1$ *geldt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{2.4}$$

**Bewijs** Als $|z| < 1$, dan geldt dat

$$|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Hieruit volgt met de rekenregels voor limieten dat de rij van partiële sommen convergeert met limiet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Hieruit volgt de bewering over de convergentie, en de identiteit (2.4).

Als $|z| \geq 1$, dan geldt dat $|z^k| \geq 1$ voor alle $k \geq 0$. In het bijzonder convergeert $z^k$ niet naar 0 voor $k \to \infty$. Wegens Lemma 1.21) convergeert de meetkundige reeks in dit geval niet. □

Een andere bron van machtreeksen is de uit het diktaat Inleiding Analyse bekende bekende *formule van Taylor* met rest. We herhalen het daar gegeven resultaat.

**Stelling 2.3 (Formule van Taylor)** *Zij* $I \subset \mathbb{R}$ *een interval dat* $0$ *bevat en* $f : I \to \mathbb{R}$ *een* $n+1$*-keer differentieerbare functie. Dan geldt voor elke* $x \in I$ *dat*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x), \quad \text{waarin} \tag{2.5}$$

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \quad \text{en} \tag{2.6}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t\,x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \quad \text{voor een} \quad t \in ]\,0\,,\,1\,[\,. \tag{2.7}$$

De veelterm $p_n$, gedefinieerd door (2.6) het $n$-de orde Taylor-polynoom van $f$ rond 0. De functie $R_n$, gedefinieerd door (2.5) heet de *Taylor restterm* van de orde $n$. Tenslotte staat (2.7) bekend als de *formule van Lagrange* voor de restterm.

In eerste instantie wordt deze formule voor vaste $n$ gebruikt om het gedrag van $f(x)$ te onderzoeken als $x$ naar 0 gaat. Zij impliceert bijvoorbeeld dat $R_n(x)/x^n \to 0$ als $x \to 0$.

Veronderstel nu dat de functie $f$ willekeurig vaak differentieerbaar is op $I$. Dan kunnen we, voor een vaste $x \in I$, ook het gedrag van de Taylor-veelterm $p_n(x)$ onderzoeken voor $n \to \infty$. Veronderstel bijvoorbeeld dat er $\rho_n > 0$ bestaan met de eigenschap dat voor iedere $0 < t < 1$ geldt dat

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(t\,x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| \leq \rho_n.$$

Dan is $|R_n(x)| \leq \rho_n$. Als bovendien geldt dat $\rho_n \to 0$ voor $n \to \infty$, dan concluderen we dat $R_n(x) \to 0$ voor $n \to \infty$. Hieruit volgt dat $p_n(x) \to f(x)$ als $n \to \infty$. Anders gezegd, in dit geval geldt dat

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k. \tag{2.8}$$

**Voorbeeld 2.4** De zojuist beschreven methode leidt tot de convergentie van de volgende reeksen:

$$
\begin{aligned}
-\log(1-x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, x^k, \qquad (|x|<1), && (2.9)\\
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k, \qquad (x\in\mathbb{R}), && (2.10)\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}, \qquad (x\in\mathbb{R}), && (2.11)\\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}, \qquad (x\in\mathbb{R}). && (2.12)
\end{aligned}
$$

Als voorbeeld behandelen we de reeks (2.10) voor de exponentiële functie. Voor $0<t<1$ geldt dat $0<e^{t\,x}\leq e^x$ als $x\geq 0$ en $0<e^{t\,x}\leq 1$ als $x\leq 0$. Dus in alle gevallen geldt $0<e^{tx}\leq \max(1,e^x)$. Gebruik makend van de Lagrange fomule voor de restterm vinden we

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{tx}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \rho_n := \max(1,e^x)\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Uit $\rho_{n+1}/\rho_n = |x|/(n+2)\to 0$ voor $n\to\infty$, leiden we af dat $\rho_{n+1}\leq \frac{1}{2}\rho_n$ voor $n$ voldoende groot. Hieruit concluderen we tenslotte dat $\rho_n\to 0$ voor $n\to\infty$. Hiermee is (2.10) aangetoond.

Voor de andere voorbeelden (2.9), (2.11) en (2.12) kan het bewijs van de convergentie op een soortgelijke manier gegeven worden. $\oslash$

In deze paragraaf onderzoeken we willekeurige machtreeksen van een complexe variabele. In het bijzonder onderzoeken we daarbij wat het convergentiegedrag is als we de reële variabele $x$ in de bovenstaande reeksen vervangen door een complexe variabele $z$.

Laat $a\in\mathbb{C}$ en $r>0$. In het vervolg zullen we de notatie

$$D(a;r) := \{z\in\mathbb{C} \mid |z-a|<r\}$$

gebruiken voor de open schijf (Engels: disk) met middelpunt $a$ en straal $r$. Merk op dat de absolute waarde op $\mathbb{C}$ overeenkomt met de lengte op $\mathbb{R}^2$ (bij de gebruikelijke identificatie $\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}, (x,y)\mapsto x+iy$). Voor de verzameling $D(a;r)$ gezien als deel van de metrische ruimte $\mathbb{R}^2$ hebben we eerder de notatie $B(a;r)$ gebruikt.

Ook zullen we de notatie

$$\bar{D}(a;r) = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-a|\leq r\}$$

voor de gesloten schijf gebruiken. Het is handig de zojuist ingevoerde notatie als volgt uit te breiden naar $r=0$ en $r=\infty$,

$$D(a;\infty)=\bar{D}(a;\infty)=\mathbb{C}, \quad \text{en} \quad \bar{D}(a;0)=\{a\}\supset D(a;0)=\emptyset. \tag{2.13}$$

**Lemma 2.5** *Zij $r_0>0$ en zij $(c_n)_{n\geq 0}$ een rij complexe coëfficiënten zo dat de rij $|c_n|r_0^n$ begrensd is. Dan is de machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ absoluut uniform convergent op iedere gesloten schijf $\bar{D}(0;r)$, voor $0\leq r<r_0$.*

**Bewijs** Er bestaat een $M > 0$ zo dat $|c_n| r_0^n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zij $0 \leq r < r_0$. Dan geldt voor alle $z \in \bar{D}(0; r)$ dat

$$|c_n z^n| = |c_n||z|^n \leq |c_n|\, r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n .$$

De meetkundige reeks $\sum_{n \geq 0} (r/r_0)^n$ is convergent. Met het majorantie kenmerk, Lemma 1.26, volgt nu dat $\sum c_n z^n$ absoluut uniform convergent is op $\bar{D}(0; r)$. □

**Opmerking 2.6** Onder dezelfde voorwaarden zien we door substitutie van $w - a$ voor $z$ dat de machtreeks

$$\sum_{n \geq 0} c_n \, (w - a)^n$$

absoluut uniform convergeert op de gesloten schijf $\bar{D}(a; r)$, voor iedere $0 \leq r < r_0$. Door een dergelijke substitutie steeds toe te passen zien we dat het voorlopig voldoende is de theorie van machtreeksen rond 0 te ontwikkelen. ⊘

**Gevolg 2.7** *Veronderstel dat de machtreeks $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ convergeert voor $z = z_0$. Dan convergeert de machtreeks op de open schijf $D(0; |z_0|)$. De convergentie is absoluut uniform op iedere gesloten schijf $\bar{D}(0; r)$, voor $0 \leq r < |z_0|$.*

**Bewijs** Uit de convergentie volgt dat $|c_n||z_0|^n \to 0$, dus de rij $|c_n||z_0|^n$ is begrensd. Is $r < |z_0|$ dan convergeert de reeks absoluut uniform op $\bar{D}(0; r)$ wegens het voorgaande lemma. Zij $z \in D(0; |z_0|)$. Dan is er een positieve constante $r$ zo dat $|z| < r < |z_0|$. De reeks convergeert absoluut uniform op de schijf $\bar{D}(0; r)$, die het punt $z$ bevat. Hieruit volgt dat de reeks convergeert voor alle $z \in D(0; |z_0|)$. □

**Voorbeeld 2.8** Passen we het bovenstaande toe op de reeksen in Voorbeeld 2.4, dan concluderen we dat de reeks voor de logarithme convergeert voor alle complexe $x \in D(0; 1)$, terwijl de overige drie reeksen convergeren voor alle complexe $x \in \mathbb{C}$. ⊘

**Stelling 2.9** *Zij $\sum_n c_n z^n$ een complexe machtreeks (rond $0$). Dan bestaat er een unieke $\rho \in [0, \infty]$ met de volgende eigenschappen*

(a) *de reeks $\sum_n c_n z^n$ convergeert op $D(0; \rho)$;*
(b) *de reeks $\sum_n c_n z^n$ divergeert op $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0; \rho)$.*

**Bewijs** We tonen eerst de uniciteit van $\rho$ aan. Laat $\rho' \in [0, \infty]$ dezelfde eigenschap hebben. Veronderstel dat $\rho \neq \rho'$; we zullen laten zien dat dit leidt tot een tegenspraak. We veronderstellen dat $\rho < \rho'$, het geval $\rho' < \rho$ kan op vergelijkbare wijze aangepakt worden. Er bestaat een $z \in \mathbb{C}$ met $\rho < |z| < \rho'$. Uit eigenschap (a) voor $\rho'$ volgt dat de reeks $\sum_n c_n z^n$ convergeert. Uit eigenschap (b) voor $\rho$ volgt dat dezelfde reeks divergeert. Dit is een tegenspraak.

Om het bestaan van $\rho$ te bewijzen zullen we laten zien dat

$$\rho = \sup \{ r \in [0, \infty[ \, : |c_n| r^n \ \text{ begrensd } \}$$

voldoet aan (a) en aan (b). Zij $|z| < \rho$. Dan is er een $r > 0$ met $|z| < r < \rho$ en zo dat $|c_n|r^n$ begrensd is. Uit Lemma 2.5 volgt dat $\sum_n c_n z^n$ convergent is. Dus (a) geldt.

Om in te zien dat (b) geldt veronderstellen we dat $|z| > \rho$. Dan is $|c_n z^n| = |c_n||z|^n$ een onbegrende rij. In het bijzonder geldt niet dat $\lim_{n\to\infty} c_n z^n = 0$. Uit Lemma 1.21 volgt nu dat $\sum_n c_n z^n$ divergeert. □

**Definitie 2.10** (Convergentiestraal) De unieke $\rho$ uit de bovenstaande stelling heet de *convergentiestraal* van de machtreeks $\sum_n c_n z^n$. De bijbehorende cirkel rond 0 met straal $\rho$ heet de *convergentiecirkel* van de machtreeks. ⊘

Er zijn geen algemene uitspraken te doen over convergentie of divergentie van de machtreeks op de convergentiecirkel. Voor een gegeven machtreeks is het onderzoek naar convergentie dan wel divergentie in punten van de convergentiecirkel een subtiel probleem waar wij verder niet op ingaan.

**Voorbeeld 2.11** Uit Lemma 2.2 volgt dat de meetkundige reeks (2.2) convergentiestraal 1 heeft. ⊘

**Voorbeeld 2.12** De eerste machtreeks in Voorbeeld 2.4 convergeert voor reële $x$ met $|x| < 1$ en heeft daarom als complexe macht reeks convergentiestraal minstens 1. Omdat voor $x > 1$ geldt dat $x^k/k \to \infty$, is de reeks divergent voor dergelijke $x$. De convergentiestraal van de reeks (2.9) is daarom 1. De overige machtreeksen convergeren voor alle reële $x$ en hebben daarom alle convergentiestraal $\infty$. ⊘

**Stelling 2.13** *Zij $a \in \mathbb{C}$ en zij $(c_n)$ een rij complexe coëfficiënten. Zij $\rho$ de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_n c_n(z-a)^n$. Dan geldt het volgende.*

(a) *De machtreeks $\sum_n c_n(z-a)^n$ convergeert absoluut uniform op iedere gesloten schijf $\bar{D}(a;r)$ met $0 \le r < \rho$.*

(b) *Door*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n, \qquad (z \in D(a;\rho))$$

*wordt een continue functie $D(a;\rho) \to \mathbb{C}$ gedefinieerd.*

**Bewijs** Zij $r$ als in (a). Dan is er een $z_0 \in D(a;\rho)$ zo dat $r < |z_0 - a| < \rho$. De machtreeks convergeert voor $z = z_0$. Met Gevolg 2.7 volgt dat de reeks absoluut uniform convergeert op de gesloten schijf $\bar{D}(a;r)$. Hiermee is (a) bewezen.

We bewijzen (b) door de continuïteit van $f$ in een gegeven punt $z_0 \in D(a;\rho)$ aan te tonen. Er geldt $|z_0 - a| < \rho$, dus er is een positieve constante $r$ zo dat $|z_0 - a| < r < \rho$. Uit (a) volgt dat de machtreeks absoluut uniform en dus ook uniform op $\bar{D}(a;r)$ convergeert. Hieruit volgt met Stelling 1.30 dat de functie $f$ beperkt tot $\bar{D}(a;r)$ continu is. Hetzelfde geldt dus voor de beperking tot de open schijf $D(a;r)$, die $z_0$ bevat. We concluderen dat $f$ continu is in het punt $z_0$. □

Voor de convergentiestraal van een machtreeks bestaat een formule die gebruik maakt van het begrip limsup van een rij $(a_n)_{n\ge 0}$ reële getallen. Indien de rij niet naar boven begrensd is, schrijven we

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Indien de rij $(a_n)$ wel naar boven begrensd is schrijven we $s_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$. Dan is de rij $(s_n)_{n\geq 0}$ monotoon dalend. Indien hij naar onder begrensd is heeft deze rij een reële limiet. Als hij niet naar onder begrensd is dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$. In al deze gevallen schrijven we

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$

**Lemma 2.14** *Zij $(a_n)_{n\geq 1}$ een rij in $\mathbb{R}$. Dan is er een deelrij $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ van $(a_n)$ met*

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

**Opmerking 2.15** Hierbij laten we op een voor de hand liggende manier toe dat een rij limiet $\infty$ heeft. $\oslash$

**Bewijs** Schrijf $L = \limsup a_n$. Indien $L = \infty$, dan is de rij $a_n$ niet naar boven begrensd, en het resultaat volgt gemakkelijk. Is $L = -\infty$, dan is de rij $(a_n)$ niet naar onderen begrensd, en het resultaat volgt eveneens gemakkelijk.

Veronderstel daarom dat $-\infty < L < \infty$. Dan is $L$ de limiet van de dalende rij $s_n = \sup_{k\geq n} a_k$. Zij $\varepsilon > 0$, en $N \in \mathbb{N}$. Dan bestaat er een $n > N$ zo dat $L \leq s_n < L + \varepsilon$. Er is een $k \geq n$ zo dat $a_k > s_n - \varepsilon \geq L - \varepsilon$. Hieruit volgt dat er een $k \geq N$ bestaat zo dat $L - \varepsilon < a_k < L + \varepsilon$. Hieruit blijkt dat $L$ een limietpunt van de rij is. Het bestaan van de genoemde deelrij volgt hier uit. $\square$

**Gevolg 2.16** *Zij $(a_n)$ een convergente rij in $\mathbb{R}$. Dan is*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

**Bewijs** Zij $L = \lim a_n$. Dan convergeert iedere deelrij van $(a_n)$ met limiet $L$. Dus $\limsup a_n = L$. $\square$

**Lemma 2.17** *Laat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij complexe getallen zijn, en schrijf*

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(a) *Als $L < 1$, dan is de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ absoluut convergent.*

(b) *Als $L > 1$, dan is de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergent.*

**Bewijs** Veronderstel eerst dat $L < 1$. Kies $L < r < 1$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\sup_{n\geq N} \sqrt[n]{|a_n|} < r$, dus $|a_n| < r^n$ voor alle $n \geq N$. De meetkundige reeks $\sum_n r^n$ is convergent, en met het majorantiekenmerk volgt dat de reeks $\sum a_n$ convergent is.

Veronderstel nu dat $L > 1$. Dan geldt voor iedere $N \in \mathbb{N}$ dat $\sup_{n\geq N} \sqrt[n]{|a_n|} \geq L > 1$, dus er bestaat een $n \geq N$ zo dat $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dus ook $|a_n| > 1$. Hieruit volgt dat $(a_n)$ niet naar nul convergeert. Wegens Lemma 1.21 concluderen we dat de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergeert. $\square$

**Stelling 2.18** *De convergentiestraal $\rho$ van een complexe machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ wordt gegeven door*

$$\rho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

**Bewijs** We schrijven $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

(a) Is $|z| < L^{-1}$, dan is

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n z^n|} = \limsup |z| \sqrt[n]{|c_n|} = |z|L < 1,$$

dus de reeks $\sum c_n z^n$ convergeert.

(b) Is daarentegen $|z| > L^{-1}$, dan is

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z|L > 1,$$

dus de reeks $\sum c_n z^n$ divergeert.

Uit (a) en (b) volgt wegens definitie van convergentiestraal dat $\rho = L^{-1}$. □

Het volgende lemma is in veel gevallen voldoende om snel de convergentiestraal van een machtreeks te kunnen bepalen.

**Lemma 2.19** *Zij $a_n$ een rij positive reële getallen zo dat*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

*met $L \in [0, \infty[$. Dan geldt ook dat*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

**Bewijs** Zie Opgave 2.4. □

**Gevolg 2.20** *Zij $L \in [0, \infty]$ en laat $(c_n)_{n\geq 0}$ een rij complexe coëfficiënten zijn met*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L. \tag{2.14}$$

*Dan wordt de convergentiestraal $\rho$ van de machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ gegeven door $\rho = L^{-1}$.*

**Bewijs** Wegens Lemma 2.19 geldt dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$. Wegens Gevolg 2.16 volgt hieruit dat $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = L$. Pas nu Stelling 2.18 toe. □

**Voorbeeld 2.21** Met behulp van Gevolg 2.20 zien we wederom dat de machtreeksen (2.2) en (2.9) convergentiestraal gelijk aan 1 hebben, terwijl van (2.10), (2.11) en (2.12) de convergentiestraal gelijk is aan $\infty$. ⊘

Functies $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ die lokaal gegeven kunnen worden door een complexe machtreeks zijn zo belangrijk voor de analyse, dat zij een aparte naam hebben gekregen.

**Definitie 2.22** Zij $V \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling en $f : V \to \mathbb{C}$ een functie. Als $a \in V$ dan heet de functie $f$ *analytisch in het punt* $a$ als er een complexe machtreeks $\sum c_n(z-a)^n$ bestaat, en een in $V$ gelegen open schijf $D$ met middelpunt $a$ zo dat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z-a)^n, \qquad (z \in D).$$

De functie $f$ heet *complex analytisch* in $V$ als voor iedere $a \in V$ geldt dat $f$ analytisch is in het punt $a$. $\oslash$

Voor een open deel $V \subset \mathbb{R}$ wordt op een soortgelijke manier het begrip reëel analytische functie $f : V \to \mathbb{C}$ gedefinieerd. In de definitie moet de schijf $D$ dan vervangen worden door een in $V$ gelegen open interval dat $a$ bevat.

**Voorbeeld 2.23** Zij $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = 1/(1-z)$. Zij $a \neq 1$. Dan is

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{1-a}} \\ &= (1-a)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{1-a} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^{-(n+1)} \, (z-a)^n. \end{aligned}$$

Hieraan zien we dat $f$ analytisch is in het punt $a$. De machtreeks van $f$ rond $a$ convergeert voor $|z-a| < |1-a|$, dus heeft een convergentiestraal $\rho$ die minstens gelijk is aan $|1-a|$. Uit

$$\limsup_{n \to \infty} |1-a|^{-(n+1)/n} = |1-a|^{-1}$$

blijkt dat $\rho$ precies gelijk is aan $|1-a|$, dus aan de afstand van $a$ tot het singuliere punt 1 van de functie $f$. $\oslash$

## 2.2 Complex differentieerbare functies

Voor functies $\mathbb{C} \supset\!\!\to \mathbb{C}$ bestaat een speciaal begrip van differentieerbaarheid.

**Definitie 2.24** Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open verzameling, $f : U \to \mathbb{C}$ een functie en $a \in U$. De functie $f$ heet *complex differentieerbaar* in het punt $a$ indien de limiet

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \tag{2.15}$$

bestaat. Is dit het geval heet de limiet de complexe afgeleide van $f$ in het punt $a$, en wordt hij genoteerd met

$$f'(a) = \frac{df}{dz}(a).$$

De functie $f$ heet complex differentieerbaar op $U$ indien hij complex differentieerbaar is in ieder punt van $U$. $\oslash$

Deze definitie vertoont veel gelijkenis met de definitie van differentieerbaarheid voor functies $\mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. Het is dan ook niet verbazend dat bekende rekenregels zoals de somregel, productregel en quotiëntregel doorgaan voor dit nieuwe begrip van afgeleide. We leggen een en ander vast in een lemma, waarvan we het bewijs overlaten aan de lezer.

**Lemma 2.25** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open, $a \in U$ en $f, g : U \to \mathbb{C}$ een tweetal functies.*

(a) *Indien $f$ complex differentieerbaar is in $a$ dan is $f$ continu in $a$.*

(b) *Indien $f$ en $g$ complex differentieerbaar zijn in het punt $a$, dan zijn $f + g$ en $fg$ dat ook, terwijl*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

*Is bovendien $g(a) \neq 0$, dan is ook de quotiëntfunctie $f/g$ complex differentieerbaar in $a$ en er geldt*

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

**Voorbeeld 2.26** Door herhaald toepassen van de productregel leiden we af dat de functie $z \mapsto z^n$ complex differentieerbaar is met afgeleide:

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}.$$

$\oslash$

Ook de karakterisering van differentieerbaarheid in termen van deelbaarheid kan in deze context bewezen worden.

**Lemma 2.27** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open, $a \in \mathbb{C}$ en $f : U \to \mathbb{C}$ een functie. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *De functie $f$ is complex differentieerbaar in $a$.*

(b) *Er bestaat een functie $\varphi : U \to \mathbb{C}$, continu in $a$, zo dat*

$$f(z) - f(a) = \varphi(z)(z - a).$$

*Indien (a) en (b) gelden, dan is $\varphi(a) = f'(a)$.*

Het bewijs van deze stelling is in essentie identiek aan dat van de overeenkomstige stelling voor functies van een reële variabele (zie het diktaat Inleiding Analyse), met dien verstande dat overal $\mathbb{R}$ vervangen dient te worden door $\mathbb{C}$.

Uit het bovenstaande lemma volgt weer gemakkelijk de volgende *kettingregel.* Het bewijs is in essentie identiek aan het bewijs dat gegeven wordt in het dictaat Inleiding Analye.

**Lemma 2.28** *Laten $U, V \subset \mathbb{C}$ open verzamelingen zijn, $f : U \to \mathbb{C}$ en $g : V \to \mathbb{C}$ functies met $f(U) \subset V$ en $a \in U$. Veronderstel dat $f$ complex differentieerbaar is in $a$ en $g$ complex differentieerbaar in $f(a)$. Dan is de samenstelling $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar in $a$, met afgeleide*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

In het vervolg veronderstellen we dat $U \subset \mathbb{C}$ open is, $f : U \to \mathbb{C}$ een functie, en $a \in U$ een gegeven punt. Aangezien $\mathbb{C}$ opgevat kan worden als $\mathbb{R}^2$ met de extra structuur van complexe vermenigvuldiging, kunnen we spreken over partiële differentieerbaarheid en totale differentieerbaarheid van $f$ in $a$. Hieronder beschrijven we het verband met complexe differentieerbaarheid.

**Lemma 2.29** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open, $f : U \to \mathbb{C}$ en $a \in U$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De functie $f$ is complex differentieerbaar in $a$.*

(b) *De functie $f : U \to \mathbb{C}$ is totaal differentieerbaar in $a$ en de reëel lineaire afbeelding $Df(a) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is ook complex lineair, dwz voldoet aan*

$$Df(a)(iw) = iDf(a)(w)$$

*voor alle $w \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.*

*Als (a) en (b) gelden dan wordt het verband tussen complexe en totale afgeleide gegeven door*

$$Df(a)(w) = f'(a)w \qquad (w \in \mathbb{C}).$$

**Bewijs** Veronderstel eerst dat (a) geldt. Dan is er een $\varphi : U \to \mathbb{C}$ die voldoet aan de voorwaarden van Lemma 2.27. De afbeelding $w \mapsto \varphi(z)w$ is reëel lineair als afbeelding $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Hieruit volgt dat $f$ tevens totaal differentieerbaar is in $a$, met totale afgeleide $Df(a) : w \mapsto \varphi(a)w = f'(a)w$.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt. Schrijf $\alpha = Df(a)(1)$. Dan geldt vanwege de complexe lineariteit dat $Df(a)(i) = iDf(a)(1) = i\alpha$, dus

$$Df(a)(u + iv) = u\alpha + vi\alpha = \alpha(u + iv)$$

voor alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Hieruit leiden we af dat

$$\left|\frac{f(z) - f(a) - \alpha(z - a)}{z - a}\right| = \frac{|f(z) - f(a) - Df(a)(z - a)|}{|z - a|} \to 0$$

voor $z \to a$. We concluderen dat

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - \alpha = 0$$

Dus $f$ is complex differentieerbaar in $a$, met afgeleide $f'(a) = Df(a)(1)$.

De laatste bewering is in het bovenstaande eveneens bewezen. $\square$

In het vervolg noteren we de complexe variabele met $z$ en schrijven we $x = \mathrm{Re}(z)$ en $y = \mathrm{Im}(z)$, zo dat $z = x + iy$. Een punt $z \in \mathbb{C}$ identificeren we met het punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**Gevolg 2.30** *Veronderstel dat $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is in $a \in U$. Dan is $f$ ook partieel differentieerbaar in $a$ en er geldt dat*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a).$$

**Bewijs** Uit het voorgaande resultaat volgt dat $f$ totaal differentieerbaar is in $a$. Dus $f$ is partieel differentieerbaar in $a$, met partiële afgeleiden:

$$D_1 f(a) = Df(a)(1,0) = Df(a)(1) = f'(a) \cdot 1 = f'(a)$$

en

$$D_2 f(a) = Df(a)(0,1) = Df(a)(i) = iDf(a)(1) = if'(a).$$

Gebruik nu dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = D_1 f(a) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = D_2 f(a).$$

□

**Opmerking 2.31** Is $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar in $a$, dan geldt wegens het bovenstaande dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a). \tag{2.16}$$

Ontbinden we $f$ in reëel en imaginair deel, $f = f_1 + if_2$, dan geldt dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(a), \quad \text{en} \quad \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = -i\frac{\partial f_1}{\partial y}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a)$$

We kunnen derhalve de vergelijking (2.16) componentsgewijs herschrijven als

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(a), \quad \text{en} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(a).$$

Deze vergelijkingen staan bekend als de *Cauchy-Riemann vergelijkingen.*

⊘

**Lemma 2.32** *Laat $f : U \to \mathbb{C}$ een functie zijn, $U \subset \mathbb{C}$ open. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *$f$ is complex differentieerbaar op $U$ en $f'$ is continu op $U$;*

(b) *$f$ is partieel differentieerbaar op $U$, en de partiële afgeleiden $D_1 f$ en $D_2 f$ zijn continu en voldoen aan de Cauchy–Riemann vergelijkingen.*

**Bewijs** De implicatie '$(a) \Rightarrow (b)$' is in het bovenstaande reeds bewezen.

Veronderstel nu (b). Dan is $f$ totaal differentieerbaar op $U$ en voor de totale afgeleide $Df$ geldt dat

$$Df(z)(i) = Df(z)(0,1) = D_2 f(z) = iD_1 f(z) = iDf(z)(1).$$

Combineren we dit met de lineariteit van $Df(z)$ over $\mathbb{R}$, dan zien we dat

$$Df(z)(u + iv) = uDf(z)(1) + vDf(z)(i) = (u + iv)Df(z)(1).$$

Hieruit volgt de complexe lineariteit van $Df(z)$ voor elke $z \in U$. Met Lemma 2.29 volgt nu dat (a) geldt. □

## 2.3 De inverse functiestelling

Uit de in de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' afgeleide inverse functiestelling volgt een soortgelijke stelling voor complex differentierbare functies.

**Definitie 2.33 (Complex diffeomorfisme)** Laten $U, V \subset \mathbb{C}$ open zijn. Onder een *complex diffeomorfisme* van $U$ op $V$ verstaan we een bijectie $f : U \to V$, zo dat de afbeeldingen $f$ en $f^{-1}$ beide $C^1$ complex differentieerbaar zijn. $\oslash$

**Stelling 2.34 (Lokale inverse functiestelling)** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open en $\alpha \in U$. Laat $f : U \to \mathbb{C}$ een $C^1$ complex differentieerbare functie zijn, zo dat $f'(\alpha) \neq 0$. Dan bestaat er een open omgeving $\Omega$ van $\alpha$ in $U$ zo dat $f|_\Omega$ een complex diffeomorfisme is van $\Omega$ op een open deel van $\mathbb{C}$. Voor de complexe afgeleide van de inverse $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ geldt dat*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \qquad (z \in \Omega).$$

**Bewijs** Er geldt dat $f$ in $\alpha$ differentieerbaar is met als afgeleide $Df(\alpha) : w \mapsto f'(\alpha)w$. Hieruit volgt dat $Df(\alpha)$ inverteerbaar is met als inverse de reëel lineaire afbeelding $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door $w \mapsto f'(\alpha)^{-1}w$. Met de inverse functiestelling voor $C^1$ functies $\mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}^2$ volgt het bestaan van een open omgeving $\Omega$ van $\alpha$ in $U$ zo dat $f(\Omega)$ open is in $\mathbb{C}$ en zo dat $f|_\Omega : \Omega \to f(\Omega)$ een $C^1$ diffeomorfisme is. De inverse $g : f(\Omega) \mapsto \Omega$ is dus ook $C^1$. Zij $z \in \Omega$. Dan geldt voor de afgeleide van $g$ in $f(z)$ dat

$$Dg(f(z)) = Df(z)^{-1}.$$

Uit de complexe differentieerbaarheid van $f$ volgt dat $Df(z)(h) = f'(z)h$ voor alle $h \in \mathbb{C}$, We leiden hieruit af dat

$$Dg(f(z))(h) = f'(z)^{-1}h$$

Hieruit blijkt dat $Dg(f(z)) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complex lineair is. Dus $g$ is complex differentieerbaar, en de complexe afgeleide wordt gegeven door

$$g'(f(z)) = Dg(f(z))(1) = \frac{1}{f'(z)}.$$

$\square$

**Stelling 2.35 (Globale inverse functiestelling)** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open, en $f : U \to \mathbb{C}$ een injectieve $C^1$ complex differentieerbare afbeelding zo dat $f'(z) \neq 0$ voor alle $z \in U$. Dan is $f(U)$ open en $f : U \to f(U)$ een complex diffeomorfisme.*

**Bewijs** De afbeelding $f$ is $C^1$ en injectief. Voor $z \in U$ geldt dat $Df(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven wordt door $h \mapsto f'(z)h$. Deze afbeelding is injectief. Door toepassing van de inverse functiestelling voor afbeeldingen $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ volgt dat $f(U)$ open is en $f : U \to f(U)$ een $C^1$ diffeomorfsme. De afbeelding $g = f^{-1}$ is $C^1$ met als afgeleide $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$Dg(f(z)) : h \mapsto Df(z)^{-1}(h) = \frac{1}{f'(z)}h.$$

Deze afgeleide is dus complex lineair. Er volgt dat $g$ complex differentieerbaar is met als complexe afgeleide

$$g'(f(z)) = Dg(f(z))(1) = \frac{1}{f'(z)}.$$

□

## 2.4 Differentieerbaarheid van machtreeksen

Een functie gedefinieerd door een machtreeks, kan gedifferentieerd worden door de machtreeks term voor term te differentiëren. De volgende twee lemma's dienen als voorbereiding op dit resultaat.

**Lemma 2.36** *De machtreeks $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ heeft convergentiestraal* $1$.

**Bewijs** Er geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n}{1+1/n} = 1.$$

Hieruit volgt met Gevolg 2.20 dat de convergentiestraal van de machtreeks gelijk is aan $1$. □

**Lemma 2.37** *Zij $\rho$ de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$. Dan heeft de machtreeks*

$$\sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1} \tag{2.17}$$

*die hieruit door termsgewijze differentiatie ontstaat ook convergentiestraal $\rho$.*

**Bewijs** Stel dat $|z| < \rho$. Kies een willekeurig reëel getal $r$ zo dat $|z| < r < \rho$. Uit de convergentie van $\sum_{n\geq 0} c_n r^n$ volgt dat $\lim_{n\to\infty} c_n r^n = 0$, dus er bestaat een $M > 0$ zo dat voor alle $n$ geldt $|c_n r^n| \leq M$, ofwel

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n},$$

dus

$$|n c_n z^{n-1}| \leq n \frac{M}{r} \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}.$$

Volgens Lemma 2.36 heeft de reeks $\sum n w^{n-1}$ convergentiestraal 1. Met het majorantiecriterium zien we nu dat de reeks (2.17) convergeert voor $|z| < r$. Dit geldt voor iedere $r < \rho$, dus de reeks (2.17) heeft convergentiestraal minstens $\rho$. De convergentiestraal kan echter niet groter dan $\rho$ zijn. Want in dat geval zou er een $z$ met $|z| > \rho$ bestaan waarvoor de reeks (2.17) absoluut convergeert. Wegens

$$|c_n z^n| \leq |n c_n z^{n-1}|$$

voor $n \geq |z|$ zou daaruit door toepassing van het majorantiekenmerk de absolute convergentie van de reeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ volgen, tegenspraak. □

**Stelling 2.38** *Laat de machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ convergentiestraal $\rho > 0$ hebben. Dan is de functie $f : D(0;\rho) \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

*complex differentieerbaar, met afgeleide gegeven door*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} \quad (|z| < \rho).$$

**Bewijs** Fixeer $z_0$ met $|z_0| < \rho$; kies $r$ zo dat $|z_0| < r < \rho$. We merken op dat voor elke $n \geq 1$ en alle $w \in \bar{D}(z_0;r)$ geldt dat

$$w^n - z_0^n = (w - z_0) g_n(w),$$

waarbij de functie $g_n : \bar{D}(0;r) \to \mathbb{C}$ gedefinieerd is door:

$$g_n(w) = c_n \left( z_0^{n-1} + z_0^{n-2} w + \cdots + w^{n-1} \right). \tag{2.18}$$

De functie $g_n$ is continu op $\bar{D}(0;r)$ en voldoet aan

$$g_n(z_0) = n c_n z_0^{n-1}.$$

Zij voorts $g_0$ de constante functie 0. Voor elke $w \in \bar{D}(0;r)$ geldt:

$$|g_n(w)| \leq |c_n| \left( |z_0|^{n-1} + |z_0|^{n-2}|w| + \cdots + |w|^{n-1} \right) \leq n|c_n| r^{n-1}.$$

Uit het uniforme majorantiekenmerk gecombineerd met Lemma 2.37 volgt nu dat de reeks $\sum_{n\geq 0} g_n$ uniform convergeert op $\bar{D}(z_0;r)$. De somfunctie is derhalve continu in $z_0$, dus

$$\lim_{w\to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} = \lim_{w\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}.$$

Hieruit volgt dat $f$ complex differentieerbaar is in $z_0$, met de gewenste reeks voor de afgeleide. $\square$

Door herhaald toepassen van de bovenstaande stelling volgt direkt:

**Gevolg 2.39** *Een machtreeks stelt binnen zijn convergentiecirkel een willekeurig vaak complex differentieerbare functie voor. Heeft $\sum_{n\geq 0} c_n (z-\alpha)^n$ convergentiestraal $\rho > 0$ en is*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-\alpha)^n, \qquad (|z-\alpha| < \rho),$$

*dan is $f^{(n)}(\alpha) = n! c_n$.*

**Gevolg 2.40** *Zij $r > 0$ en veronderstel dat de complexe machtreeksen $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ en $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ convergent zijn op $D(0;r)$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) $a_n = b_n$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *voor alle* $z \in D(0;r)$.

**Bewijs** De implicatie '$(a) \Rightarrow (b)$' is evident. De andere implicatie is een direct gevolg van Gevolg 2.39. $\square$

## 2.5 De exponentiële en de logaritmische functie

We kunnen Stelling 2.38 gebruiken om de *complexe $e$-macht* in te voeren.

**Stelling 2.41** *Er is een unieke complex differentieerbare functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ met $f' = f$ en $f(0) = 1$. Deze functie voldoet aan*

$$f(z + w) = f(z)f(w), \qquad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{2.19}$$

*en wordt gegeven door*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{2.20}$$

**Bewijs** Schrijf $c_n = 1/n!$. Dan geldt dat

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Met Gevolg 2.20 volgt hieruit dat de reeks (2.20) convergentiestraal $\infty$ heeft, dus convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$. Met Lemma 2.37 volgt hieruit weer dat $f$ complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$, met afgeleide $f' = f$. Het is evident dat $f(0) = 1$, dus het bestaan van $f$ is aangetoond.

We gaan nu de uniciteit van $f$ en tegelijkertijd (2.19) aantonen. De functie $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$\varphi(z) := f(z)f(-z)$$

is complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$, met afgeleide gelijk aan:

$$\varphi'(z) = f'(z)f(-z) - f(z)f'(-z) = 0$$

(gebruik produkt en kettingregel). Wegens Gevolg 2.30 volgt hieruit dat $D_1\varphi = D_2\varphi = 0$, dus $\varphi$ is constant op $\mathbb{C}$. Door $z = 0$ te substitueren vinden we dat $\varphi = 1$, dus $f(z)f(-z) = 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Hieruit concluderen we dat $f(z) \neq 0$ voor alle $z$ en

$$f(z)^{-1} = f(-z).$$

Laat $w \in \mathbb{C}$ willekeurig, maar vast zijn. Laat $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar zijn en voldoen aan $g' = g$ en $g(0) = 1$. Dan is de functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$h(z) := f(z)^{-1}g(z + w)$$

complex differentieerbaar, met afgeleide

$$\begin{aligned} h'(z) &= -f(z)^{-2}f'(z)g(z+w) + f(z)^{-1}g'(z+w) \\ &= -f(z)^{-1}g(z+w) + f(z)^{-1}g(z+w) = 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $h$ constant is en gelijk aan $h(0) = g(w)$. We concluderen dat $g(z + w) = f(z)g(w)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Deze conclusie geldt voor iedere $w$, dus ook voor $w = 0$, en we zien dat $g = f$. Dus $f$ is uniek, en tevens geldt (2.19). □

Op grond van de bovenstaande stelling definiëren we de complexe $e$-macht door

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Voor $z \in \mathbb{R}$ komt deze definitie overeen met de vroeger gegeven definitie. Wegens bovenstaande stelling geldt dat

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z \qquad \text{op } \mathbb{C}.$$

Tevens gelden de volgende eigenschappen:

(a) $e^0 = 1$;

(b) $e^z e^{-z} = 1$;

(c) $e^{z+w} = e^z e^w$;

voor alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Over e-machten met imaginaire exponent merken we nog het volgende op.

**Lemma 2.42** *Voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt $|e^{it}| = 1$. Bovendien is de functie $t \mapsto e^{it}, \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differentieerbaar, met afgeleide*

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it}. \tag{2.21}$$

**Bewijs** Voor een complex getal $z = x+iy$ is de complex geconjugeerde gedefinieerd door $\bar{z} = x-iy$. We merken op dat de afbeelding $z \mapsto \bar{z}, \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continu is, en dat $z\bar{z} = |z|^2$ en

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \text{en} \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w},$$

voor alle $z, w \in \mathbb{C}$. Schrijf $s_N(z) = \sum_{n=0}^N z^n/n!$. Dan is

$$\overline{s_N(z)} = s_N(\bar{z}).$$

Door de limiet voor $N \to \infty$ te nemen vinden we hieruit dat

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

In het bijzonder volgt hieruit dat

$$|e^{it}|^2 = \overline{e^{it}}e^{it} = e^{-it}e^{it} = 1, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Uit $\frac{d}{dz}e^z = e^z$ volgt met behulp van de Cauchy-Riemann vergelijkingen dat

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}e^{x+iy} = e^{x+iy}.$$

Door hierin $x = 0$ te nemen vinden we (2.21). $\square$

De kromme $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ ligt wegens het bovenstaande lemma op de eenheidscirkel in het complexe vlak. De snelheidsvector in $t$ wordt gegeven door

$$c'(t) = ic(t) = i(c_1(t) + ic_2(t)) = -c_2(t) + ic_1(t)$$

en wordt dus verkregen door op $c(t)$ de rotatie over hoek $\frac{\pi}{2}$ toe te passen. In het bijzonder heeft de snelheid grootte $|c'(t)| = |c(t)| = 1$. Aangezien $c(0) = e^0 = 1$, zien we dat $e^{it}$ het punt op de eenheidscirkel is dat ontstaat door vanuit het punt $(1, 0)$ in positieve richting een afstand $t$ over de eenheidscirkel af te leggen. We zijn nu gemotiveerd voor de volgende definitie.

**Definitie 2.43** De functies $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ worden gedefinieerd door

$$\cos y = \mathrm{Re}(e^{iy}), \qquad \sin y = \mathrm{Im}(e^{iy}),$$

voor $y \in \mathbb{R}$. $\oslash$

Uit $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ en de bovenstaande definitie volgt de bekende *formule van Euler*, namelijk

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Tenslotte volgt uit de machtreeksontwikkeling voor de $e$-macht dat

$$e^{iy} = \sum_{n=0} i^n \frac{y^n}{n!}.$$

Door reëel en imaginair deel te nemen vinden we dat

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(i^{2k}) \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

en

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}(i^{2k+1}) \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Dit zijn de bekende Taylorreeksontwikkelingen voor sinus en cosinus.

We zullen nog een aantal fundamentele resultaten voor de $e$-macht en de cosinus- en sinusfunctie afleiden. We noteren

$$c(t) = \mathrm{Re}\, e^{it} \quad \text{en} \quad s(t) = \mathrm{Im}\, e^{it},$$

met als doel de gebruikelijk eigenschappen van cosinus en sinus te 'vergeten'. We zullen laten zien dat deze eigenschappen een gevolg zijn van de gegeven definities.

We merken allereerst op dat $z \mapsto e^{iz}$ willekeurig vaak complex differentieerbaar is, dus $c$ en $s$ zijn willekeurig vaak differentieerbaar. De afgeleiden worden gegeven door compentsgewijs differentiëren, dus

$$c'(t) + is'(t) = \frac{d}{dt} e^{it} = ie^{it} = -s(t) + ic(t)$$

en we concluderen dat $s'(t) = c(t)$ en $c'(t) = -s'(t)$.

**Lemma 2.44** *Er is een $t > 0$ zo dat $c(t) = 0$.*

**Bewijs** Stel dat dit niet het geval is. Dan is $c$ continu op $[0, \infty[$, terwijl $c(0) = 1 > 0$ dus met de tussenwaardestelling volgt dat $c > 0$ op $[0, \infty[$. Hieruit volgt dat $s' > 0$ op $[0, \infty[$, dus $s$ is strikt monotoon stijgend op $[0, \infty[$. Hieruit volgt dat $s > 0$ op $]0, \infty[$. Zij $\delta > 0$ dan geldt wegens de middelwaardestelling dat voor iedere $t > \delta$ een $\delta < \tau < t$ bestaat zo dat

$$c(t) - c(\delta) = -s(\tau)(t - \delta) < -s(\delta)(t - \delta).$$

Hieruit volgt de schatting

$$c(t) < c(\delta) - s(\delta)(t - \delta).$$

De uitdrukking rechts wordt nul voor $t = \delta + c(\delta)/s(\delta)$, dus met de tussenwaardestelling volgt dat $c$ een nulpunt heeft in $[0, \delta + c(\delta)/s(\delta)]$. Dit is in tegenspraak met de aanname. $\square$

**Gevolg 2.45** *Er is een unieke* $t_0 \in [0, \infty[$ *met* $c(t_0) = 0$ *en* $c > 0$ *op* $[0, t_0[$.

**Bewijs** We bewijzen eerst de uniciteit. Stel dat $t_0$ en $t_0'$ deze eigenschap hebben. Dan is $t_0' \notin [0, t_0[$, dus $t_0' \geq t_0$. Om dezelfde reden volgt $t_0 \geq t_0'$. Hieruit volgt $t_0 = t_0'$. De verzameling $N := \{t \geq 0 \mid c(t) = 0\}$ is een niet leeg en naar onderen begrensd deel van $\mathbb{R}$, dus heeft een grootste ondergrens $t_0 := \inf N$. Het punt $t_0$ is een limietpunt van $N$, en uit de continuïteit van $c$ volgt dus $c(t_0) = 0$, dus $t_0 \in N$. Is $t \in [0, t_0[$, dan zou $t \in N$ impliceren dat $t_0 \leq t$, tegenspraak. Dus $t \notin N$ waaruit volgt dat $c(t) \notin 0$. Uit $c(t) > 0$ zou met de tussenwaardestelling volgen dat er een $0 < s < t$ bestaat zo dat $c(s) = 0$, dus $s \in N$ dus $t_0 \leq s$ tegenspraak. We concluderen dat $c(t) < 0$. Dus $t_0$ heeft de gewenste eigenschap. □

**Definitie 2.46 (Pi)** We definiëren $\pi := 2t_0$ met $t_0$ het kleinste nulpunt van $c : t \mapsto \cos t$ in $[0, \infty[$, als in Gevolg 2.45. ⊘

**Lemma 2.47** *De functie* $c$ *beeldt* $[0, \pi/2]$ *strikt monotoon dalend af op* $[0, 1]$. *De functie* $s$ *beeldt* $[0, \pi/2]$ *strikt monotoon stijgend af op* $[1, 0]$. *In het bijzonder geldt:* $e^{i\pi/2} = i$.

**Bewijs** Op $[0, \pi/2[$ geldt dat $c > 0$, terwijl $c = s'$. Dus $s$ is strikt monotoon stijgend op $[0, \pi/2]$. In het bijzonder volgt $s(\pi/2) \geq 0$. Omdat $|e^{it}| = 1$ geldt $c^2 + s^2 = 1$. Dus $s(\pi/2)^2 = 1 - c(\pi/2)^2 = 1$ en we concluderen dat $s(\pi/2) = 1$. Dus $s$ beeldt $[0, \pi/2]$ strikt monotoon stijgend af naar $[0, 1]$.

Uit $s > 0$ op $]0, \pi/2]$ volgt dat $c' = -s < 0$ op $]0, \pi/2]$ dus $c$ is strikt monotoon dalend op $[0, \pi/2]$, met beeld $[c(\pi/2), c(0)] = [0, 1]$. □

**Opmerking 2.48 (Opgave: Eulers formule)** Toon aan dat $e^{\pi i} + 1 = 0$. ⊘

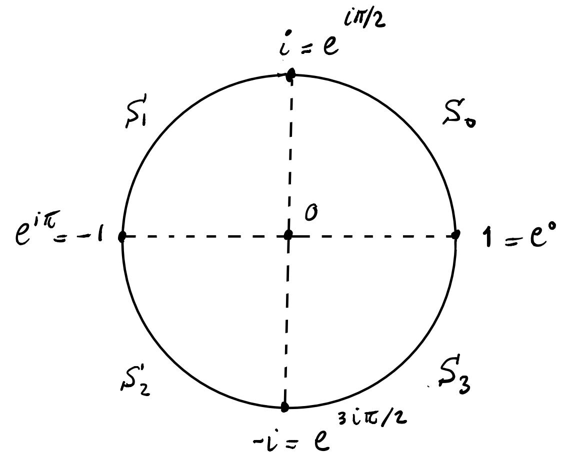
**Opmerking 2.49 (Opgave)** Bewijs dat $2\sqrt{2} < \pi$. Bewijs dat $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en leidt hieruit af dat $\pi < 4$. ⊘

**Stelling 2.50** *De afbeelding* $t \mapsto e^{it}$ *beeldt* $[0, 2\pi[$ *bijectief af op de eenheidscirkel* $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

**Bewijs** Definieer $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door $\varepsilon(t) = e^{it}$. We merken op dat $\varepsilon(\mathbb{R}) \subset S$. Beschouw de deelverzameling van $S$ bestaande uit de punten $T := \{1, i, -1, -i\}$. Er geldt dat $\varepsilon(k\pi/2) = \varepsilon(\pi/2)^k = i^k$. Hieraan zien we dat $\varepsilon$ de collectie $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ bijectief afbeeldt op $T$. We verdelen $S \setminus T$ in vier disjuncte delen, $S_0, \ldots, S_3$. Hierin is

$$\begin{aligned} S_0 &:= \{z \in S \mid x, y > 0\}, \\ S_1 &:= \{z \in S \mid x < 0, y > 0\}, \\ S_2 &= \{z \in S \mid x, y < 0\}, \\ S_3 &= \{z \in S \mid x > 0, y < 0\}. \end{aligned}$$

Het is nu voldoende om aan te tonen dat $\varepsilon$ ieder interval $]k\pi/2, (k+1)\pi, 2[$ bijectief afbeeldt op $S_k$, voor $k = 0, 1, 2, 3$.




Opdeling van de eenheidscirkel bij Stelling 2.50

We tonen dit eerst aan voor $k = 0$. Omdat $\varepsilon = c + it$ volgt uit het bovenstaande lemma dat $\varepsilon$ het interval $]\,0, \pi/2\,[$ afbeeldt naar $S_0$. De beperking van $c$ tot $[0, \pi/2]$ is injectief, dus $\varepsilon|_{]\,0,\pi/2\,[}$ is dat ook. We zullen nu aantonen dat $\varepsilon(]0, \pi/2[) = S_0$. Zij daartoe $z = x + iy \in S_0$. Dan is $0 < x, y$ en omdat $x^2 + y^2 = 1$ vinden we dat $0 < x, y < 1$. Er is dus een unieke $t \in ]0, \pi/2[$ zo dat $c(t) = x$. Er geldt $s(t) > 0$ en $s(t)^2 = 1 - x^2 = y^2$. Omdat $y > 0$ volgt dat $s(t) = y$. We zien dat $z = c(t) + is(t) = \varepsilon(t)$. Dus $\varepsilon$ beeldt $]0, \pi/2[$ bijectief af op $S_0$.

Zij $J : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de afbeelding $z \mapsto iz$. Met eenvoudige algebraïsche argumenten volgt dat $J^k$ de verzameling $S_0$ bijectief afbeeldt op $S_k$, voor $0 \leq k \leq 3$. Hieruit volgt dat $J^k \circ \varepsilon$ de verzameling $]0, \pi/2[$ bijectief afbeeldt op $S_k$. Anderzijds is

$$J^k \circ \varepsilon(t) = i^k e^{it} = e^{ik\pi/2} e^{it} = \varepsilon(i(t + k\pi/2)).$$

Aangezien de translatie $t \mapsto t + k\pi/2$ het interval $]0, \pi/2[$ bijectief afbeeldt op $]k\pi/2, (k + 1)\pi/2[$, volgt dat $\varepsilon$ dat laatste interval bijectief afbeeldt op $S_k$. □

**Gevolg 2.51** *Als $z \in \mathbb{C}$ dan is $e^z = 1 \iff z \in 2\pi\mathbb{Z}i$.*

**Bewijs** We merken op dat $e^{2k\pi i} = (e^{\pi i})^{2k} = (i^2)^{2k} = (-1)^{2k} = 1$. Uit $z \in 2\mathbb{Z}\pi i$ volgt dus $e^z = 1$.

Stel omgekeerd dat $e^z = 1$. Schrijf $z = x + iy$, dan is $e^x e^{iy} = 1$ en $|e^{iy}| = 1$ dus $e^x = |e^x| = 1$ waaruit volgt $x = 0$ en $e^{iy} = 1$. Er is een $k \in \mathbb{Z}$ zo dat $y - 2k\pi i \in [0, 2\pi[$. Aangezien

$$e^{iy - 2k\pi i} = e^{iy}(e^{2k\pi i}) = e^{iy} = 1$$

volgt nu dat $y - 2k\pi i = 0$. Dus $z = 2k\pi i$. □

We komen nu tot een belangrijk gevolg. Zij $\varphi \in \mathbb{R}$ en zij $L_\varphi$ de gesloten halflijn in $\mathbb{C}$ bestaande uit de punten $-re^{i\varphi}$, met $r \geq 0$.

**Gevolg 2.52** *De afbeelding $z \mapsto e^z$ is een complex diffeomorfisme van $\mathbb{R} + i\,]\varphi - \pi, \varphi + \pi[$ op $\mathbb{C} \setminus L_\varphi$.*

**Bewijs** Noem de afbeelding $f$. Dan is met het voorgaande gemakkelijk in te zien dat $f$ een bijectie is van de open verzameling $U := \mathbb{R} + i\,]\varphi - \pi, \varphi + \pi[$ in $\mathbb{C}$ naar de open verzameling $V := \mathbb{C} \setminus L_\varphi$. (verifieer dit!).

De afbeelding is bovendien $C^1$ complex differentieerbaar, en er geldt dat $f'(z) = e^z \neq 0$ voor alle $z \in U$. Met de inverse functiestelling volgt nu dat $f$ een complex diffeomorfisme van $U$ op $V$ is. $\square$

Zij $\varphi \in \mathbb{R}$, dan noteren we met

$$\log_\varphi : \mathbb{C} \setminus L_\varphi \to \mathbb{C}$$

de ($C^1$ complex differentieerbare) inverse van het complexe diffeomorfisme

$$z \mapsto e^z, \quad \mathbb{R} + i\,]\,\varphi - \pi, \varphi + \pi\,[ \to \mathbb{C} \setminus L_\varphi.$$

Deze inverse noemen we *ook wel een keuze (of tak)* van de logaritmische functie op $\mathbb{C} \setminus L_\varphi$.

Uit $e^{x+iy} = w$ volgt dat $e^x = |w|$, dus $x = \log|w|$. We zien hieraan dat $\operatorname{Re}\log_\varphi(w) = \log|w|$. Het imaginaire deel $\operatorname{Im}\log_\varphi(w)$ noemen we een keuze van het argument op $\mathbb{C} \setminus L_\varphi$. Het is gebruikelijk de $\varphi$ in deze notaties weg te laten, en te specificeren dat een bepaalde keuze gemaakt is.

Voor $\varphi = 0$ krijgen we de zogenaamde *hoofdwaarde* van de logaritme die gegeven wordt door de formule

$$\log w = \log|w| + i \arg w, \quad |\arg w| < \pi.$$

**Opmerking 2.53 (Opgave)** Toon aan dat voor iedere tak van de logaritme geldt dat

$$\frac{d}{dw}\log w = \frac{1}{w}.$$

$\oslash$

Gebruikmakend van een tak van de logaritme definiëren we, voor $\mu \in \mathbb{C}$, (een tak van) de machtsfunctie $z \mapsto z^\mu$ door

$$z^\mu := e^{\mu \log z}$$

**Opmerking 2.54 (Opgave)** Toon aan dat de machtsfunctie complex differentieerbaar is op zijn definitiegebied en dat

$$\frac{d}{dz}z^\mu = \mu z^{\mu-1}.$$

$\oslash$

## 2.6 Analytische functies en analytische voortzetting

Laat in het vervolg $V$ een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : V \to \mathbb{C}$ een analytische functie. Volgens Definitie 2.22 betekent dit dat er voor elk punt $a \in V$ een in $V$ gelegen open cirkelschijf $D$ met middelpunt $a$ bestaat zo dat $f$ op $D$ gegeven wordt door een machtreeks:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n \tag{2.22}$$

met $c_n \in \mathbb{C}$.

Wegens Stelling 2.38 en Gevolg 2.39 is de analytische $f : V \to \mathbb{C}$ willekeurig vaak complex differentieerbaar, en zijn de afgeleide functies $f^{(n)}$ weer analytisch. Verder moeten de coëfficiënten in (2.22) wegens Gevolg 2.39 gelijk zijn aan

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{2.23}$$

Derhalve is de machtreeksontwikkeling overal uniek bepaald door de functie.

Een belangrijk resultaat is de volgende stelling, die in schril contrast staat met de situatie voor differentieerbare functies van één reële variabele.

**Stelling 2.55** *Zij $V \subset \mathbb{C}$ open, en $f : V \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar. Dan is $f$ analytisch op $V$. In het bijzonder is $f$ willekeurig vaak complex differentieerbaar op $V$.*

Voor het bewijs van deze bijzondere stelling, dat berust op een toepassing van de stelling van Cauchy voor gesloten complexe lijnintegralen, verwijzen we naar het volgende hoofdstuk.

We sluiten dit hoofdstuk af met het principe van analytische voortzetting. We behandelen eerst het geval van de schijf.

**Lemma 2.56** *Zij $\alpha \in \mathbb{C}$, $R > 0$ en veronderstel dat $f$ op $D(\alpha; R)$ gegeven wordt door een convergente machtreeks. Zij $(\alpha_j)_{j\geq 0}$ een rij punten in $D(\alpha; R) \setminus \{\alpha\}$ met $\alpha_j \to \alpha$ voor $j \to \infty$. Als $f(\alpha_j) = 0$ voor alle $j \geq 0$ dan is $f = 0$ op $D(\alpha : R)$.*

**Bewijs** Laat $f$ gegeven worden door de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k.$$

Het is voldoende te laten zien dat $c_n = 0$ voor alle $n \geq 0$. We doen dit met inductie naar $n$. Er geldt

$$c_0 = f(\alpha) = \lim_{j\to\infty} f(\alpha_j) = 0.$$

Veronderstel dat $n \geq 1$ en dat de bewering bewezen is voor strikt kleinere waarden van $n$. Definieer de functie $g : D(\alpha; R) \to \mathbb{C}$ door

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n+k} (z-\alpha)^k.$$

Deze machtreeks heeft dezelfde convergentiestraal als die voor $f$, dus is convergent op $D(\alpha; R)$. Bovendien geldt wegens de inductiehypothese dat

$$(z-\alpha)^n g(z) = f(z)$$

Uit $f(\alpha_j) = 0$ volgt daarom $g(\alpha_j) = 0$ voor alle $j \geq 0$. Als in het eerste deel van het bewijs leiden we hieruit af dat $g(\alpha) = 0$, dus $c_n = 0$. □

Een belangrijk gevolg is het volgende principe van analytische voortzetting in een boogsamenhangende open verzameling.

**Stelling 2.57 (Analytische voortzetting)** *Laat $U \subset \mathbb{C}$ een boogsamenhangende open verzameling zijn, en $f : U \to \mathbb{C}$ een analytische functie. Veronderstel dat $\alpha \in U$ en $(\alpha_j)$ een rij punten in $U \setminus \{\alpha\}$ zo dat $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \alpha$. Als $f(\alpha_j) = 0$ voor alle $j \geq 0$ dan is $f = 0$ op $U$.*

**Bewijs** We beschouwen de verzameling $V$ van punten $z \in U$ waarvoor een open schijf $D(z;\delta) \subset U$ bestaat zo dat $f = 0$ op $D(z;\delta)$. Het is evident dat $V$ open is in $U$. We zullen de claim aantonen dat $V$ ook gesloten is. Stel niet, dan bestaat er een limietpunt $\beta \in U$ van $V$ met $\beta \notin V$. Er bestaat een open schijf $D$ rond $\beta$ in $U$ waarop $f$ gegeven wordt door een convergente machtreeks rond $\beta$. Voorts is er een rij $(\beta_j)$ in $V \cap D$ die convergeert met limiet $\beta$. Voor alle $j$ geldt $\beta_j \in V$ dus $f(\beta_j) = 0$ en $\beta_j \neq \beta$. Met Lemma 2.56 volgt dat $f = 0$ op $D$, dus $\beta \in V$, tegenspraak. Dit bewijst de claim dat $V$ gesloten is. Uit Lemma 2.56 volgt tevens dat $\alpha \in V$. Pas nu het onderstaande lemma toe om te concluderen dat $V = U$. □

**Lemma 2.58** *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ een boogsamenhangende open deelverzameling. Is $V \subset U$ open en gesloten in $U$, dan is $V = \emptyset$ of $V = U$.*

**Bewijs** Veronderstel dat $V$ een punt $a$ bevat. Zij $b \in U$. Dan is er een continue kromme $\gamma : [0,1] \to U$ met $\gamma(0) = a$ en $\gamma(1) = b$. Het is voldoende te bewijzen dat $\gamma([0,1]) \subset V$ ofwel dat $\gamma^{-1}(V) = [0,1]$. Uit de continuïteit van $\gamma$ volgt dat $T := \gamma^{-1}(V)$ open en gesloten is in $[0,1]$. In het onderstaande lemma wordt aangetoond dat dit impliceert dat $T = \emptyset$ of $T = [0,1]$. Aangezien $0 \in T$ concluderen we dat $T = [0,1]$. □

**Lemma 2.59** *Zij $T$ een open en gesloten deel van $[0,1]$. Dan geldt $T = \emptyset$ of $T = [0,1]$.*

**Bewijs** Veronderstel dat $T \neq \emptyset$ en kies $t_0 \in T$. We beschouwen de verzameling $T_+$ van $t \in [t_0, 1]$ waarvoor $[t_0, t] \subset T$. Deze verzameling is niet-leeg en naar boven begrensd, dus heeft een kleinste bovengrens $\tau = \sup T_+$. Deze $\tau$ is een verdichtingspunt van de gesloten verzameling $T_+$ dus behoort tot $T_+$. Stel $\tau < 1$. Uit het open zijn van $T$ in $[0,1]$ volgt het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat $\tau + \delta < 1$ en $[\tau, \tau+\delta[ \subset T$. Hieruit volgt dat $[t_0, \tau+\delta[ \subset T$, dus $\tau + \delta/2 \in T_+$, en dus $\tau + \delta/2 \leq \tau$ tegenspraak. We concluderen dat $[t_0, 1] \subset T$.

Door dezelfde redenering toe te passen op de deelverzameling $-T + 1$ van $[0,1]$ concluderen we dat $[0, t_0] \subset T$. Hieruit volgt dat $[0,1] \subset T$. □

Het is duidelijk dat de eigenschap die een centrale rol speelt in de Lemma's 2.58 en 2.59 zo belangrijk is dat zij een aparte naam verdient.

**Definitie 2.60** Een metrische ruimte $(V, d)$ heet *samenhangend* indien iedere open en gesloten deelverzameling van $V$ leeg is of gelijk aan $V$. $\oslash$

Het bovenstaande lemma zegt dat $[0,1]$ (voorzien van de beperking van de Euclidische metriek) samenhangend is. Lemma 2.58 heeft de generalisatie dat een boogsamenhangende metrische ruimte samenhangend is. We merken tenslotte nog op dat voor open delen van $\mathbb{R}^n$ de omkering geldt.

**Lemma 2.61** *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *$U$ is samenhangend;*

(b) *$U$ is boogsamenhangend.*

**Bewijs** We implicatie '(b) $\implies$ (a)' is het onderwerp van Lemma 2.58. We mogen ons dus beperken tot de omgekeerde implicatie.

Stel (a). We mogen veronderstellen dat $U \neq \emptyset$. Op $U$ introduceren we de relatie $\sim$ door: $x \sim y$ geldt dan en slechts dan als er een continue kromme $\gamma : [0,1] \to U$ bestaat met beginpunt $x$ en eindpunt $y$. We zeggen dat zo'n kromme $\gamma$ de punten $x$ en $y$ verbindt. De constante kromme $t \mapsto x$ verbindt $x$ met zichzelf. Als $\gamma$ de punten $x$ en $y$ verbindt, dan verbindt de omkering $\gamma^\vee$ de punten $y$ en $x$. De relatie $\sim$ is dus reflexief en symmetrisch. We zullen laten zien dat $\sim$ ook transitief is, dus een equivalentierelatie. Laat $x, y, z \in U$ en veronderstel $x \sim y$ en $y \sim z$. Dan is er een kromme $\gamma_1$ die $x$ en $y$ verbindt en een kromme $\gamma_2$ die $y$ en $z$ verbindt. De samengestelde kromme $\gamma_1\gamma_2$ verbindt $x$ en $z$, dus $x \sim z$. Dus $\sim$ is inderdaad een equivalentierelatie.

Laat $C$ een equivalentieklasse voor $\sim$ zijn. Zij $c \in C$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat $B(c;\delta) \subset U$. Voor iedere $x \in B(c;\delta)$ geldt $x \sim c$, dus $B(c;\delta) \subset C$. We concluderen dat $C$ open is. Het complement van $C$ is een vereniging van (open) equivalentieklassen, dus open. We concluderen dat $C$ zowel open als gesloten is. Een equivalentieklasse is per definitie niet leeg, dus uit de samenhang van $U$ volgt dat $C = U$. Hieruit volgt (b). $\square$

**Voorbeeld 2.62** We eindigen deze paragraaf met een voorbeeld van analytische voortzetting. De functies $\cos$ en $\sin$ zijn analytisch op $\mathbb{C}$ dus complex differentieerbaar $C^1$. Derhalve is de functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = (\cos z)^2 + (\sin z)^2 - 1$ complex differentieerbaar $C^1$, en dus analytisch op $\mathbb{C}$. De functie $f$ is nul op $\mathbb{R}$ en omdat $\mathbb{C}$ boogsamenhangend en open in $\mathbb{C}$ is volgt met analytische voortzetting dat $f = 0$ op $\mathbb{C}$. Op deze manier ziet men direct in dat allerlei analytische identiteiten die op een beperkt deel van een samenhangende open verzameling gelden, ook op de gehele open verzameling gelden.

Uiteraard kan in dit voorbeeld de identiteit

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

direct uit de definities van $\sin$ en $\cos$ bewezen worden door de vermenigvuldigingseigenschap van de exponentiële functie te gebruiken. $\oslash$

**Voorbeeld 2.63** De exponentiële functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ voldoet aan $e^x e^u = e^{x+u}$ voor alle $x, u \in \mathbb{R}$. Wegens Taylor met rest en schattingen voor de restterm geldt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

De machtreeks $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ convergeert voor alle $z \in \mathbb{R}$ en heeft dus convergentiestraal $\infty$. Hieruit volgt dat door

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

een analytische voortzetting van $x \mapsto e^x$ tot $\mathbb{C}$ gedefinieerd is. De functie $z \mapsto f(z+u) - f(z)f(u)$ is analytisch, en is nul voor $z \in \mathbb{R}$. Wegens analytische voortzetting concluderen we dat $f(z+u) - f(z)f(u) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ en $u \in \mathbb{R}$. Door nog eens analytische voortzetting, maar nu met betrekking tot de variabele $u$ te gebruiken, vinden we dat $f(z+w) = f(z)f(w)$ voor alle $z, w \in \mathbb{C}$. Eerder was dit aangetoond in Stelling 2.41. $\oslash$

# 3 De stelling van Cauchy

## 3.1 Integratie van complexwaardige en vectorwaardige functies

In deze paragraaf zullen we de integratie van vectorwaardige functies bespreken. Aangezien $\mathbb{C}$ opgevat kan worden als $\mathbb{R}^2$, met als extra structuur de complexe vermenigvuldiging, valt hieronder ook de integratie van complexwaardige functies. We starten met de theorie voor continue functies, waarvoor Riemann-integreerbaarheid gegarandeerd is.

**Lemma 3.1** *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een continue functie. Dan is er precies één vector $I(f) \in \mathbb{R}^n$ met de eigenschap dat*

$$\langle I(f), v\rangle = \int_a^b \langle f(x), v\rangle \, dx,$$

*voor alle $v \in \mathbb{R}^n$. In het bijzonder geldt voor iedere $1 \le j \le n$ dat*

$$I(f)_j = \int_a^b f_j(x) \, dx \tag{3.1}$$

*met $f_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ de $j$-de component van de functie $f$.*

**Bewijs** We merken op dat voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ de functie $f_v : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f(x), v\rangle$ continu, dus Riemann-integreerbaar is.

Door voor $v$ achtereenvolgens de vectoren uit de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ te nemen, zien we dat $I(f)$ gegeven moet zijn door (3.1). Laat $I(f)$ door die formule gegeven zijn. Zij $v \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $v = (v_1, \dots, v_n)$. Dan is

$$\langle I(f), v\rangle = \sum_{j=1}^n v_j I(f)_j = \sum_{j=1}^n v_j \int_a^b f_j(x) \, dx = \int_a^b \sum_{j=1}^n v_j f_j(x) \, dx = \int_a^b f_v(x) \, dx.$$

□

**Definitie 3.2** Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een continue functie zijn. We definiëren de *vectorwaardige integraal* van $f$ over $[a, b]$ als de unieke vector $I(f) \in \mathbb{R}^n$ uit Lemma 3.1, en noteren deze met

$$\int_a^b f(x) \, dx := I(f).$$

⊘

Voor vectorwaardige integratie geldt de volgende *driehoeksongelijkheid.*

**Lemma 3.3** *Zij $a, b \in \mathbb{R}$, met $a < b$. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continu. Dan is de functie $\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ continu, dus Riemann-integreerbaar over $[a, b]$, en*

$$\left\| \int_a^b f(x) \, dx \right\| \le \int_a^b \|f(x)\| \, dx.$$

**Bewijs** Schrijf $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Er bestaat een $v \in \mathbb{R}^n$ met $\|v\| = 1$, zo dat $\langle I(f), v\rangle = \|I(f)\|$. (Als $I(f) \neq 0$, dan kunnen we $v = I(f)/\|I(f)\|$ nemen.) Nu geldt

$$\begin{aligned}
\|I(f)\| = \langle I(f), v\rangle &= \int_a^b \langle f(x), v\rangle\, dx \\
&\leq \int_a^b |\langle f(x), v\rangle|\, dx \\
&\leq \int_a^b \|f(x)\|\|v\|\, dx \\
&= \int_a^b \|f(x)\|\, dx.
\end{aligned}$$

□

**Gevolg 3.4** *Voor een continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ geldt dat*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

*Ook is $|f|$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Tenslotte eindigen we met de *fundamentaalstelling* voor vectorwaardige integratie.

**Lemma 3.5** *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een continue functie, en zij $F : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een primitieve van $f$, dwz. een differentieerbare functie met $F' = f$. Dan geldt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3.2}$$

**Bewijs** Dit komt omdat zowel integratie als differentiatie componentsgewijs uitgevoerd kunnen worden. Preciezer, schrijf $f = (f_1, \ldots, f_n)$ en $F = (F_1, \ldots, F_n)$. Dan geldt dat $F_j' = f_j$ voor elke $1 \leq j \leq n$. Dus geldt

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)_j = \int_a^b f_j(x)\,dx = F_j(b) - F_j(a) = (F(b) - F(a))_j.$$

De identiteit (3.2) geldt dus componentsgewijs. □

**Voorbeeld 3.6** We beschouwen de functie $\varepsilon_k : x \mapsto e^{ikx}$, voor $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dan is de functie $F(x) = (1/ik)\varepsilon_k$ een primitieve van $\varepsilon_k$. Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dus:

$$\int_a^b e^{ikx}\,dx = \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}.$$

In het bijzonder is de integraal over $[-\pi, \pi]$ gelijk aan nul. ⊘

Ook voor complexwaardige (vectorwaardige) functies bestaat een zinvol algemeen begrip van Riemann-integreerbaarheid, zonder dat daarbij continuïteit van de integrand verlangd wordt. Voor details verwijzen we naar Appendix A.

## 3.2 Complexe lijnintegralen en de stelling van Cauchy

Laat $U \subset \mathbb{C}$ open zijn. Onder een *continue kromme* in $\mathbb{C}$ verstaan we een continue afbeelding $\gamma : [a,b] \to U$, hierbij zijn $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Een dergelijke kromme heet $C^1$ indien de afbeelding $\gamma : [a,b] \to U$ differentieerbaar is met continue afgeleide $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{C}$. Via de identificatie $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ is deze definitie in overeenstemming met de eerder in de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' gegeven definitie.

**Definitie 3.7** Zij $\gamma : [a,b] \to U$ een $C^1$ kromme en $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ een continue functie. Dan is de *complexe lijnintegraal* van $f$ langs $\gamma$ gedefineerd door

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

$\oslash$

**Voorbeeld 3.8** Een belangrijk voorbeeld is de kromme $\gamma : [a,b] \to C$ gedefinieerd door

$$\gamma(t) = \alpha + re^{it}.$$

Deze kromme is in $U = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ gelegen. Zij $k \in Z$ en $f(z) = (z-\alpha)^{k-1}$, met $k \in \mathbb{Z}$. Dan is $f$ continu op $U \setminus \{\alpha\}$ en

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))rie^{it}dt = \int_a^b ir^k e^{ikt}\,dt.$$

Is $k = 0$ dan is de bovenstaande integraal gelijk aan $i(b-a)$. Is $k \neq 0$, dan is de integraal gelijk aan

$$\left[\frac{r^k}{k}e^{ikt}\right]_a^b = \frac{r^k}{k}\left[e^{ikb} - e^{ika}\right], \tag{3.3}$$

zie ook Voorbeeld 3.6. $\oslash$

Zij $a, b, c, d$ een viertal reële getallen met $a < b$ en $c < d$. Onder een $C^1$ diffeomorfisme van $[c,d]$ op $[a,b]$ verstaan we een bijectieve afbeelding $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ zo dat $\varphi$ en $\varphi^{-1}$ continu differentieerbaar zijn.

Onder een richtingsbehoudende $C^1$ herparametrisering van een $C^1$ kromme $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ naar een interval $[c,d]$ verstaan we een kromme $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ met $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ een $C^1$ diffeomorfisme zo dat $\varphi(c) = a$ en $\varphi(d) = b$. De speciale herparametrisering met

$$\varphi(t) = a + (t-c)\frac{b-a}{d-c}$$

zullen we in het vervolg de *lineaire herparametrisering* van $\gamma$ naar $[c,d]$ noemen.

**Lemma 3.9** *Zij $\tilde{\gamma}$ een richtingsbehoudende $C^1$ herparametrisering van $\gamma$, dan geldt voor iedere continue functie $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ dat*

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

**Bewijs** Met de kettingregel zien we dat $\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s)$. De integraal in het linkerlid is daarom per definitie gelijk aan

$$\int_c^d (f \circ \gamma)(\varphi(s))\, \gamma'(\varphi(s))\, \varphi'(s)\; ds.$$

Omdat de functie $t \mapsto (f \circ \varphi)(t)\gamma'(t)$ continu is volgt met de substitutiestelling voor Riemann-integratie (zie het dictaat 'Inleiding Analyse') dat

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\; dz = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(\gamma(t))\gamma'(t)\; dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\; dt = \int_\gamma f(z)\; dz.$$

□

**Opmerking 3.10 (Opgave)** Onder een richtingsomkerende $C^1$ herparametrisering van een $C^1$ kromme $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ naar een interval $[c, d]$ verstaan we een kromme van de vorm $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ met $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ een $C^1$ diffeomorfisme zo dat $\varphi(c) = b$ en $\varphi(d) = a$. Ga na dat in dit geval voor iedere continue functie $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ geldt dat

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\; dz = -\int_\gamma f(z)\; dz.$$

Een speciaal voorbeeld van een richtingsomkerende $C^1$ parametrisering is de *omkering* $\gamma^\vee : [a, b] \to \mathbb{C}$, die gedefinieerd wordt door

$$\gamma^\vee(t) = \gamma(ta + (1-t)b), \qquad (t \in [a, b]).$$

⊘

**Definitie 3.11** Een kromme $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heet *stuksgewijs* $C^1$ indien er een verdeling $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$ van het interval $[a, b]$ bestaat zo dat $\gamma_j := \gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$ van klasse $C^1$ is voor iedere $1 \leq j \leq n$. De rij $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ noemen we een $C^1$ opdeling van $\gamma$. Voor een dergelijke opdeling is de complexe lijnintegraal van een continue functie $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ langs $\gamma$ gedefinieerd door

$$\int_\gamma f(z)\; dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\; dz. \tag{3.4}$$

⊘

**Definitie 3.12** De *lengte* van een stuksgewijze $C^1$ kromme $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ (met $a < b$) is gedefinieerd door

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\; dt. \tag{3.5}$$

⊘

**Opmerking 3.13** Zij $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ een verdeling van $[a, b]$ als in Opmerking 3.11. Dan is $\gamma|_{]a_{j-1}, a_j[}$ éénduidig gedefinieerd, met een continue uitbreiding tot $[a_{-1}, a_j]$, voor iedere $1 \leq j \leq n$. Hieruit blijkt dat (3.5) éénduidig gedefinieerd is als Riemann-integraal. Merk op dat $L(\gamma) = \sum_j L(\gamma_j)$. Met substitutie van variabelen is gemakkelijk in te zien dat de lengte van een monotoon stijgende stuksgewijze $C^1$ herparametrisering van $\gamma$ gelijk is aan die van $\gamma$. ⊘

**Lemma 3.14** *Voor iedere stuksgewijze $C^1$ kromme $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ en iedere continue functie $f : \gamma([0,1]) \to \mathbb{C}$ geldt dat*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \|f\|_{\gamma([a,b])}$$

**Opmerking 3.15** We merken op dat $\gamma([a,b])$ rij-compact, dus gesloten en begrensd in $\mathbb{C}$ is, zodat de continue functie $f$ begrensd is op dit beeld, en

$$\|f\|_{\gamma([a,b])} = \sup_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| < \infty.$$

$\oslash$

We relateren de integraal uit Definitie 3.7 aan de in de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' gedefinieerde *lijnintegraal van een vectorveld.* Voor een continu vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^2$ en een $C^1$ kromme $\gamma : [a,b] \to U$ werd de lijnintegraal van $v$ langs $\gamma$ gedefinieerd door

$$\int_\gamma v(z) \cdot dz := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

In de tweede integraal wordt het standaardinproduct genomen met $\gamma'(t)$ opgevat als vector in $\mathbb{R}^2$. Deze definitie werd vervolgens uitgebreid naar stuksgewijze $C^1$ krommen door de in Opmerking 3.11 beschreven opsplitsing.

Voor een continue functie $f : U \to \mathbb{C}$ definiëren we bijbehorende continue vectorvelden $u(f)$ en $v(f)$ op $U$ door

$$u(f) = (f_1, -f_2)^{\mathrm{T}}, \quad v(f) = (f_2, f_1)^{\mathrm{T}} \tag{3.6}$$

Hierin betekent de bovenindex $\mathrm{T}$ dat de getransponeerde kolomvector genomen wordt. Het belang van de zojuist geïntroduceerde vectorvelden blijkt uit het volgende resultaat.

**Lemma 3.16** *Zij $f : U \to \mathbb{C}$ een continue functie en $\gamma : [a,b] \to U$ een stuksgewijze $C^1$ kromme. Dan is*

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma u(f)(z) \cdot dz + i \int_\gamma v(f)(z) \cdot dz. \tag{3.7}$$

**Bewijs** Het is voldoende deze bewering te bewijzen voor een $C^1$ kromme. In dat geval merken we op dat

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(f(\gamma(t))\gamma'(t)) &= f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) = \langle u(f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle. \\ \mathrm{Im}(f(\gamma(t))\gamma'(t)) &= f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) - f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) = \langle v(f)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

Door integratie naar de variabele $t$ over het interval $[a,b]$ volgt hieruit (3.7). $\square$

**Lemma 3.17** *Zij $f : U \to \mathbb{C}$ een $C^1$ functie. Dan zijn de volgende twee beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De vectorvelden $u(f)$ en $v(f)$ gedefinieerd door (3.6) zijn rotatievrij.*

(b) *De functie $f$ is complex differentieerbaar.*

**Bewijs** Aangezien $f$ een $C^1$ functie is zijn $u := u(f)$ en $v := v(f)$ dat ook. Conditie (a) is nu gelijkwaardig met de vergelijkingen

$$D_1 u_2 = D_2 u_1, \quad \text{en} \quad D_1 v_2 = D_2 v_1.$$

Wegens (3.6) zijn dit precies de Cauchy-Riemann vergelijkingen voor $f$. Deze zijn vervuld dan en slechts dan als (b) geldt. □

**Definitie 3.18 (Holomorfe functie)** Zij $U \subset \mathbb{C}$ open. Een *holomorfe functie* op $U$ is een functie $f : U \to \mathbb{C}$ die $C^1$ is en voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. De collectie van dergelijke functies wordt genoteerd met $\mathcal{O}(U)$. ⊘

**Opmerking 3.19** Een holomorfe functie $f \in \mathcal{O}(U)$ is complex differentieerbaar op $U$ wegens Lemma 2.32. Omgekeerd is iedere complex differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{C}$ holomorf. Dit niet-triviale resultaat staat bekend als de *stelling van Goursat*. Zie de opgavencollectie voor een bewijs ervan. ⊘

In de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' zagen we dat voor een rotatievrij vectorveld $w$ op $U$ het begrip lijnintegraal uitgebreid kan worden van de klasse van stuksgewijze $C^1$ krommen naar de klasse van continue krommen. Deze uitbreiding is gebaseerd op het feit zo'n vectorveld $w$ lokaal een *primitieve* heeft, dwz een $C^2$-functie $F : U \supset\!\!\to \mathbb{R}$ met $\operatorname{grad} F = w$. Een soortgelijke uitgebreiding is mogelijk voor lijnintegralen van holomorfe functies. De uitbreiding is gebaseerd op het feit dat ook holomorfe functies lokaal een primitieve hebben.

**Definitie 3.20 (Primitieve)** Zij $U \subset \mathbb{C}$ open en $f : U \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie. Onder een *primitieve* van $f$ op $U$ verstaan we een holomorfe functie $F : U \to \mathbb{C}$ zo dat $f = F'$. ⊘

**Lemma 3.21** *Zij $f : U \to \mathbb{C}$ holomorf, en $F : U \to \mathbb{C}$ een functie. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *$F$ is een primitieve van $f$;*

(b) *$\operatorname{Re} F$ is een primitieve van $u(f)$ en $\operatorname{Im} F$ is een primitieve van $v(f)$.*

**Bewijs** We schrijven $u := u(f)$ en $v := v(f)$, zie ook (3.6). Zowel (a) als (b) impliceert dat $F$ een $C^1$ functie is. Het is daarom voldoende de gelijkwaardigheid van (a) en (b) te bewijzen onder de aanname dat $F$ een $C^1$ functie is. In dat geval is (a) is equivalent met de uitspraak dat voor elke $z \in U$ de afbeelding $DF(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven wordt door de complexe vermenigvuldiging $w \mapsto f(z)w$. Dit is equivalent met

$$DF(z) = \begin{pmatrix} f_1(z) & -f_2(z) \\ f_2(z) & f_1(z) \end{pmatrix}.$$

Dit laatste is equivalent met de uitspraak

$$DF(z) = \begin{pmatrix} u(z)^{\mathrm{T}} \\ v(z)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

hetgeen weer equivalent is met $DF_1(z) = u(z)^{\mathrm{T}}$ en $D_2F(z) = v(z)^{\mathrm{T}}$. De uitspraak (a) is daarom equivalent met $\operatorname{grad} F_1 = u$ en $\operatorname{grad} F_2 = v$, dus met (b). □

**Gevolg 3.22** *Zij $D$ een open schijf in $\mathbb{C}$ en $f : D \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie. Dan heeft $f$ een primitieve $F$ op $D$. De collectie van primitieven van $f$ op $D$ wordt gevormd door de functies $F + C$ met $C$ een constante functie op $D$.*

**Bewijs** Wegens Lemma 3.21 is dit het gevolg van de overeenkomstige stelling voor rotatievrije vectorvelden op $D$. $\square$

Overeenkomstig de definitie van primitieve langs een continue kromme voor rotatievrije vectorvelden geven we de volgende definitie.

**Definitie 3.23** Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een continue kromme. Zij $f \in \mathcal{O}(U)$. Onder een *primitieve* van $f$ langs $\gamma$ verstaan we een functie $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ met de volgende eigenschap. Voor iedere $t_0 \in [a, b]$ bestaan een schijfomgeving $D \subset U$ rond $\gamma(t_0)$ en een primitieve $\varphi$ van $f$ op $D$ zo dat $F = \varphi \circ \gamma$ op een open omgeving van $t_0$ in $[a, b]$. $\oslash$

Wegens Lemma 3.21 is $F$ een primitieve van $f$ langs $\gamma$ indien $\mathrm{Re}F$ en $\mathrm{Im}F$ primitieven van $u(f)$ en $v(f)$ langs $\gamma$ zijn. Daarom geldt:

**Lemma 3.24** *Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een continue kromme. Is $f \in \mathcal{O}(U)$ dan is er een unieke primitieve $F$ van $f$ langs $\gamma$ met $F(a) = 0$. De overige primitieven van $f$ langs $\gamma$ zijn van de vorm $F + C$ met $C$ een constante functie $[a, b] \to \mathbb{C}$*

Dit lemma maakt de volgende definitie eenduidig.

**Definitie 3.25** Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een continue kromme. Voor $f \in \mathcal{O}(U)$ definiëren we de integraal van $f$ langs $\gamma$ door

$$\int_\gamma^* f(z)\, dz = F(b) - F(a), \tag{3.8}$$

waarbij $F$ een primitieve van $f$ langs $\gamma$ is; het bestaan van $F$ wordt gegarandeerd door Lemma 3.24. $\oslash$

**Opmerking 3.26** In de setting van de bovenstaande definitie is $\mathrm{Re}F$ een primitieve van $u(f)$ langs $\gamma$ en $\mathrm{Im}F$ een primitieve van $v(f)$ langs $\gamma$. Dit impliceert dat

$$\int_\gamma^* F(z)\, dz = \int_\gamma^* u(z) \cdot dz + i \int_\gamma^* v(z) \cdot dz$$

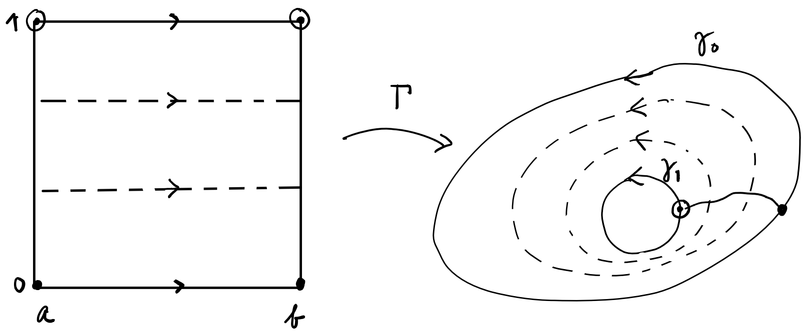
Indien $\gamma$ stuksgewijs $C^1$ is, komen de integralen in het rechterlid met de integralen zonder $*$. Wegens (3.5) geldt hetzelfde voor de integraal in het linkerlid. In het vervolg laten we daarom de $*$ weg in de notatie van de integraal in (3.8). $\oslash$

Uit de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' brengen we de volgende terminologie in herinnering. Een continue kromme $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heet *gesloten* indien het *beginpunt* $\gamma(a)$ samenvalt met het *eindpunt* $\gamma(b)$.

Laten $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to U$ continue krommen zijn in de open verzameling $U \subset \mathbb{C}$. Onder een *homotopie* van $\gamma_0$ en $\gamma_1$ in $U$ verstaan we een continue afbeelding

$$\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$$

zo dat $\Gamma(\,\cdot\,, 0) = \gamma_0$ en $\Gamma(\,\cdot\,, 1)) = \gamma_1$.




Figuur: homotopie van gesloten krommen

Als de eindpunten van $\gamma_0$ en $\gamma_1$ samenvallen dat heet $\Gamma$ een *homotopie met behoud van eindpunten* indien $\Gamma(a,t) = \gamma_0(a)$ en $\Gamma(b,t) = \gamma_0(b)$ voor alle $0 \le t \le 1$.

Als $\gamma_0$ en $\gamma_1$ gesloten zijn, dan heet $\Gamma$ een *homotopie van gesloten krommen* indien $\Gamma(a,t) = \Gamma(b,t)$ voor alle $0 \le t \le 1$.

**Stelling 3.27 (Integraalstelling van Cauchy)** *Zij $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to U$ een tweetal continue krommen. Veronderstel dat een van de volgende condities vervuld is.*

(a) *$\gamma_1$ en $\gamma_2$ hebben gemeenschappelijk begin- en eindpunt en zijn in $U$ homotoop met behoud van eindpunten.*

(b) *$\gamma_1$ en $\gamma_2$ zijn gesloten en in $U$ homotoop via gesloten krommen.*

*Dan geldt voor iedere holomorfe functie $f : U \to \mathbb{C}$ dat*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{3.9}$$

**Bewijs** In de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' is bewezen dat voor ieder rotatievrij vectorveld $w$ op $U$ geldt dat

$$\int_{\gamma_1} w(z) \cdot dz = \int_{\gamma_2} w(z) \cdot dz.$$

Aangezien $u(f)$ en $v(f)$ rotatievrij zijn wegens Lemma 3.17, geldt deze identiteit voor $w = u(f)$ en voor $w = v(f)$. Door toepassing van Opmerking 3.26 volgt hieruit de geldigheid van (3.9). $\square$

We brengen in herinnering dat een gesloten kromme $\gamma$ in $U$ *samentrekbaar* in $U$ is als er een homotopie van gesloten krommen in $U$ bestaat van $\gamma$ met een constante kromme.

**Gevolg 3.28** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ en $\gamma : [a,b] \to U$ een gesloten kromme die samentrekbaar is in $U$. Dan geldt voor iedere functie $f \in \mathcal{O}(U)$ dat*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

**Voorbeeld 3.29** [1] Zij $\gamma$ de kromme uit Voorbeeld 3.8 met $a = b$. Dan is $\gamma$ gesloten en in $\mathbb{C}$ homotoop met de constante kromme $t \mapsto \alpha$. Is $k > 0$ is de integrand complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$ zo dat de bovenstaande stelling garandeert dat $\int_\gamma f(z)dx = 0$. Uit de in (3.3) gegeven berekening volgt dat

$$\int_\gamma (z-\alpha)^{k-1} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{als} \quad k = 0 \\ 0 & \text{als} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Het verdwijnen van de integraal voor $k \neq 0$ kan ook verklaard worden uit het feit dat de integrand $z \mapsto (z-\alpha)^{k-1}$ een primitieve heeft op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gecombineerd met Definitie 3.25 en Opmerking 3.26. $\oslash$

## 3.3 De formule van Cauchy en machtreeksontwikkelingen

**Definitie 3.30** Als $\alpha \in \mathbb{C}$ en $r > 0$ dan noteren we de *rand* van de open schijf $D(\alpha; r)$ met

$$\partial D(\alpha; r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| = r\}.$$

Onder de *standaardparametrisering* van $\partial D(\alpha; r)$ verstaan we de gesloten kromme $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\sigma(t) = \alpha + re^{it}$. Is $f : \partial D(\alpha; r) \to \mathbb{C}$ continu, dan definiëren we

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz := \int_\sigma f(z)\, dz.$$

$\oslash$

**Opmerking 3.31 (Opgave)** Uiteraard zijn er tal van andere parametriseringen van $\partial D(\alpha, r)$ denkbaar, zonder dat de waarde van de integraal verandert. Dit is in het bijzonder zo voor herparametriseringen van de standaardparametrisering. Een ander geval is de parametrisering

$$\tau : [\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad s \mapsto \alpha + re^{is}.$$

Laat zien dat $\Gamma(s,t) = \alpha + re^{i(s-t)\varphi_0}$ een homotopie van gesloten krommen definieert van $\sigma$ naar $\tau$. $\oslash$

**Lemma 3.32** *Laat $\alpha \in \mathbb{C}$, $R > 0$ en veronderstel dat $f : D(\alpha; R) \to \mathbb{C}$ continu is. Dan is*

$$\lim_{r \downarrow 0} \int_{\partial D(\alpha; r)} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz = 2\pi i f(\alpha).$$

**Bewijs** Zij $\sigma_r$ de standaardparametrisering van $\partial D(\alpha; r)$, voor $0 < r < R$. Dan is $(\sigma_r)'(t) = ire^{it}$, voor $0 \leq t \leq 2\pi$, dus

$$\int_{\partial D(\alpha; r)} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = \int_{\sigma_r} f(z)\, \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it})\; idt. \tag{3.10}$$

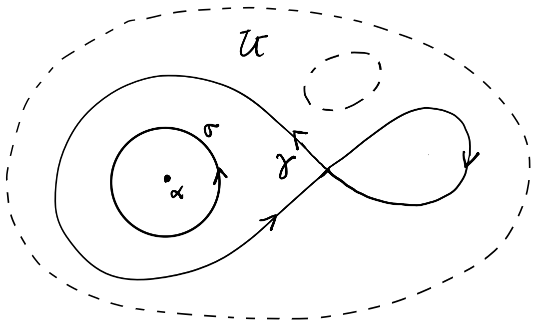
[1] liever lemma

De integrand van de derde integraal is een continue functie van $(r,t) \in [0,R] \times [0,2\pi]$. De derde integraal in (3.10) definieert dus een continue functie van $r \in [0,R]$. De limiet van die integraal voor $r \downarrow 0$ is daarom gelijk aan

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha + 0)\, idt = 2\pi i f(\alpha).$$

$\square$

**Definitie 3.33 (Eenmaal positieve winding)** Zij $U \subset \mathbb{C}$ open en $\alpha \in U$. We zeggen dat een gesloten continue kromme $\gamma : [a,b] \to U \setminus \{\alpha\}$ *éénmaal in positieve zin om $\alpha$ windt* indien er een $\rho > 0$ bestaat zo dat $\bar{D}(\alpha;\rho) \subset U$ en zo dat van $\gamma$ in $U \setminus \{\alpha\}$ als gesloten kromme homotoop is met de standaardparametrisering van $\partial D(\alpha;\rho)$. $\oslash$




Figuur: eenmaal positief rond $\alpha$

**Stelling 3.34 (Formule van Cauchy)** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open en $\alpha \in U$. Zij $\gamma$ een gesloten kromme in $U \setminus \{\alpha\}$ zo dat $\gamma$ in $U$ éénmaal positief om $\alpha$ windt. Dan geldt voor iedere holomorfe functie $f : U \to \mathbb{C}$ dat*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = 2\pi i f(\alpha). \tag{3.11}$$

**Bewijs** Vanwege de hypothese kunnen we veronderstellen dat de gesloten kromme $\gamma$ in $U \setminus \{\alpha\}$ domein $[0,2\pi]$ heeft en in $U \setminus \{\alpha\}$ als gesloten kromme homotoop is met de standaardparametrisering $\sigma_\rho$ van $D(\alpha;\rho)$, waarbij $r > 0$ en $\bar{D}(\alpha;\rho) \subset U$. Voor $r \in ]0,\rho]$ noteren we met $\sigma_r$ de standaarparametrisering van $\partial D(\alpha;r)$. Dan is $\sigma_r$ homotoop met $\sigma_\rho$ in $U \setminus \{\alpha\}$, voor alle $0 < r \le \rho$. De functie $z \mapsto (a-\alpha)^{-1} f(z)$ is holomorf op $U \setminus \{\alpha\}$. Met de integraalstelling van Cauchy, Stelling 3.27, concluderen we nu dat

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = \int_{\sigma_\rho} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz = \int_{\sigma_r} \frac{f(z)}{z-\alpha}\, dz \quad (0 < r \le \rho).$$

Met Lemma 3.32 volgt dat de integraal in het rechterlid limiet $2\pi i f(\alpha)$ heeft voor $r \downarrow 0$. Hieruit volgt (3.11). $\square$

**Opmerking 3.35 (Opgave)** Laat $R > 0$ en laat $(f_k)$ een rij in $\mathcal{O}(D(0;R))$ zijn. Veronderstel dat $(f_k)$ op $D(0;R)$ puntsgewijs convergeert, met limietfunctie $f : D(0;R) \to \mathbb{C}$. Als $f_k \to f$ uniform op $B(0;r)$ voor iedere $r < R$. Dan geldt $f \in \mathcal{O}(D(0;R))$. Hint: gebruik de formule van Cauchy. $\oslash$

Een prachtige toepassing van de formule van Cauchy is het bewijs van de volgende hoofdstelling van de algebra. Onder een *polynoomfunctie* van de graad $n \geq 0$ op $\mathbb{C}$ verstaan we een functie van de vorm $p : z \mapsto \sum_{j=0} c_j z^j$, met $c_j \in \mathbb{C}$ en $c_n \neq 0$.

**Lemma 3.36** *Zij $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een polynoomfunctie van de graad $n$. Dan zijn er constanten $C > 0$ en $R > 0$ zo dat*

$$|z| \geq R \implies |p(z)| \geq C|z|^n. \tag{3.12}$$

**Bewijs** Schrijf $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0$. Dan geldt wegens de omgekeerde driehoeksongelijkheid dat

$$|z|^{-n}|p(z)| \geq |c_n| - \sum_{j=0}^{n-1} |c_j||z|^{j-n}.$$

Voor $|z| \geq 1$ geldt dus

$$|z|^{-n}|p(z)| \geq |c_n| - |z|^{-1}(\sum_{j=1}^{n} |c_j|).$$

Kiezen we $R \geq 1$ zo dat $R^{-1} \sum_{j=1}^n |c_j| \leq |c_n|/2$, dan volgt (3.12) met $C = |c_n|/2$. $\square$

**Stelling 3.37 (Hoofdstelling van de algebra)** *Zij $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een polynoomfunctie van de graad $n \geq 1$. Dan bestaat er een $z_0 \in \mathbb{C}$ zo dat $p(z_0) = 0$.*

**Bewijs** Stel niet. Dan is de functie $z \mapsto p(z)^{-1}$ holomorf op $\mathbb{C}$. Wegens de integraalformule van Cauchy rond $\alpha = 0$ geldt dat

$$\frac{2\pi i}{p(0)} = \int_{\partial D(0;r)} \frac{1}{p(z)z} \, dz$$

voor alle $r > 0$. Kies $R, C > 0$ zo dat (3.12). Dan geldt voor alle $r \geq R$ dat

$$\frac{2\pi}{|p(0|} \leq 2\pi \sup_{|z|=r} |p(z)|^{-1} \leq \frac{2\pi}{C} r^{-n}.$$

Door de limiet voor $r \to \infty$ te nemen leiden we af dat $|p(0)|^{-1} = 0$, hetgeen onmogelijk is. $\square$

Als volgende toepassing van de integraalformule van Cauchy zullen we bewijzen dat iedere holomorfe functie *analytisch* is, dwz lokaal gegeven door machtreeksontwikkelingen. Ter voorbereiding bewijzen we het volgende.

**Lemma 3.38** *Zij $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stuksgewijs $C^1$. Zij $(f_k)_{k \geq 0}$ een rij continue functies $\gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$. Dan geldt het volgende.*

(a) *Is de rij $(f_k)$ uniform convergent op $\gamma([a, b])$ met limiet $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ dan geldt dat de rij $\int_\gamma f_k(z) \, dz$ in $\mathbb{C}$ convergeert, terwijl*

$$\int_\gamma f(z) \, dz = \lim_{k \to \infty} \int_\gamma f_k(z) \, dz. \tag{3.13}$$

(b) *Is de reeks* $\sum_{k\geq 0} f_k$ *uniform convergent op* $\gamma([a,b])$, *dan is de somfunctie continu op* $\gamma([a,b])$, *terwijl*

$$\int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma f_k(z) dz. \tag{3.14}$$

**Bewijs** Stel dat de hypothese van (a) vervuld is. Wegens Stelling 1.15 is de functie $f$ continu op $\gamma([a,b])$. Derhalve bestaat de integraal van $f$ langs $\gamma$. Bovendien geldt wegens Lemma 3.14 dat

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz - \int_\gamma f_k(z)\, dz \right| = \left| \int_\gamma [f(z) - f_k(z)]\, dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \|f - f_k\|_{\gamma([a,b])}.$$

Omdat het rechterlid limiet nul heeft voor $k \to \infty$ volgt (3.13), en is (a) bewezen.

Veronderstel nu dat de hypothese van (b) vervuld is, en beschouw de partiële somfunctie $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Dan is $F_n$ continu op $\gamma([a,b])$, voor iedere $n \geq 0$. De rij $(F_n)_{n\geq 0}$ convergeert op $\gamma([a,b])$ uniform met als limiet de somfunctie $F$. Uit het onder (a) bewezene volgt daarom dat

$$\int_\gamma F(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma F_n(z)\, dz.$$

We merken nu op dat

$$\int_\gamma F_n(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\, dz = \sum_{k=0}^{n} \int_\gamma f_k(z)\, dz.$$

De reeks in het rechterlid van (3.14) is dus convergent en de geldigheid van de identiteit (3.14) volgt. □

We komen nu bij het genoemde resultaat dat iedere holomorfe functie analytisch is, dus lokaal gegeven kan worden door een machtreeks. Eerst formuleren we het resultaat op een bol.

**Stelling 3.39** *Zij* $f : D(\alpha; R) \to \mathbb{C}$ *een holomorfe functie. Dan geldt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k, \qquad (z \in D(\alpha; R)), \tag{3.15}$$

*waarbij*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a;r)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{k+1}}\, dw, \qquad (k \geq 0), \tag{3.16}$$

*voor elke* $0 < r < R$.

**Bewijs** Zij $z \in D(\alpha; R)$ en kies $r, r_1 \in \mathbb{R}$ zo dat $0 < |z - \alpha| \leq r_1 < r < R$. Dan is

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(\alpha;r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \tag{3.17}$$

Voor $w \in \partial D(\alpha; r)$ geldt dat

$$(w-z)^{-1} = (w-\alpha)^{-1} \left[ 1 - \left( \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right) \right]^{-1} = (w-\alpha)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right)^k$$

Aangezien $\left|\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right| \leq r_1/r < 1$ voor alle $w \in \partial D(0;r)$ convergeert de reeks uniform in de variabele $w \in \partial D(0;r)$. Door de bovenstaande reeks te substitueren in (3.17) vinden we daarom, na toepassing van Lemma 3.38 dat

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(\alpha;r)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)} \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^k dw.$$

Door in de bovenstaande integralen de macht $(z-\alpha)^k$ als factor buiten de integraal te brengen vinden we (3.15). Uit Stelling 3.27 volgt dat de integraal in de formule (3.16) onafhankelijk is van $0 < r < R$.
□

**Gevolg 3.40** *Zij $f : D(\alpha; R) \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie. Dan is $f$ willekeurig vaak complex differentieerbaar op $D(\alpha; R)$. Bovendien voor elke $k \geq 0$ en $0 < r < R$ dat*

$$\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(\alpha;r)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{k+1}} \, dw$$

**Bewijs** Uit Stelling 3.39 volgt dat $f$ op de schijf $D(\alpha; R)$ gegeven wordt door de machtreeks $\sum_{k\geq 0} c_k(z-\alpha)^k$, waarbij de $c_k$ gegeven worden door (3.16). Anderzijds weten we uit Gevolg 2.39 dat $c_k = f^{(k)}(\alpha)/k!$ □

**Opmerking 3.41** Zij $U \subset \mathbb{C}$ open en $f \in \mathcal{O}(U)$. Dan is $f$ analytisch op $U$. Bovendien geldt voor iedere $\alpha \in U$ en $R > 0$ zo dat $f$ op $D(\alpha; R)$ gegeven wordt door zijn Taylor reeks rond $\alpha$. In het bijzonder is de convergentiestraal van die Taylor reeks groter of gelijk aan $R > 0$. ⊘

**Voorbeeld 3.42** De functie $f : z \mapsto (1 + z^2)^{-1}$ is holomorf op $\mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$. Voor een gegeven punt $\alpha \in \mathbb{C}$ met $\alpha \neq \pm i$ is de convergentiestraal van de machtreeks rond $\alpha$ minstens $r(\alpha) := \min(|\alpha - i|, |\alpha + i|)$. Anderzijds kan de convergentiestraal niet groter zijn. Immers als $r(\alpha) = |\alpha - i|$, dan zou gelden dat $\lim_{t\uparrow 1} f(\alpha + t(i-\alpha))$ bestaat, terwijl dit evident niet het geval is. In het geval $r(\alpha) = |\alpha + i|$ vinden we op een soortgelijke manier een ongerijmdheid. ⊘

**Lemma 3.43 (Cauchy ongelijkheden)** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open en laat $f \in \mathcal{O}(U)$. Dan geldt voor iedere $z \in U$ met $B(z; r) \subset U$ dat*

$$|f^{(k)}(z)| \leq k! \left(\frac{1}{r}\right)^k \|f\|_U$$

*Hierin staat $\|f\|_U$ voor de supnorm van $f : U \to \mathbb{C}$ (met de waarde $\infty$ als $|f|$ onbegrensd is op $U$).*

**Bewijs** Laat $z \in U$ en $B(z; r) \subset U$. Laat verder $k \geq 0$. Dan geldt wegens Gevolg 3.40 met $\alpha = z$ dat voor ieder $0 < \varepsilon < r$ geldt dat

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(0;r-\varepsilon)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} \, dw.$$

Door toepassing van Lemma 3.14 volgt hieruit dat

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \, L(\partial D(0; r-\varepsilon)) \cdot (r-\varepsilon)^{-(k+1)} \cdot \|f\|_U = k!(r-\varepsilon)^{-k} \cdot \|f\|_U.$$

Door de limiet voor $\varepsilon \downarrow 0$ te nemen vinden we de gewenste afschatting. □

**Gevolg 3.44 (Stelling van Liouville)** *Zij $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Als $f$ begrensd is op $\mathbb{C}$ dan is $f$ constant.*

**Bewijs** Er geldt $\|f\|_{\mathbb{C}} < \infty$. Voor $z \in \mathbb{C}$ en alle $r > 0$ geldt

$$|f'(z)| \leq R^{-1}\|f\|_{\mathbb{C}}$$

Door de limiet voor $R \to \infty$ te nemen vinden we dat $|f'(z)| = 0$ dus $f'(z) = 0$. Aangezien dit voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt concluderen we dat $f$ constant is. $\square$

**Opmerking 3.45 (Opgave)** Zij $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie en veronderstel dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat en constanten $R, C > 0$ zo dat

$$|z| \geq R \implies |f(z)| \leq C|z|^n.$$

Bewijs dat $f$ een polynoomfunctie is van graad ten hoogste $n$. $\oslash$

## 3.4 Laurentreeksen en singulariteiten

In deze paragraaf is $U \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling en $\alpha \in U$ een gegeven punt. We gaan het gedrag van een holomorfe functie $f : U \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ onderzoeken in de buurt van het singuliere punt $\alpha$.

We beginnen met een resultaat op een *ringgebied* van de vorm

$$A(\alpha, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - \alpha| < R_2\};$$

hierin is $0 \leq R_1 < R_2$.

**Lemma 3.46** *Zij $f : A(\alpha, R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ holomorf en $z \in A(\alpha, R_1, R_2)$. Dan geldt voor alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ met $R_1 < r_1 < |z - \alpha| < r_2 < R_2$ dat:*

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial D(\alpha;r_2)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw - \int_{\partial D(\alpha;r_1)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \tag{3.18}$$

**Bewijs** Schrijf $U = A(\alpha; R_1, R_2)$. We beschouwen de functie $g : U \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad (w \in U \setminus \{z\}), \qquad \text{en} \quad g(z) = f'(z).$$

We zullen eerst laten zien dat $g$ holomorf is op $U$. De holomorfie op $U \setminus \{z\}$ is evident. Zij $\delta > 0$ zo dat $D(z; \delta) \subset U$, dan wordt $f$ op $B(z; \delta)$ gegeven door zijn Taylorreeks rond $z$,

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (w - z)^k, \qquad (w \in D(z; \delta)).$$

Hierin is $c_0 = f(z)$. Er volgt dat

$$g(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (w - z)^{k-1}, \quad (w \in D(z; \delta) \setminus \{z\}).$$

Aangezien $c_1 = f'(z)$ zien we dat deze reeksontwikkeling ook geldt voor $w = z$. Derhalve is $g$ holomorf op $B(z;\delta)$, dus op $U$.

Aangezien de standaardparametriseringen van $\partial D(\alpha; r_1)$ en $\partial D(\alpha; r_2)$ als gesloten krommen homotoop zijn in $U$ volgt wegens Stelling 3.27 dat

$$\int_{\partial D(\alpha;r_2)} g(w)\, dw - \int_{\partial D(\alpha;r_1)} g(w)\, dw = 0.$$

Door het linkerlid van deze gelijkheid af te trekken van het rechterlid van (3.18) zien we dat het rechterlid van (3.18) gelijk is aan

$$\int_{\partial D(\alpha;r_2)} \frac{f(z)}{w-z}\, dw - \int_{\partial D(\alpha;r_1)} \frac{f(z)}{w-z}\, dw \tag{3.19}$$

Merk op dat de integrand van de bovenstaande integralen als functie van $w$ holomorf is op $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. Binnen deze verzameling is de standaardparametrisering van $\partial D(\alpha; r_1)$ samentrekbaar, zodat de corresponderende tweede integraal gelijk is aan nul. De standaardparametrisering van $\partial D(\alpha; r_1)$ is binnen $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ homotoop met de standaardparametrisering van $\partial D(z;\delta)$. Hieruit volgt dat (3.19) gelijk is aan

$$\int_{\partial D(\alpha;r_2)} \frac{f(z)}{w-z}\, dw = f(z) \int_{\partial D(z;\delta)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i\, f(z).$$

□

**Definitie 3.47** Onder een *Laurentreeks* rond $\alpha \in \mathbb{C}$ verstaan we een reeks van de vorm

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (z-\alpha)^k, \tag{3.20}$$

met coëfficiënten $c_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{Z})$ en $z$ een variabele in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Voor $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ noemen we de Laurentreeks convergent indien de reeksen

$$\sum_{k\geq 1} c_{-k}(z-\alpha)^{-k} \quad \text{en} \quad \sum_{k\geq 0} c_k (z-\alpha)^k \tag{3.21}$$

beide convergeren. De som van de Laurentreeks wordt in dat geval gedefinieerd door

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-\alpha)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k$$

⊘

**Opmerking 3.48** De noties absoluut en uniform convergent worden op soortgelijke wijze gereduceerd tot de analoge noties voor de bovengenoemde deelreeksen. ⊘

De bepaling van het convergentiegebied van de Laurentreeks (3.20) kan herleid worden tot de convergentiegebieden van de machtreeksen

$$\sum_{k\geq 1} c_{-k} w^k \quad \text{en} \quad \sum_{k\geq 0} c_k \zeta^k. \tag{3.22}$$

We noteren de convergentiestralen van die machtreeksen met repectievelijk $r_1$ en $\rho_2$. Zij $\rho_1 = r^{-1} \in [0, \infty]$. Dan zien we door de substitutie $w = (z-\alpha)^{-1}$ dat de eerste reeks in (3.21) convergeert voor $|z-\alpha| > \rho_1$ en divergeert voor $|z-\alpha| < \rho_1$. De tweede reeks convergeert voor $|z-\alpha| < \rho_2$ en divergeert voor $|z-\alpha| > \rho_2$. Indien $\rho_1 > \rho_2$ dan geldt voor iedere $z \in \mathbb{C}$ dat $|z-\alpha| < \rho_1$ of $|z-\alpha| > \rho_2$, zodat een van beide deelreeksen divergeert. In dit geval divergeert de Laurentreeks voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Veronderstel nu dat $\rho_1 = \rho_2$. Dan geldt voor iedere $z \in \mathbb{C}$ met $|z-\alpha| \neq \rho_1$ dat een van beide deelreeksen divergeert, zodat ook de Laurentreeks divergeert.

Veronderstel tenslotte dat $\rho_1 < \rho_2$. Dan convergeert de Laurentreeks op het ringgebied $A(\alpha; \rho_1, \rho_2)$, terwijl hij buiten de afsluiting van dit ringgebied divergeert. Het volgende resultaat is nu van bijzonder belang.

**Propositie 3.49** *Veronderstel dat de Laurentreeks (3.20) convergeert voor $z$ in een ringgebied van de vorm $A(\alpha; R_1, R_2)$, met $0 \leq R_1 < R_2$. Gan geldt het volgende.*

(a) *De Laurentreeks (3.20) convergeert absoluut uniform op ieder deelgebied van de vorm $\bar{A}(\alpha; r_1; r_2)$ met $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.*

(b) *De functie $f : A(\alpha; R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k$$

*is holomorf.*

(c) *Voor iedere $r \in ]R_1, R_2[$ geldt dat*

$$c_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(\alpha; r)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{p+1}}\, dz, \qquad (k \in \mathbb{Z}). \tag{3.23}$$

**Bewijs** Uit de aanname volgt dat de eerste machtreeks in (3.22) convergeert op $0 < R_2^{-1} < |w| < R_1^{-1}$, en dus, wegens ... uniform absoluut op $|w| \leq r_1^{-1}$. Bovendien convergeert de tweede machtreeks op het gebied $R_1 < |\zeta| < R_2$, dus uniform absoluut op $|\zeta| \leq r_2$. Hieruit volgt dat de Laurentreeks uniform absoluut convergeert op $r_1 \leq |z-\alpha| \leq r_2$. Hieruit volgt (a).

De functies $g_1 : D(0, R_1^{-1}) \to \mathbb{C}$ en $g_2 : D(0; R_2) \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door de respectievelijke machtreeksen in (3.22) zijn holomorf op de genoemd domeinen. Voor $R_1 < |z-\alpha| < R_2$ geldt dat $|(z-\alpha)^{-1}| < R_1^{-1}$ en $|z-\alpha| < R_2$ en

$$f(z) = g_1((z-\alpha)^{-1}) + g_2(z-\alpha).$$

Uit de bekende rekenregels voor $C^1$ complexe differentieerbaarheid volgt nu dat $f$ holomorf is op $A(\alpha; R_1, R_2)$. Dus (b).

Voor (c) merken we tenslotte op dat wegens (a) de Laurentreeks voor $f$ uniform convergeert op $\partial D(\alpha; r)$. Zij $p \in \mathbb{Z}$. Dan volgt ook dat

$$\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{p+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\alpha)^{k-p-1}$$

met uniform absolute convergentie van de reeks op $\partial D(\alpha; r)$. Door toepassing van Lemma 3.38 op de deelreeksen van negatieve en positieve machten vinden we dat

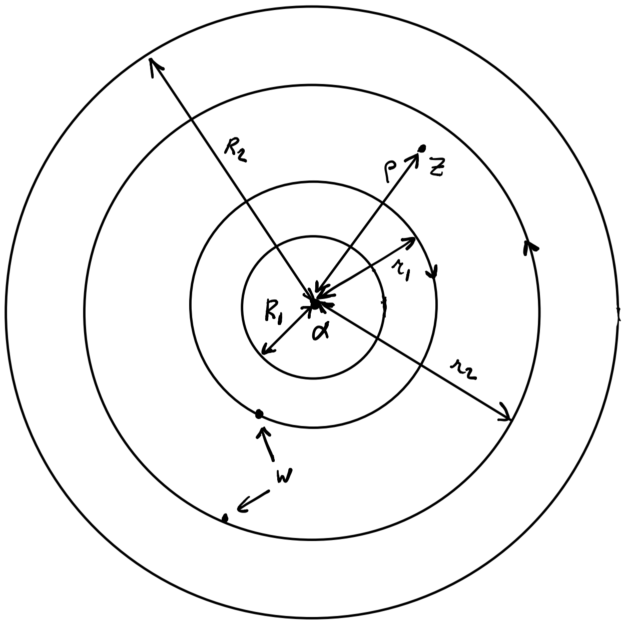
$$\int_{\partial D(\alpha;r)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{p+1}}\, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\partial D\alpha;r)} (z-\alpha)^{k-p-1}\, dz.$$

Alle termen in deze som, behalve die voor $k = p$, zijn nul wegens Voorbeeld 3.29. De term voor $k = p$ is gelijk aan $2\pi i c_p$ wegens hetzelfde voorbeeld. Hieruit volgt (3.23). □

De volgende stelling geeft een omgekeerde versie van het bovenstaande resultaat.

**Stelling 3.50** *Zij $f : A(\alpha; R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ holomorf. Dan bestaat er een unieke familie complexe coëfficiënten $c_k \in \mathbb{C}$, voor $k \in \mathbb{Z}$, zo dat voor alle $z \in A(\alpha, R_1, R_2)$ geldt:*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k. \tag{3.24}$$




Figuur bij het bewijs van Stelling 3.50

**Bewijs** Zij $z \in A(\alpha; R_1, R_2)$. Kies $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ zo dat $R_1 < r_1 < \rho := |z-\alpha| < r_2 < R_2$. We herschrijven (3.18) als

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial D(\alpha;r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw + \int_{\partial D(\alpha;r_1)} \frac{f(w)}{z-w}\, dw \tag{3.25}$$

Voor $w \in \partial D(\alpha; r_2)$ geldt

$$(w-z)^{-1} = \left(1 - \frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^{-1} (w-\alpha)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (z-\alpha)^k (w-\alpha)^{-k-1}$$

met uniforme abolute convergentie ten aanzien van $w$, aangezien $\left|\frac{z-\alpha)}{w-\alpha}\right| < \rho/r_2 < 1$.

Voor $w \in \partial D(\alpha; r_1)$ geldt

$$(z-w)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(w-\alpha)^k(z-\alpha)^{-k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(w-\alpha)^{k-1}(z-\alpha)^{-k}$$

met uniforme convergentie in $w$ aangezien $\left|\frac{w-\alpha)}{z-\alpha}\right| < r_1/\rho < 1$.

Substitueren we de reeksen in de integralen in (3.25) dan vinden we, wegens Lemma 3.38 dat

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-\alpha)^k + \sum_{k=1} c_{-k}(z-\alpha)^{-k}$$

met

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(\alpha;r_2)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{k+1}}\, dw, \quad (k \geq 0),$$

en

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(\alpha;r_1)} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{k+1}}\, dw, \quad (k \leq -1).$$

□

**Opmerking 3.51** De eerste integraal voor $c_k$ verandert niet als $r_1$ vervangen wordt door een willekeurige $r \in ]R_1, R_2[$. De tweede verandert niet als $r_2$ vervangen wordt door een willekeurige $r \in ]R_1, R_2[$. Dit is in overeenstemming met formule (3.23). ⊘

Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open verzameling, en $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{\alpha\})$. Er is een $\delta > 0$ zo dat $f$ op $D(\alpha;\delta) \subset U$. De functie $f$ is holomorf op de verzameling $D(\alpha;\alpha) \setminus \{\alpha\}$ dat overeenkomt als het ringgebied $A(\alpha; 0, \delta)$. Wegens de voorgaande stelling heeft $f$ op $D(\alpha;\alpha) \setminus \{\alpha\}$ een Laurentreeksontwikkeling van de vorm (3.24), die uniek is wegens (3.23).

**Definitie 3.52** De coefficient $c_{-1}$ in de Laurentreeksontwikkeling (3.24) van $f$ rond $\alpha$ heet het *residu* van $f$ in $\alpha$. We noteren

$$\mathrm{Res}_\alpha f := c_{-1}.$$

⊘

**Gevolg 3.53** *Zij $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{\alpha\})$. Het residu van $f$ in het punt $\alpha$ wordt gegeven door*

$$2\pi i\, \mathrm{Res}_\alpha f = \int_{\partial D(\alpha;r)} f(z)\, dz$$

*voor iedere $r > 0$ met $\bar{D}(\alpha; r) \subset U$.*

**Lemma 3.54** *Laat $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{\alpha\})$. Dan is er een functie $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ zo dat $f - g$ de beperking is van een functie in $\mathcal{O}(U)$. Voor elk zo'n functie geldt:* $\mathrm{Res}_\alpha g = \mathrm{Res}_\alpha f$.

**Bewijs** Kies $r > 0$ zo dat $\bar{D}(\alpha; r) \subset U$. Dan heeft $f$ op $\bar{D}(\alpha, r)$ een Laurentreeksontwikkeling van de vorm

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - \alpha)^k.$$

De machtreeks $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^k$ convergeert voor elke $w = (z - \alpha)^{-1}$, $(z - \alpha) \in D(0; \delta)$, dus voor elke $w$ met $|w| > \delta^{-1}$. Dit betekent dat de genoemde machtreeks een convergentiestraal $\infty$ heeft, De functie

$$\varphi : w \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^k$$

is daarom holomorf op $\mathbb{C}$. Met de kettingregel volgt nu dat de functie $g : \mathbb{C} \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$g(z) := \varphi([z - \alpha]^{-1})$$

holomorf op $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ is. De functie $f - g$ is holomorf op $U \setminus \{\alpha\}$ en wordt op $D(\alpha; r)$ gegeven door

$$f(z) - g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - \alpha)^k.$$

Hieruit volgt dat $f - g$ een ophefbare singulariteit in $\alpha$ heeft.

Is $g$ een functie die voldoet, en is $D(\alpha; r) \subset U$, dan volgt uit Gevolg 3.28 dat

$$\int_{\partial D(\alpha; r)} (f - g)(z)\, dz = 0.$$

Hieruit volgt wegens Gevolg 3.53 dat $\mathrm{Res}_\alpha f = \mathrm{Res} g_\alpha$. □

## 3.5 Windingsgetallen en de residuenstelling

Complexe lijnintegratie biedt een manier om te meten hoe vaak een gesloten continue kromme $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ om een buiten het beeld liggend punt $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ windt.

Als belangrijk voorbeeld fixeren we $k \in \mathbb{Z}$ en beschouwen we de kromme

$$\sigma^k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto \alpha + e^{ikt}$$

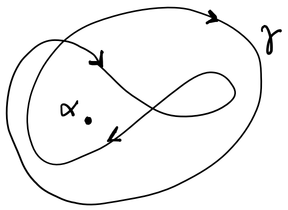
die een eenparige beweging over de cirkel $\partial D(\alpha, 1)$ beschrijft, waarbij die cirkel $k$ maal tegen de klok in doorlopen wordt (voor $k < 0$ is de bewegingsrichting met de klok mee). Met een eenvoudige berekening volgt

$$\int_{\sigma^k} \frac{1}{z - \alpha}\, dz = 2\pi i\, k. \tag{3.26}$$

Men kan aantonen dat iedere gesloten kromme $\gamma$ in $\mathbb{C} \setminus \alpha$ een herparametrisering heeft die binnen de verzameling $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ homotoop is met de kromme $\sigma^k$ voor een geschikte $k \in \mathbb{Z}$. Wegens de integraalstelling van Cauchy kan die $k \in \mathbb{Z}$ dan gegeven worden door de formule

$$k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha}. \tag{3.27}$$

Wij zullen via een direct argument aantonen dat de zo gedefinieerde $k$ een geheel getal is.




$$W(\gamma, \alpha) = -2$$

**Lemma 3.55** *Zij $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ een continue gesloten kromme. Dan is de integraal in het rechterlid van (3.27) een geheel getal.*

**Bewijs** Er is een unieke primitieve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ van de functie $f : z \mapsto 1/(z - \alpha)$ langs $\gamma$ met $\varphi(a) = 0$. In termen hiervan geldt dat

$$\int_{\gamma|_{[a,t]}} \frac{dz}{z - \alpha} = \varphi(t). \tag{3.28}$$

We zullen de claim aantonen dat de functie

$$\psi : t \mapsto \frac{e^{\varphi(t)}}{\gamma(t) - \alpha}, \quad [a, b] \to \mathbb{C}$$

lokaal constant is op $[a, b]$.

Uit de claim volgt dat $\psi : [a, b] \to \mathbb{C}$ constant is. In het bijzonder geldt dus dat $\psi(b) = \psi(a)$. Omdat $\gamma$ gesloten is geldt $\gamma(a) = \gamma(b)$, dus ook $e^{\varphi(b)} = e^{\varphi(a)} = 1$. Hieruit volgt de gewenste conclusie dat $\varphi(b) \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

We voltooien het bewijs door de geldigheid van de claim aan te tonen. Zij daartoe $t_0 \in [a, b]$ willekeurig. Dan geldt $\gamma(t_0) - \alpha \neq 0$ en kunnen we een halflijn $L_\varphi = [0, \infty[\cdot e^{-i\varphi}$ kiezen, zo dat $\gamma(t_0) - \alpha \notin L_\varphi$. Zij $\log_\varphi$ de tak van de logaritme op $V := \mathbb{C} \setminus L_\varphi$ gedefineerd als in Gevolg 2.52 en definieer $F : V + \alpha \to \mathbb{C}$ door

$$F(z) = \log_\varphi(z - \alpha).$$

Dan is $F$ een primitieve van $f$ op de open omgeving $V + \alpha$ van $\gamma(t_0)$. We merken op dat

$$e^{F(z)} = (z - \alpha), \qquad (z \in V). \tag{3.29}$$

Omdat $V + \alpha$ open is en $\gamma$ continu, is er een $\delta > 0$ zo dat $J := ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \cap [a, b]$ door $\varphi$ afgebeeld wordt in $V + \alpha$. De functie $F \circ \gamma|_J$ is een primitieve van $f$ langs $\gamma|_J$. Hieruit volgt dat $\varphi - F \circ \gamma$ constant is op $J$, met waarde $c = \varphi(t_0) - F(\gamma_0(t))$. Door de $e$-macht te nemen vinden we dat

$$e^{\varphi(t)}/e^{F(\gamma(t))} = e^c \qquad (t \in J).$$

Door (3.29 ) te gebruiken zien we dat $\psi$ constant is op de open omgeving $J$ van $t_0$ in $[a, b]$ $\square$

**Definitie 3.56** Voor een continue gesloten kromme $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ is het *windingsgetal* $W(\gamma, \alpha)$ van $\gamma$ rond $\alpha$ gedefinieerd door

$$W(\gamma, \alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha)}.$$

$\oslash$

Uit Lemma 3.55 volgt dat $W(\gamma,\alpha)$ een geheel getal is. Dit windingsgetal treedt vaak op in samenhang met residuen.

**Lemma 3.57** *Zij $\gamma$ een gesloten kromme in $\mathbb{C}$ en $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Zij $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{\alpha\})$. Dan is*

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 2\pi i\, W(\gamma,\alpha)\, \mathrm{Res}_\alpha g.$$

**Bewijs** Uit de rijcompactheid van $\gamma([a,b])$ volgt dat er $0 < r < R$ bestaan zo dat zo dat $\gamma([a,b])$ in het gesloten ringgebied $\bar{A}(\alpha; r, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid r \le |z-\alpha| \le R\}$ gelegen is. De Laurentreeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-\alpha)^k$ van $g$ convergeert uniform absoluut op $\bar{A}(\alpha; r, R)$. Hieruit volgt dat

$$\int_\gamma g(z)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_\gamma (z-\alpha)^k\, dz.$$

Voor elke $k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ heeft de functie $z \mapsto (z-\alpha)^k$ een primitieve op $\mathbb{C}\setminus\{\alpha\}$, zodat de bijbehorende integraal gelijk aan nul is. Hieruit volgt

$$\int_\gamma g(z)\, dx = c_{-1} \int_\gamma (z-\alpha)^{-1}\, dz = \mathrm{Res}_\alpha(g) \cdot 2\pi i\, W(\gamma,\alpha).$$

Hieruit volgt de bewering. $\square$

**Stelling 3.58 (Residuenstelling)** *Zij $U$ een open verzameling, $\gamma : [a,b] \to U$ een gesloten kromme, die samentrekbaar is in $U$. Zij $S \subset U$ een eindige deelverzameling disjunct van $\gamma([a,b])$. Dan geldt voor iederen functie $f \in \mathcal{O}(U \setminus S)$ dat*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\alpha\in S} W(\gamma,\alpha)\, \mathrm{Res}_\alpha f.$$

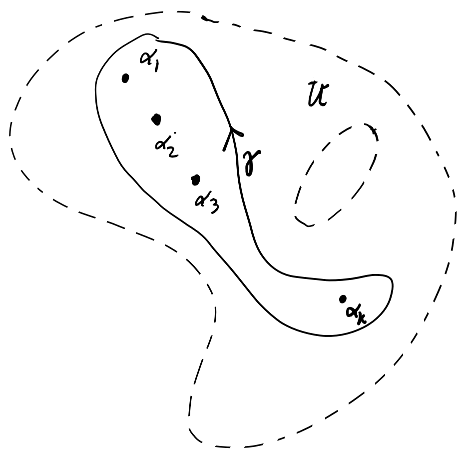
*Als $S = \emptyset$ dan wordt de uitdrukking in het rechterlid geïnterpreteerd als nul.*

**Opmerking 3.59** Veronderstel dat $S$ niet leeg is, en schrijf $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ Men zegt dat $\gamma$ enkelvoudig positief om de punten van $S$ windt indien voor elke $1 \le j \le p$ geldt dat $W(\gamma,\alpha) = 1$. In dit geval krijgt men de bekende formule

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}_{\alpha_j} f.$$

$\oslash$

**Opmerking 3.60** De bewering in bovenstaande stelling is ook waar als de aanname dat $\gamma$ samentrekbaar in $U$ is vervangen wordt door de zwakkere aanname dat $W(\gamma,\beta) = 0$ voor ieder punt $\beta \in \mathbb{C}\setminus U$. Het bewijs van dit resultaat is te vinden in Appendix B. $\oslash$




De residuenstelling

**Bewijs** We geven het bewijs met inductie naar het aantal elementen $p$ van $S$. Voor $p = 0$ valt de bewering samen met de integraalstelling van Cauchy. Veronderstel dus dat $p > 0$, en dat de bewering geldt voor kleinere waarden van $p$. Selecteer $\beta \in S$ en kies $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{\beta\})$ zo dat $f - g$ een ophefbare singulariteit heeft in $\beta$. Dan geldt wegens de inductiehypothese dat

$$\int_\gamma (f - g)(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\alpha \in S \setminus \{\beta\}} \mathrm{Res}_\alpha (f - g)\, W(\gamma, \alpha) = 2\pi i \sum_{\alpha \in S \setminus \{\beta\}} \mathrm{Res}_\alpha f\, W(\gamma, \alpha).$$

Anderzijds is

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 2\pi i\, W(\gamma, \alpha)\, \mathrm{Res}_\alpha g = 2\pi i\, W(\gamma, \alpha)\, \mathrm{Res}_\alpha f.$$

Optellen van deze resultaten levert de gewenste identiteit. □

## 3.6 Het berekenen van integralen

De residuenstelling levert een fraai hulpmiddel op voor het berekenen van integralen. Om dit in enkele voorbeelden te beschrijven zal de volgende terminologie nuttig blijken. Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling.

Onder een *aaneengeschakelde rij van $C^1$ krommen* in $U$ verstaan we een eindige rij $k = (k_1, \ldots, k_n)$ van $C^1$ krommen $k_j : [a_j, b_j] \to U$ zo dat voor iedere $1 \leq j < n$ geldt dat het eindpunt van $k_j$ samenvalt met het beginpunt van $k_{j+1}$, dat wil zeggen $k_j(b_j) = k_{j+1}(a_{j+1})$. De aaneengeschakelde rij heet gesloten indien bovendien geldt dat $k_n(b_n) = k_1(a_1)$.

We definiëren het beeld $\mathrm{im}(k)$ als de vereniging van de beelden $k_j([a_j, b_j])$, voor $1 \leq j \leq n$. Is $f : \mathrm{im}(k) \to \mathbb{C}$ continu, dan definiëren we de integraal van $f$ over de aaneengeschakelde rij $k$ door

$$\int_k f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{k_j} f(z)\, dz. \tag{3.30}$$

Onder een richtingsbehoudende $C^1$ herparametrisering van de aaneengeschakelde rij $k$ verstaan we een aaneengeschakelde rij $\tilde{k} = (\tilde{k}_1, \ldots, \tilde{k}_n)$ zo dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de $C^1$ kromme $\tilde{k}_j$ een richtingsbehoudende $C^1$ herparametrisering is van $k_j$. Dit betekent dat $k$ en $\tilde{k}$ hetzelfde beeld hebben en dat $\int_k f(z)\,dz = \int_{\tilde{k}} f(z)\,dz$ voor iedere continue complexwaardige functie op $\mathrm{im}(k)$.

Is $\gamma$ een stuksgewijze $C^1$ kromme, dan is iedere $C^1$ opdeling $k = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ van $\gamma$ een aaneengeschakelde rij van $C^1$ krommen en wegens de definitie (3.4) en de bovenstaande definitie (3.30) geldt $\int_k f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$ voor elke continue functie $f : \mathrm{im}(\gamma) \to \mathbb{C}$.

In het vervolg zullen we zeggen dat een aaneengeschakelde rij $k$ door opdeling en herparametrisering verkregen kan worden uit een stuksgewijze $C^1$ kromme $\gamma$ indien $k$ gelijk is aan een herparametrisering van een $C^1$ opdeling van $\gamma$. In dat geval geldt $\mathrm{im}(k) = \mathrm{im}(\gamma)$, terwijl voor elke continue functie $f : \mathrm{im}(k) \to \mathbb{C}$ geldt dat $\int_k f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$.

We merken op dat bij iedere aaneengeschakelde rij van $C^1$ krommen $k$ in $U$ een stuksgewijze $C^1$ kromme $\gamma$ in $U$ bestaat waaruit $k$ verkregen kan worden door opdeling en herparametrisering. Dit is als volgt in te zien. Er geldt dat $k = (k_1, \ldots, k_n)$, met $k_j : [a_j, b_j] \to U$ een stel $C^1$ krommen zo dat $k_j(b_j) = k_{j+1}(a_{j+1})$ voor alle $1 \leq j < n$. Zij $c = c_0 < \ldots < c_n = d$ een willekeurige stijgende rij reële getallen. Dan is er voor iedere $1 \leq j \leq n$ een $C^1$ kromme $\gamma_j : [c_{j-1}, c_j] \to U$ die een richtingsbehoudende $C^1$ herparametrisering is van $k_j$. Omdat $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ een aaneengeschakelde rij is geldt $\gamma_j(c_{j+1}) = \gamma_{j+1}(c_{j+1})$ voor alle $1 \leq j < n$. Hieruit volgt het bestaan van unieke continue $\gamma : [c, d] \to U$ met $\gamma|_{[c_{j-1}, c_j]} = \gamma_j$. Het is duidelijk dat $\gamma$ stuksgewijs $C^1$ is, met $C^1$ opdeling $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. We zullen in het vervolg naar deze constructie verwijzen door te zeggen dat $\gamma$ verkregen is uit $k$ door herparametriseren en plakken.

**Voorbeeld 3.61** Zij $R > 0$. We beschouwen in $\mathbb{C}$ de $C^1$ krommen $k_1 : [-R, R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t$ en $k_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto Re^{it}$. Het beeld van $k_1$ is het lijnstuk $[-R, R]$ in $\mathbb{C}$. Het beeld van $k_2$ is de verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R,\ \mathrm{Im} z \geq 0\}$. Het is duidelijk dat $k = (k_1, k_2)$ een gesloten aaneengeschakelde rij in $\mathbb{C}$ is. We definiëren de herparametriseringen $\gamma_1 : [-2R, 0] \to \mathbb{C}, t \mapsto k_1(t + R)$ en $\gamma_2 = k_2$. De stuksgewijze $C^1$ kromme $\gamma : [-2R, \pi] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\gamma = \gamma_1$ op $[-2R, 0]$ en door $\gamma = \gamma_2$ op $[0, \pi]$ is dan uit $k$ verkregen door herparameriseren en plakken. $\oslash$

**Voorbeeld 3.62** We beschouwen de integraal

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1 + x^2}\,dx. \tag{3.31}$$

Deze oneigenlijke integraal is absoluut convergent, dus convergent. Er geldt dat $I = \lim_{R \to \infty} I(R)$, waarbij

$$I(R) = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1 + x^2}\,dx.$$

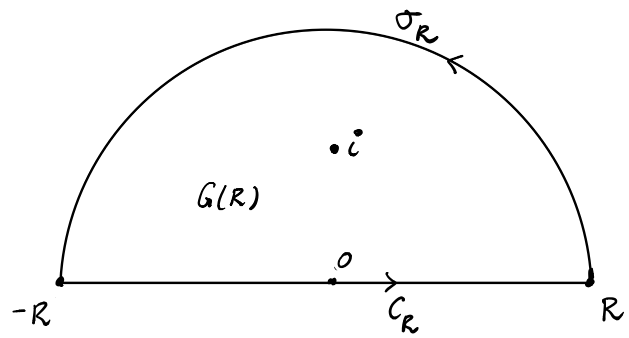
Deze integraal kunnen we zien als de complexe lijnintegraal van de holomorfe functie $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = (1 + z^2)^{-1} e^{iz}$$

langs de kromme $c_R : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$. We beschouwen het deel van $\partial D(0; R)$ dat gelegen is in het gesloten bovenhalfvlak en parametriseren dat door

$$\sigma_R : [0, \pi] \to U,\ \ t \mapsto Re^{it}.$$

Laat $\gamma_R$ een gesloten stuksgewijze $C^1$ kromme zijn door herparametriseren en plakken verkregen kan worden uit de aaneengeschakelde rij $C^1$ krommen $(c_R, \sigma_R)$. Dan is de integraal van $f$ over $(c_R, \sigma_R)$ gelijk aan de integraal van $f$ over $\gamma_R$.



Figuur bij Voorbeeld 3.62

Het is duidelijk dat $\gamma_R$ eenmaal positief rond $i$ windt, en dat $W(\gamma_R, -i) = 0$. Hieruit volgt dat

$$I_R + \int_{\sigma_R} f(z)\, dz = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f). \tag{3.32}$$

We merken op dat voor $R > 1$, $|z| = R$ en $\mathrm{Im} z \geq 0$ geldt dat

$$|f(z)| = \frac{e^{-\mathrm{Im} z}}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{R^2 - 1}.$$

Hieruit volgt

$$\left| \int_{\sigma_R} f(z)\, dz \right| \leq \frac{L(\sigma_R)}{R^2 - 1} = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \to 0$$

voor $R \to \infty$. Combineren we dit met de identiteit (3.32) dan vinden we

$$I + 0 = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f).$$

Om de integraal te bepalen is het dus voldoende dit laatste residu uit te rekenen. Dit gaat als volgt. De functie $g : z \mapsto e^{iz}/(z+i)$ is holomorf op een voldoend kleine schijf $D$ rond $i$, en heeft daar dus een machtreeksontwikkeling van de vorm

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - i)^k.$$

Hieruit volgt dat voor $z \in D \setminus \{i\}$ geldt:

$$f(z) = g(z)(z - i)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - i)^{k-1}.$$

Derhalve is $\operatorname{Res}_i(f) = c_0 = g(i) = e^{-1}/2i$. We concluderen dat

$$I = \frac{\pi}{e}. \tag{3.33}$$

Door het reële deel van beide zijden van deze vergelijking te nemen vinden we dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}.$$

$\oslash$

Zij $f : U \setminus \{\alpha\} \to 0$ een holomorfe functie. We zeggen dat $f$ in $\alpha$ een *pool* heeft van de $p$-de orde indien de Laurentreeks van $f$ rond $\alpha$ geschreven kan worden als $\sum_{k \geq -p} c_k (z-\alpha)^k$, met $c_{-p} \neq 0$.

**Opmerking 3.63 (Opgave)** Als $f$ in $\alpha$ een eerste orde pool heeft, dan is

$$\mathrm{Res}_\alpha(f) = \lim_{z \to \alpha} (z-\alpha) f(z).$$

$\oslash$

In het bovenstaande voorbeeld heeft $f : z \mapsto e^{iz}/(z^2+1)$ een eerste orde pool in $i$, omdat $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ voor alle $z$. Hieruit volgt dat

$$\mathrm{Res}_i f = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^{-1}} = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

**Voorbeeld 3.64** We beschouwen de integraal

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Door vergelijking met $x^{-4}$ op $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$ zien we dat de integraal convergent is, dus

$$I = \lim_{R \to \infty} I(R), \qquad I(R) := \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4}.$$

We beschouwen de functie $f : \mathbb{C} \supset\!\!\to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}, \quad p(z) := z^4 + 1.$$

Deze functie is holomorf op het complement van de verzameling oplossingen van $p(z) = 0$. Ieder oplossing van deze vergelijking ligt op de eenheidscirkel. Door punten van die cirkel te schrijven $z = e^{i\varphi}$ zien we dat de oplossingen van deze vergelijking gegeven worden door

$$\alpha_k = e^{\pi(1+2k)i/4}, \qquad (0 \leq k \leq 3).$$

De wortels $\alpha_1, \alpha_2$ liggen in het bovenhalfvlak $\mathrm{Im} z > 0$ en de overige wortels liggen in het onderhalfvlak. Definieëren we $\sigma_R$ als in het vorige voorbeeld, dan vinden we net als in het vorige voorbeeld, dat

$$I(R) + \int_{\sigma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1,2} \mathrm{Res}_{\alpha_j}(f).$$

Omdat $\int_{\sigma_R} f(z)\, dz \to 0$ voor $R \to \infty$ (ga na!) concluderen we dat

$$I = 2\pi i (\mathrm{Res}_{\alpha_1} f + \mathrm{Res}_{\alpha_2} f).$$

We berekenen de residuen. Uit het feit dat alle wortels $\alpha_j$ verschillend zijn, volgt dat $f(z)$ in elke $\alpha_j$ een eerste orde pool heeft. Het residu in $\alpha = \alpha_j$ vinden we door

$$\mathrm{Res}_\alpha(f) = \lim_{z \to \alpha} \frac{z-\alpha}{p(z)} = \lim_{z \to \alpha} \frac{z-\alpha}{p(z)-p(\alpha)} = \frac{1}{p'(\alpha)} = \frac{1}{4\alpha^3} = -\frac{\alpha}{4}.$$

Hieruit volgt
$$\operatorname{Res}_{\alpha_1} f + \operatorname{Res}_{\alpha_2} f = -\frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2) = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\alpha_1) = -i\frac{1}{4}\sqrt{2}.$$
We concluderen dat
$$I = 2\pi i(-i)\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

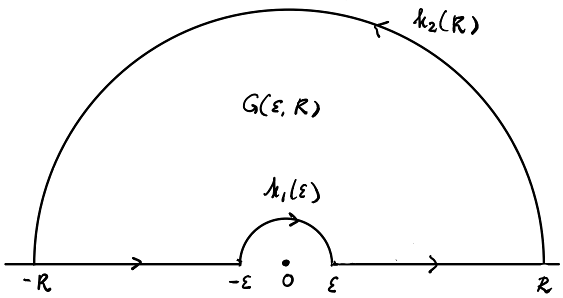
$\oslash$

**Voorbeeld 3.65** We beschouwen de integraal
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi};$$
hierbij is $a$ een reëel getal, $a > 1$, zodat de integrand continu is. Schrijven we
$$\frac{d\varphi}{a + \sin\varphi} = \frac{2id\varphi}{2ia + e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} = \frac{2ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{2i\varphi} + 2iae^{i\varphi} - 1},$$
dan zien we dat
$$I = \int_\sigma \frac{2dz}{z^2 + 2iaz - 1},$$
waarbij $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ de standaardparametrisering van de eenheidscirkel is. De functie
$$f : z \mapsto \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}$$
is holomorf op $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$, waarbij $\alpha_1$ en $\alpha_2$ de verschillende wortels van het polynoom $p(z) := z^2 + 2iaz - 1$ zijn. Met de gebruikelijke formule voor de oplossingen vinden we dat
$$\alpha_1 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}, \qquad \alpha_2 = -ia - i\sqrt{a^2 - 1}$$
Deze wortels liggen niet op de eenheidscirkel, en er geldt dat $p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$, dus $\alpha_1\alpha_2 = -1$. Derhalve ligt $\alpha_1$ binnen de eenheidscirkel en $\alpha_2$ erbuiten.

We vinden zo dat
$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{\alpha_1}(f).$$
Uit
$$f(z) = \frac{2}{p(z)} = \frac{2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}$$
blijkt dat
$$\operatorname{Res}_{\alpha_1}(f) = \frac{2}{(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}}.$$
Tenslotte concluderen we dat
$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

$\oslash$

**Voorbeeld 3.66** Als laatste voorbeeld behandelen we de integraal
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{3.34}$$




Figuur bij Voorbeeld 3.66

Dat deze oneigenlijke integraal convergeert zagen we reeds in de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen', door gebruik te maken van partiële integratie. De integraal is gecompliceerder dan de voorgaande: splitsen we de sinus in een som van $e-$machten dan ontstaan er twee divergente integralen. We gaan daarom als volgt te werk. Allereerst merken we op dat

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\downarrow 0}} \frac{1}{2i}\left(I_1(R,\varepsilon)+I_2(R,\varepsilon)\right), \tag{3.35}$$

waarin

$$I_1(R,\varepsilon)=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,dx, \qquad I_2(R,\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

Hierdoor gemotiveerd beschouwen we voor $0<\varepsilon<R$ de volgende voor de hand liggende krommen met als beelden de lijnstukken $[-R,-\varepsilon]$ en $[\varepsilon,R]$, namelijk:

$$c_1(\varepsilon,R):[-R,-\varepsilon]\to\mathbb{C},\ t\mapsto t \quad \text{en} \quad c_2(\varepsilon,R):[\varepsilon,R]\to\mathbb{C},\ t\mapsto t.$$

Het is duidelijk dat

$$I_j(\varepsilon,R)=\int_{c_j(\varepsilon,R)} f(z)\,dz, \qquad (j=1,2).$$

Daarnaast introduceren we de volgende krommen $[0,\pi]\to\mathbb{C}$ met als beelden de halve cirkelbogen $S_\varepsilon$ en $S_\mathbb{R}$ waarbij $S_r=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=r,\ \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$, namelijk

$$k_1(\varepsilon):t\mapsto \varepsilon e^{i(\pi-t)}, \quad \text{en} \quad k_2(R):t\mapsto Re^{it}.$$

Zij $\gamma_{\varepsilon,R}$ een $C^1$ kromme die uit de aaneengeschakelde rij krommen $(c_1(\varepsilon,R),k_2(R),c_2(\varepsilon,R),k_1(\varepsilon))$ te verkrijgen is door herparametriseren en plakken. Dan is het beeld van $\gamma_{\varepsilon,R}$ gelijk aan de rand van het gebied $G(\varepsilon,R)$ bestaande uit de punten $z\in\mathbb{C}$ met $\varepsilon\leq|z|\leq R$ en $\mathrm{Im}z\geq 0$ (zie figuur).

De functie $f(z)=z^{-1}e^{iz}$ is continu op het beeld van $\gamma_{\varepsilon,R}$ en er volgt dat

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = I_1(\varepsilon,\varepsilon)+I_2(\varepsilon,R)+\int_{k_1(\varepsilon)} f(z)\,dz+\int_{k_2(R)} f(z)\,dz. \tag{3.36}$$

De functie $f$ is holomorf op een open omgeving van $G(\varepsilon,R)$. Het is gemakkelijk in te zien dat $\gamma_{\varepsilon,R}$ binnen zo'n omgeving samentrekbaar is tot een punt. Met de stelling van Cauchy volgt dus dat

$$\int_{\gamma(\varepsilon,R)} f(z)\,dz = 0. \tag{3.37}$$

Door combinatie van (3.37) en (3.36) volgt nu dat:

$$I_1(R,\varepsilon)+I_2(R,\varepsilon) = -\int_{k_1(\varepsilon)} f(z)\,dz - \int_{k_2(R)} f(z)\,dz \tag{3.38}$$

Voor $t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ geldt dat $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ (teken de grafiek om dit in te zien; het bewijs maakt gebruik van het feit dat $\sin''(t) = -\cos t < 0$ voor $0 < t < \frac{\pi}{2}$). Maken we gebruik van de hierboven gegeven definitie van $k_2(R)$ dan vinden we dat

$$\begin{aligned}
\left| \int_{k_2(R)} f(z)\, dz \right| &\leq \int_0^{\pi} |\exp(iRe^{it})|\, dt \\
&= \int_0^{\pi} e^{-R\sin t}\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\, dt \\
&\leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2Rt}{\pi}\right) dt = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right)
\end{aligned}$$

waaruit blijkt dat de laatste integraal in (3.38) limiet nul heeft voor $R \to \infty$. Door gebruik te maken van (3.35) en (3.38) concluderen we tenslotte dat

$$I = -\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{k_1(\varepsilon)} f(z)\, dz$$

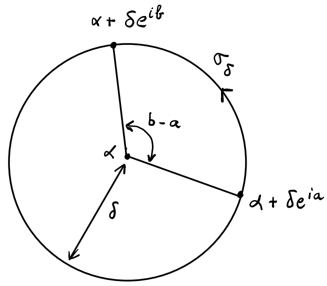
mits de laatste limiet bestaat. Dit laatste is het geval, blijkens Lemma 3.67 hieronder, waarin tevens de waarde van de limiet gegeven wordt. De conclusie is uiteindelijk dat

$$I = \frac{\pi i}{2i} \cdot \mathrm{Res}_0(f) = \frac{\pi}{2}.$$

$\oslash$

**Lemma 3.67** *Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open deel, en $\alpha \in U$. Laat $f : U \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ holomorf zijn, met een eerste orde pool in $\alpha$. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ en $\sigma_\delta : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \alpha + \delta e^{it}$; het beeld is een boog van hoekgrootte $b - a$ op de cirkel met middelpunt $\alpha$ en straal $\delta$, zie de onderstaande figuur. Dan is*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\sigma_\delta} f(z)\, dz = (b - a)i \cdot \mathrm{Res}_\alpha(f).$$




Figuur bij Lemma 3.67

**Bewijs** Uit de Laurentreeksontwikkeling van $f$ in een gereduceerde omgeving van $\alpha$ leiden we af dat

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + g(z)$$

met $g$ analytisch in een volle omgeving van $\alpha$. Uit een eenvoudige berkening waarin de parametrisering van de cirkelboog benut wordt volgt

$$\int_{\sigma_\delta} \frac{c_{-1}}{z - \alpha}\, dz = (b - a)ic_{-1} = (b - a)i \cdot \mathrm{Res}_\alpha(f).$$

Anderzijds geldt:

$$\left| \int_{\sigma_\delta} g(z)\, dz \right| \leq c\delta \sup_{|z-\alpha|=\delta} |g(z)| \to 0$$

als $\delta \downarrow 0$. $\square$

# 4 Fourier-reeksen

## 4.1 Motivatie en elementaire theorie van Fourier-coëfficiënten

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt *periodiek* met periode $2\pi$ genoemd indien

$$f(x + 2\pi) = f(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

We merken op dat voor dergelijke functies $f$ geldt dat

$$f(x + 2k\pi) = f(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Definiëren we op $\mathbb{R}$ de equivalentie-relatie $\sim$ door $x \sim y :\iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$, dan worden de equivalentieklassen voor $\sim$ gegeven door $[x] = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is periodiek met periode $2\pi$ dan en slechts dan als $f$ constant is op deze equivalentieklassen, maw, als $f$ gezien kan worden als complexwaardige functies op $\mathbb{R}/\sim$.

We noteren met $\mathcal{F}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die constant zijn op deze equivalentieklassen, dus periodiek zijn met periode $2\pi$. Voorts definiëren we de *ruimte van continue $2\pi$-periodieke functies* door

$$C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) := C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

De ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van de puntsgewijze optelling en complexe scalar vermenigvuldiging is complex lineair.

Uit het college Lineaire Algebra brengen we de volgende definitie van Hermite's inproduct in herinnering.

**Definitie 4.1** Zij $E$ een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$. Een *Hermite's inproduct op $E$* is een afbeelding

$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle : E \times E \to \mathbb{C},$$

met de volgende eigenschappen.

(a) Voor iedere $g \in E$ is $f \mapsto \langle f, g\rangle$ complex-lineair van $E$ naar $\mathbb{C}$.

(b) Voor iedere $f, g \in E$ geldt dat $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$.

(c) Als $f \in E$ en $f \neq 0$, dan is $\langle f, f\rangle > 0$.

$\oslash$

Merk op dat uit (a) volgt dat $\langle 0, g\rangle = 0$, dus in het bijzonder is $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Eigenschap (c) laat het toe om te definiëren

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} \geq 0, \quad f \in E, \tag{4.1}$$

dit getal heet de *norm* van $f$ met betrekking tot het Hermite'se inproduct.

Veronderstel nu dat $E$ een eindig dimensionale complex lineaire ruimte is met daarop een Hermite's inproduct $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$. We veronderstellen dat $E$ opgespannen wordt door een orthonormaal systeem $e_1, \ldots, e_n$ van $E$. Dat laatste betekent dat

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Hierin is het Kronecker symbool $\delta_{ij}$ gedefinieerd door $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$ en door $\delta_{ii} = 1$.

Ter motivatie van de definitie van Fourier-coefficiënten brengen we het volgende bekende lemma in herinnering.

**Lemma 4.2** *Laat, in de bovenstaande situatie een element $f \in E$ gegeven zijn. Dan zijn er unieke coëfficiënten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ zo dat $f = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$. De coëfficiënten worden gegeven door*

$$c_k = \langle f, e_k \rangle, \quad (1 \leq k \leq n).$$

*In het bijzonder vormen de $e_j$ een basis van $E$.*

**Bewijs** Het bestaan van de coëfficiënten volgt uit het feit dat de $e_j$ de ruimte $E$ opspannen. Is $f = \sum_j c_j e_j$, dan is

$$\langle f, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle c e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle e_j, e_k \rangle = c_k.$$

Hieruit volgt de uniciteit van de coëfficiënten. □

We keren terug naar de ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ van continue functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek zijn met periode $2\pi$. Op deze ruimte definiëren we het *integraal-inproduct* door

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx, \qquad (f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})). \tag{4.2}$$

Merk op dat de integrand in deze definitie een complexwaardige continue functie is van een reële variabele. De integraal van een dergelijke functie is gedefinieerd in de vorige paragraaf.

**Lemma 4.3** *Het integraal-inproduct (4.2) is een Hermite's inproduct op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.*

**Bewijs** Alle eigenschappen van Definitie 4.1 zijn gemakkelijk aan te tonen, behalve wellicht eigenschap (c). Die eigenschap tonen we als volgt aan.

Stel dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ niet de nul-functie is. Dan is de beperking van $f$ tot $]-\pi, \pi[$ niet identiek gelijk aan nul. Er is dus een $x_0 \in \mathbb{R}$ met $-\pi < x_0 < \pi$ en $f(x_0) \neq 0$. De functie $x \mapsto f(x)\overline{f}(x)$ is gelijk aan $x \mapsto |f(x)|^2$, dus reëel-waardig, niet-negatief, en strikt positief in $x_0$. Uit de continuïteit van de functie volgt het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat $-\pi < x_0 - \delta < x_0 + \delta < \pi$ en zo dat $||f(x)|^2 - |f(x_0)|^2| < \frac{1}{2}|f(x_0)|^2$ voor alle $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Voor al dergelijke $x$ geldt $|f(x)|^2 > \frac{1}{2}|f(x_0)|^2$. Hieruit leiden we af dat

$$\begin{aligned}
2\pi\langle f, f \rangle &= \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |f(x)|^2\, dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^2\, dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \\
&\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2}|f(x_0)|^2\, dx \\
&= \delta |f(x_0)|^2 > 0.
\end{aligned}$$

Hiermee is eigenschap (c) van Definitie 6.23 aangetoond. □

**Opmerking 4.4** We merken op dat voor $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en voor iedere $a \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\, dx.$$

Dit is als volgt in te zien. Door gebruik te maken van de $2\pi$-periodiciteit van $f$ vinden we door substitutie van variabelen dat

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{a} f(x+2\pi)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx - \int_{\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx + \int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

In het bijzonder volgt hieruit dat het integraal-inproduct van twee functies $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ herschreven kan worden als

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

$\oslash$

Voor $k \in \mathbb{Z}$ definiëren we de functie $\varepsilon_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$\varepsilon_k(x) = e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{4.3}$$

Het is duidelijk dat de functie $\varepsilon_k$ continu is en $2\pi$ periodiek, dus tot $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ behoort. Is $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan volgt direct uit de definitie van het integraal-inproduct dat

$$\langle f, \varepsilon_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{ikx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx. \tag{4.4}$$

**Lemma 4.5** *De functies* $(\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{Z})$ *vormen een orthonormaal systeem, dwz voor alle* $m, n \in \mathbb{Z}$ *geldt*

$$\langle \varepsilon_m, \varepsilon_n\rangle = \delta_{mn}.$$

Hierbij hebben we een voor de hand liggende uitbreiding van de Kronecker delta gebruikt: $\delta_{mm} = 1$ en $\delta_{mn} = 0$ voor alle $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$.

**Bewijs** Voor alle $m, n \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\langle \varepsilon_m, \varepsilon_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx.$$

Uit Voorbeeld 3.6 volgt dat de derde integraal nul is voor $m \neq n$. Is $m = n$, dan is het duidelijk dat de integraal gelijk is aan 1. $\square$

**Definitie 4.6** Onder een *Fourier-polynoom* zullen we in deze paragraaf een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ verstaan, die geschreven kan worden als eindige lineaire combinatie van de functies $\varepsilon_k$, met $k \in \mathbb{Z}$. Met andere woorden, er bestaan een $N \in \mathbb{N}$ en coëfficiënten $c_n \in \mathbb{C}$, $-N \leq n \leq N$ zo dat

$$f = \sum_{n=-N}^{N} c_n\varepsilon_n. \tag{4.5}$$

De verzameling van dergelijke Fourier-polynomen wordt genoteerd met $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. $\oslash$

Merk op dat $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ een lineaire deelruimte is van de complex lineaire ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

**Lemma 4.7** *Zij $f$ een Fourier-polynoom. Indien (4.5) geldt, dan worden de coefficienten $c_n$ gegeven door*

$$c_n = \langle f, \varepsilon_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{4.6}$$

*Voor $|n| > N$ geldt dat $\langle f, \varepsilon_n \rangle = 0$.*

**Bewijs** Zij $E$ de eindig dimensionale complex lineaire ruimte van Fourier-polynomen van de vorm (4.5), voorzien van het integraalinproduct. Dan vormen de $\varepsilon_j$ voor $|j| \leq N$ een orthonormaal systeem dat $E$ opspant. Pas nu Lemma 4.2 toe. $\square$

## 4.2 Elementaire theorie van Fourier-reeksen

We zullen nu onderzoeken onder welke omstandigheden een $2\pi$-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ voorgesteld kan worden door een oneindige reeks functies van de vorm

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varepsilon_k. \tag{4.7}$$

Daarbij zouden we naar analogie met de situatie van een eindig dimensionale ruimte met Hermite's inproduct kunnen vermoeden dat de coëfficiënten gegeven worden door de formule (4.6). Het precieze antwoord op deze vragen zal subtiel blijken te zijn.

Reeksen van de vorm (4.7) zijn genoemd naar de Franse wiskundige J. Fourier (1768-1830), die ze introduceerde in zijn theorie over warmte (artikelen vanaf 1807, boek *Théorie de la Chaleur* uit 1822).

**Definitie 4.8** Een *Fourier-reeks* is een reeks van functies van de vorm

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k\, e^{ikx} \;=\; a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \, \cos kx + \sum_{k \geq 1} b_k \, \sin kx \tag{4.8}$$

waarin de *coëfficienten* $a_k$, $k \geq 0$ en $b_k$, $k \geq 1$, resp. $c_k$, $k \in \mathbb{Z}$, complexe getallen zijn, en waarbij $x$ een reële variabele is. $\oslash$

De identiteit tussen de twee gedaanten in (4.8) berust op de formule van Euler, waaruit volgt dat voor elke $k \in \mathbb{Z}$ geldt

$$e^{ikx} = \cos kx + i\, \sin kx, \quad \text{en} \quad e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx. \tag{4.9}$$

Hieruit volgt gemakkelijk dat de $a_k$ en $b_k$ in termen van de $c_k$ uitgedrukt kunnen worden door

$$a_0 = c_0 \quad \text{en, voor } k \geq 1, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i\,(c_k - c_{-k})\,. \tag{4.10}$$

Uit dit laatste verband volgt dat de $c_k$ in termen van de $a_k$ en $b_k$ gegeven worden door

$$c_0 = a_0 \quad \text{en, voor } k \geq 1, \quad c_k = \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}\,(a_k + ib_k)\,, \tag{4.11}$$

terwijl omgekeerd de $a_k$, $b_k$ in termen van de $c_k$ gegeven worden door (4.10).

Men spreekt van een *reëelwaardige Fourier-reeks* als de coëfficienten $a_0$, $a_k$ en $b_k$ allen reële getallen zijn. Met het oog op (4.11) is dit equivalent met de voorwaarde dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $c_k$ gelijk is aan de complex geconjugeerde $\overline{c_{-k}}$ van $c_{-k}$. Merk op dat dit impliceert dat $c_0$ reëel is. In het geval van een reëelwaardige Fourier-reeks noemt men de uitdrukking rechts van het gelijkteken in (4.8) de *reële gedaante* van de Fourier-reeks. Omdat, zelfs als de Fourier-reeks reëelwaardig is, de termen $c_k\, e^{ikx}$ met $c_k \neq 0$, $k \neq 0$ geen reëelwaardige functies van $x \in \mathbb{R}$ zijn, heet de uitdrukking links van het gelijkteken in (4.8) de *complexe gedaante* van de Fourier-reeks.

Men noemt de Fourier-reeks (4.8) voor een gegeven $x \in \mathbb{R}$ *symmetrisch convergent* als de rij van partiële sommen

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \tag{4.12}$$

convergent is voor $n \to \infty$. De limiet $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ heet dan de som van de Fourier reeks. Uit het hierboven genoemde verband tussen $a_k, b_k$ en $c_k$ is gemakkelijk af te leiden dat (4.12) gelijk is aan de symmetrische partiële som van de complexe gedaante van de Fourier-reeks

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}. \tag{4.13}$$

In Paragraaf 4.5 zullen we op deze vorm van convergentie terugkomen.

In het vervolg werken we voornamelijk met de complexe gedaante van de Fourier-reeks omdat die gemakkelijker te hanteren is. We gebruiken daarbij de volgende sterkere eis van (puntsgewijze) convergentie.

**Definitie 4.9** De Fourier-reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ heet *puntsgewijs convergent* op een deelverzameling $S$ van $\mathbb{R}$ indien voor elke $x \in S$ de beide reeksen

$$\sum_{k\geq 1} c_{-k} e^{-ikx} \quad \text{en} \quad \sum_{k\geq 0} c_k e^{ikx} \tag{4.14}$$

convergent zijn. Is dit het geval, dan noteert men de som van de reeks als

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad (s \in S).$$

$\oslash$

In geval de complexe Fourier-reeks convergent is in het punt $x \in \mathbb{R}$, dan is de rij van symmetrische partiële sommen (4.13) dat zeker. Voor de limiet schrijven we in dat geval

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{4.15}$$

en we spreken wederom van de *som van de Fourier-reeks*.

Naast puntsgewijze convergentie hanteren we in deze context ook het begrip uniforme convergentie.

**Definitie 4.10** De Fourier-reeks (4.8), gezien als reeks van functies van $x \in \mathbb{R}$, heet *uniform convergent* indien de beide reeksen (4.14) uniform convergent zijn. $\oslash$

We zullen conclusies voornamelijk voor de complexe gedaante van de Fourier-reeks formuleren. Het verband tussen de (coëfficiënten van) de reële en de complexe vorm maken de vertaling naar de corresponderende resultaten voor de reële vorm tot een eenvoudige oefening.

Het is duidelijk dat een convergente Fourier-reeks van de vorm (4.8) een periodieke functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met periode $2\pi$ definieert.

**Opmerking 4.11** In plaats van periodieke functies met periode $2\pi$ kan men ook *periodieke functies* beschouwen met een *andere periode* $\omega > 0$. Dit zijn functies $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan $g(y + \omega) = g(y)$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Het is duidelijk dat de substitutie

$$f(x) = g\left(\frac{\omega}{2\pi}\, x\right), \quad g(y) = f\left(\frac{2\pi}{\omega}\, y\right),$$

een $\omega$-periodieke functie $g$ overvoert in een $2\pi$-periodieke functie $f$ en vice versa. Om deze reden zijn alle resultaten in dit hoofdstuk representatief voor periodieke functies met een willekeurige periode. $\oslash$

In het vervolg zullen we regelmatig te maken krijgen met reeksen van de vorm

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k,$$

met $v_k$, $(k \in \mathbb{N})$, vectoren van een genormeerde lineaire ruimte, dwz. een lineaire ruimte $V$ voorzien van een norm $\|\cdot\|$. Voorbeelden hiervan zijn $V = \mathbb{R}^n$ (waaronder $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) of $V = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van de sup-norm. Als generalisatie van eerdere definities noemen we een dergelijke reeks convergent indien de rij van partiële sommen $s_n := \sum_{k=0}^n v_k$ een limiet heeft in de metrische ruimte $V$; dwz. er bestaat een $s \in V$ zodat $\|s_n - s\| \to 0$ voor $n \to \infty$. De reeks heet *absoluut convergent* indien de reeks $\sum_{k\geq 0} \|v_k\|$ convergent is als reeks met waarden in $\mathbb{R}$.

Zoals we in het bovenstaande gezien hebben geven Fourier-reeksen algemener aanleiding tot reeksen van de vorm

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k \tag{4.16}$$

waarbij de sommatie zich uitstrekt over de index-verzameling $\mathbb{Z}$. In overeenstemming met tweezijdige integralen zullen we een dergelijke reeks convergent noemen indien de stukken $\sum_{k<0} v_k$ en $\sum_{k\geq 0} v_k$ beiden convergent zijn.

**Definitie 4.12** Zij $(V, \|\cdot\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. Een reeks in $V$ van de vorm (4.16) heet *convergent* indien beide reeksen

$$\sum_{k\geq 0} v_k \quad \text{en} \quad \sum_{k\geq 1} v_{-k} \quad \text{convergeren.}$$

In dat geval heet

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k := \sum_{k=1}^{\infty} v_{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

de som van de reeks. De reeks heet *absoluut convergent* indien $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|v_k\|$ convergent is als reeks met waarden in $\mathbb{R}$. $\oslash$

De bovenstaande definitie is in het bijzonder van toepassing op de ruimte $V = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voorzien van de sup-norm $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$. Een Fourier-reeks van de vorm

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \tag{4.17}$$

kan gezien worden als reeks met waarden in deze ruimte. Absolute convergentie van een reeks in deze context is eerder ook absoluut uniforme convergentie genoemd.

**Lemma 4.13** *Zij $c_k \in \mathbb{C}$ voor $k \in \mathbb{Z}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De reeks* (4.17) *is absoluut uniform convergent.*

(b) *De reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ is convergent.*

(c) *Er is een $M > 0$ zo dat*

$$\sum_{k=-l}^{l} |c_k| \le M \quad \text{voor alle} \quad l \ge 0.$$

*Indien* (a)-(c) *gelden, dan convergeert de de Fourier-reeks (4.17) uniform op $\mathbb{R}$ en behoort de som-functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{4.18}$$

*tot $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Met andere woorden, $f$ is continu en periodiek met periode $2\pi$.*

**Bewijs** In de notatie (4.3) kan de reeks (4.17) geschreven worden als $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varepsilon_k$ met waarden in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Zij $k \in \mathbb{Z}$, dan geldt $|\varepsilon_k(x)| = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus de sup-norm van de corresponderende term wordt gegeven door

$$\|c_k\varepsilon_k\|_{\mathbb{R}} = |c_k|.$$

Hieruit volgt de equivalentie van (a) en (b). Als (b) geldt, dan volgt (c) met $M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$. Veronderstel omgekeerd dat (c) geldt. Dan is de rij van partiële sommen $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} |c_k|$ monotoon stijgend en naar boven begrensd door $M$, dus convergent. Dus $\sum_{k\ge 0} |c_k|$ convergeert. Om dezelfde reden is $\sum_{k\ge 1} |c_{-k}|$ convergent. Hieruit volgt (b).

Veronderstel nu dat (a) - (c) gelden. Uit de absoluut uniforme convergentie van de Fourier-reeks volgt de uniforme convergentie, zie Lemma 1.33. Wegens Stelling 1.30 is de som-functie dus continu. Uit de uniforme convergentie volgt puntsgewijze convergentie van de reeks. Zij $f_n = \sum_{|k|\le n} c_k\varepsilon_k$. Dan geldt dat $f_n \to f$ puntsgewijs op $\mathbb{R}$. Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt $f_n(x) = f_n(x + 2\pi)$. Door de limiet te nemen voor $n \to \infty$ volgt hieruit dat $f(x) = f(x + 2\pi)$. □

**Voorbeeld 4.14** De absoluut uniform convergente reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(k^2 x\right)$$

uit Voorbeeld 1.38 is een Fourier-reeks, waarvan de coëfficiënten $a_j$, $b_j$ gedefinieerd zijn door $a_j = 0$ voor alle $j \ge 0$, $b_j = 0$ voor iedere $j \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ die niet gelijk is aan een kwadraat van een geheel getal, en tenslotte $b_j = 1/k^2$ als $j = k^2$, $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$. Men noemt een Fourier-reeks *lacunair* als de verzameling van de rangnummers $j$ waarvoor $c_j \ne 0$ 'steeds grotere gaten' vertoont voor grote $|j|$. Lacunaire Fourier-reeksen worden vaak gebruikt om er al te naïeve ideeën over het gedrag van functies mee te weerleggen. De plaatjes van Voorbeeld 1.38 illustreren dit. ⊘

Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan definiëren we *k-de Fourier-coëfficiënt* van $f$ (voor $k \in \mathbb{Z}$) door

$$\mathcal{F}(f)_k = \langle f, \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx. \tag{4.19}$$

**Lemma 4.15** *Voor alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat*

$$|\mathcal{F}(f)_k| \leq \|f\|_{\mathbb{R}}. \tag{4.20}$$

Hierin staat $\|f\|_{\mathbb{R}}$ voor de sup-norm van $f$ over $\mathbb{R}$. Vanwege de periodiciteit van $f$ is deze gelijk aan $\|f\|_{[-\pi,\pi]}$.

**Bewijs** Er geldt dat

$$|\mathcal{F}(f)_k| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \leq \|f\|_{\mathbb{R}}.$$

□

De volgende stelling van Euler (1777) en Fourier geeft aan hoe de coëfficiënten van een Fourier-reeks teruggevonden kunnen worden uit de som.

**Stelling 4.16** *Veronderstel dat $c_k \in \mathbb{C}$ voor $k \in \mathbb{Z}$ en dat de Fourier-reeks* (4.17) *uniform convergeert, met somfunctie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegeven door* (4.18). *Dan geldt voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ dat*

$$c_k = \mathcal{F}(f)_k. \tag{4.21}$$

**Bewijs** We schrijven

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k \varepsilon_k.$$

Dan geldt wegens de uniforme convergentie dat $f_n \to f$ uniform op $\mathbb{R}$, dus $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} \to 0$, voor $n \to \infty$. Uit de schatting (4.20) leiden we nu af dat $|\mathcal{F}(f_n)_k - \mathcal{F}(f)_k| = |\mathcal{F}(f_n - f)_k| \to 0$, dus

$$\mathcal{F}(f)_k = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n)_k.$$

We merken nu op dat $f_n$ een Fourier polynoom is, en dat $\mathcal{F}(f_n)_k = c_k$ voor alle $n \geq k$, wegens Lemma 4.7. Hieruit concluderen we tenslotte dat $\mathcal{F}(f)_k = c_k$. □

In het vervolg noteren we met $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de collectie van functies $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Voorzien van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is dit een complexe lineaire ruimte. Aldus geldt voor $c, d \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$ dat

$$(c+d)(k) = c(k) + d(k) \quad \text{en} \quad (\lambda c)(k) = \lambda c(k).$$

De elementen van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ heten ook wel de rijen in $\mathbb{C}$ met index-verzameling $\mathbb{Z}$.

**Definitie 4.17** Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. De rij $\mathcal{F}(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ gedefinieerd door $k \mapsto \mathcal{F}(f)_k$ heet ook wel de *Fourier-getransformeerde* van $f$. De bijbehorende reeks (4.17) met $c_k = \mathcal{F}(f)_k$, heet de *Fourier-reeks van de functie $f$.* ⊘

Uit de gegeven definitie volgt gemakkelijk dat de afbeelding $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ een complex lineaire afbeelding

$$\mathcal{F}: \quad C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \tag{4.22}$$

definieert. We noemen deze afbeelding de *Fourier transformatie.*

Al in de 18e eeuw werd het vermoeden uitgesproken dat de 'algemene, voldoend nette' functie gelijk is aan de som van een Fourier-reeks. In de 18e en het begin van de 19e eeuw vonden er verhitte discussies plaats tussen aanhangers van dit vermoeden en tegenstanders, die beargumenteerden dat de sommen van Fourier-reeksen een heel speciale klasse van functies vormen. Het vermoeden werd in 1829 door de Duitse wiskundige J. Dirichlet bevestigd. Voor een speciale klasse van $2\pi$-periodieke functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bewees hij dat de rij van de symmetrische partiële sommen

$$s_l(x) := \sum_{k=-l}^{l} \mathcal{F}(f)_k \, e^{ikx}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{4.23}$$

voor iedere $x \in \mathbb{R}$ naar $f(x)$ convergeert als $l \to \infty$. We komen hier in paragraaf 4.5 op terug.

**Opmerking 4.18** De eis dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ is *niet voldoende* voor convergentie. In 1876 construeerde P. du Bois Reymond een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en een aftelbare dichte deelverzameling $D$ van $\mathbb{R}$, met de eigenschap dat voor iedere $x \in D$ de rij van de partiële sommen (4.23) onbegrensd is, dus zeker niet convergeert naar $f(x)$. Dat $D$ dicht ligt in $\mathbb{R}$ betekent dat iedere $y \in \mathbb{R}$ een limietpunt van $D$ is, dwz. voor iedere $\delta > 0$ geldt $]\, y - \delta, y + \delta\, [ \cap D \neq \emptyset$. Voor meer informatie, zie bijvoorbeeld Vol. 1, Ch. VIII, §1 in A. Zygmund: Trigonometric Series. Cambridge University Press, 1968. $\oslash$

Stel dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan blijkt uit de bovenstaande opmerking dat we niet kunnen aannemen dat de bijbehorende Fourier-reeks $\sum_k c_k \varepsilon_k$ puntsgewijs convergent is. Zelfs als we op de een of andere manier weten dat de coëfficiënten $c_k$ voldoen aan conditie (b) van Lemma 4.13 dan kunnen we nog niet direct concluderen dat $f = \sum_k c_k \varepsilon_k$. Wel garandeert Stelling 4.16 dat door $g = \sum_k c_k \varepsilon_k$ een functie in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd wordt met Fourier-coëfficiënten die gegeven worden door $\mathcal{F}(g)_k = c_k = \mathcal{F}(f)_k$. Met andere woorden, $g$ en $f$ hebben dezelfde Fourier-getransformeerde. Om te kunnen concluderen dat $f = g$ is het volgende resultaat voldoende.

**Stelling 4.19** *De Fourier-transformatie $\mathcal{F} : C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ is injectief.*

We zullen dit resultaat in de volgende paragraaf afleiden door middel van een benaderingstechniek die bekend staat als *Abel–Poisson benadering*. Deze paragraaf sluiten we af met het volgende belangrijke gevolg.

**Stelling 4.20** *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continu en periodiek met periode $2\pi$. Noteer de Fourier-coëfficiënten van $f$ met $c_k$, voor $k \in \mathbb{Z}$. Als $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, dan geldt*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

*met absoluut uniforme convergentie van de reeks op $\mathbb{R}$.*

**Bewijs** Veronderstel dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, schrijf $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ en veronderstel dat $\sum |c_k| < \infty$. Dan is de Fourier reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varepsilon_k$ absoluut uniform convergent, wegens Lemma 4.13. Wegens Stelling 4.16 wordt door

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

een continue functie $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd met $\mathcal{F}g = c = \mathcal{F}f$. Uit de injectiviteit van de Fourier-transformatie volgt nu dat $f = g$. De functie $f$ wordt dus gegeven door zijn Fourier-reeks. $\square$

**Voorbeeld 4.21** De $2\pi$-periodieke functie $f$ op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = |x|$ als $x \in ]-\pi,\, \pi]$, is continu. Maak een schets! De Fourier-coëfficiënten worden gegeven door

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\; dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\; dx = \frac{\pi}{2},$$

en voor $k \neq 0$ door

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx}\; dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \frac{1}{-ik}\frac{d}{dx} e^{-ikx}\; dx.$$

De laatste integraal kunnen we schrijven als de som van de integraal over $[-\pi,\, 0]$ en de integraal over $[0,\, \pi]$. Op ieder van deze integralen passen we een partiële integratie toe, hetgeen uiteindelijk leidt tot

$$c_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi\, k^2}, \quad k \neq 0.$$

Hieruit leiden we af dat

$$|c_k| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2},$$

waaruit we zien dat $\sum |c_k|$ convergeert. We concluderen dat de Fourier-reeks van $f$ absoluut uniform convergeert. Opmerkend dat $c_k = 0$ als $k$ even is en $k \neq 0$ en $c_k = -2/\pi k^2$ als $k$ oneven is, krijgen we nu op grond van Stelling 4.20 dat

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos((2j-1)\, x)}{(2j-1)^2}, \quad |x| \leq \pi, \tag{4.24}$$

waarbij de convergentie uniform is op grond van Lemma 4.13.

Door $x = 0$ in te vullen vinden we in het bijzonder dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{4.25}$$

Noteren we

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

dan geeft splitsing van de som over $n = 2j$ en over $n = 2j - 1$, met $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, dat

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{s}{4} + \frac{\pi^2}{8}$$

dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{4.26}$$

Deze identiteit is afkomstig van Euler, uit het midden van de 18e eeuw. $\oslash$

We vatten de resultaten van deze paragraaf nog eens samen in termen van de Fourier transformatie opgevat als lineaire afbeelding als in (4.22). Met $l^1(\mathbb{Z})$ noteren we de deelverzameling van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$

bestaande uit de rijtjes $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ waarvoor de bijbehorende reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ convergeert. Men gaat gemakkelijk na dat $l^1(\mathbb{Z})$ een complex lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ is. Is $c \in l^1(\mathbb{Z})$, dan wordt door

$$\mathcal{S}(c) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \varepsilon_k$$

een functie in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd, zie Lemma 4.13. Het is duidelijk dat de zo gedefinieerde afbeelding

$$\mathcal{S} : l^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

lineair is. Stelling 4.16 kunnen we nu herformuleren als

**Stelling 4.16'** *$\mathcal{F} \circ \mathcal{S} = I$ op $l^1(\mathbb{Z})$.*

Tenslotte kunnen we Stelling 4.20 als volgt herformuleren in termen van de afbeeldingen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{S}$.

**Stelling 4.20'** *Als $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $\mathcal{F}f \in l^1(\mathbb{Z})$ dan is $f = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(f)$.*

## 4.3 Abel–Poisson benadering

In deze paragraaf veronderstellen we dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dwz. $f$ is een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die $2\pi$-periodiek is. Door het in Opmerking 4.18 genoemde voorbeeld weten we dat de rij (4.23) van symmetrische partiële sommen van de Fourier-reeks niet convergent hoeft te zijn.

Anderzijds weten we door Lemma 4.15 wel dat de collectie Fourier-coëfficiënten $\mathcal{F}(f)_k$, voor $k \in \mathbb{Z}$, begrensd is door de sup-norm $\|f\|_{\mathbb{R}}$. Door de Fourier-coëfficiënten $c_k := (\mathcal{F}f)_k$ te vervangen door $r^{|k|}c_k$, met $0 < r < 1$ krijgen we een continue functie $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met een zelfs absoluut uniform convergente Fourier-reeks.

Ter voorbereiding geven we het volgende lemma.

**Lemma 4.22** *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Dan is de reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}c_k\varepsilon_k$ absoluut uniform convergent voor iedere $0 < r < 1$. In het bijzonder wordt voor iedere $0 < r < 1$ door*

$$f_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} c_k \varepsilon_k \tag{4.27}$$

*een continue functie $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd.*

**Bewijs** Laat $0 < r < 1$ en schrijf $d_k = r^{|k|}c_k$. Er geldt dat $|c_k| \le \|f\|_{\mathbb{R}}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$, dus $|d_k| \le \|f\|_{\mathbb{R}} r^{|k|}$. Voor alle $l \ge 0$ geldt

$$\sum_{k=-l}^{l} r^{|k|} = -1 + 2\sum_{k=0}^{l} r^k \le -1 + \frac{2}{1-r} = \frac{1+r}{1-r} \tag{4.28}$$

dus

$$\sum_{k=-l}^{l} |d_k| \le \frac{1+r}{1-r}\|f\|_{\mathbb{R}}.$$

De coëfficiënten van de reeks $\sum_k d_k\varepsilon_k$ voldoen daarom aan conditie (c) van Lemma 4.13. Alle uitspraken volgen nu door toepassing van het genoemde lemma. □

De volgende stelling zegt dat de functies $f_r$ de gegeven functie $f$ uniform benaderen voor $r \uparrow 1$. Dit staat bekend als de *Abel–Poisson benaderingsmethode*, genoemd naar de Noorse wiskundige N. Abel en de Franse wiskundige S. Poisson.

**Stelling 4.23** *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Definieer de functies $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voor $0 < r < 1$ door* (4.27). *Dan geldt dat*

$$\lim_{r\uparrow 1} \|f - f_r\|_{\mathbb{R}} = 0.$$

Ter voorbereiding op het bewijs van deze stelling behandelen we eerst het convolutie-product op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, en vervolgens eigenschappen van de zogenaamde *Poisson-kern.*

### Het convolutie-product

Voor twee functies $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiëren een nieuwe functie $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$f * g\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\; dy, \tag{4.29}$$

voor $x \in \mathbb{R}$. De zo gedefinieerde functie $f * g$ heet het *convolutie-product* van $f$ en $g$.

Uit de continuiteit van de functies $(x, y) \mapsto f(x - y)$ en $(x, y) \mapsto g(y)$ volgt met de productregel dat de integrand een continue functie van $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is. Met een resultaat uit de cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' volgt hieruit dat de functie $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continu is. Het is evident dat $f * g$ periodiek is met periode $2\pi$, dus $f * g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Door de substitutie $z = x - y$ uit te voeren in de integraal van het convolutieproduct zien we dat

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(x-z)\; dz = g * f(x).$$

Het convolutieproduct is dus commutatief. Uit toepassing van de driehoeksongelijkheid voor integratie leiden we direct af dat $|f * g(x)| \leq \|f\|_{\mathbb{R}} \cdot \|g\|_{\mathbb{R}}$, voor alle $x \in \mathbb{R}$, dus ook

$$\|f * g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}} \cdot \|g\|_{\mathbb{R}}. \tag{4.30}$$

Het convolutieproduct verhoudt zich op een bijzondere manier tot de Fourier-transformatie $\mathcal{F}$.

**Lemma 4.24** *Laat $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan is $f * g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat*

$$\mathcal{F}(f * g)_k = (\mathcal{F}f)_k(\mathcal{F}g)_k.$$

**Bewijs** Zie een van de opgaven. □

Ook geldt het volgende lemma.

**Lemma 4.25** *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt voor alle $k \in \mathbb{Z}$ dat*

$$f * \varepsilon_k = (\mathcal{F}f)_k\, \varepsilon_k.$$

**Bewijs** Zij $x \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned} f * \varepsilon_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)\varepsilon_k(x-z)\; dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{ik(x-z)}\; dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-ikz}\; dz \;\cdot e^{ikx} \\ &= (\mathcal{F}f)_k\, \varepsilon_k(x). \end{aligned}$$

□

**Eigenschappen van de Poisson-kern**

**Lemma 4.26** *Zij* $0 \leq r < 1$. *De reeks*

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx}. \tag{4.31}$$

*convergeert absoluut uniform op* $\mathbb{R}$ *en definieert een functie* $P_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

**Bewijs** We passen Lemma 4.13 toe op de Fourier reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\varepsilon_k$, met coëfficiënten $r^{|k|}$, voor $k \in \mathbb{Z}$. Uit de schatting (4.28) leiden we af dat deze reeks aan voorwaarde (c) van het genoemde lemma voldoet. De uitspraken volgen nu door toepassing van het lemma. $\square$

**Lemma 4.27** *Zij* $0 \leq r < 1$. *Zij* $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *en definieer* $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *als in (4.27). Dan is*

$$f_r = P_r * f. \tag{4.32}$$

**Bewijs** Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we het Fourier polynoom $P_{r,n}$ door

$$P_{r,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Uit het voorgaande lemma volgt dat $P_{r,n} \to P_r$ uniform op $\mathbb{R}$ voor $n \to \infty$, dus $\|P_{r,n} - P_r\|_{\mathbb{R}} \to 0$ voor $n \to \infty$. Door toepassing van de schatting (4.30) vinden we dat

$$\|P_{r,n} * f - P_r * f\|_{\mathbb{R}} = \|(P_{r,n} - P_r) * f\|_{\mathbb{R}} \leq \|P_{r,n} - P_r\|_{\mathbb{R}} \cdot \|f\|_R \to 0$$

voor $n \to \infty$, dus $P_{r,n} * f \to P_r * f$ uniform op $\mathbb{R}$ voor $n \to \infty$. Anderzijds geldt dat

$$P_{r,n} * f = \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|}\varepsilon_k * f = \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} c_k \varepsilon_k$$

dus $P_{r,n} * f \to f_r$ uniform op $\mathbb{R}$, voor $n \to \infty$. Uniforme limieten zijn uniek, dus (4.32) volgt. $\square$

**Lemma 4.28** *Zij* $0 \leq r < 1$. *Dan is*

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 2r(1 - \cos x)}, \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{4.33}$$

**Bewijs** Aangezien $|re^{ix}| < 1$ volgt door sommatie van de meetkundige reeks dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty} (re^{ix})^k = \frac{1}{1 - re^{ix}}.$$

Evenzo geldt dat

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} r^{|k|} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (re^{-ix})^k = \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}}.$$

Sommatie van deze reeksen leidt tot

$$P_r(x) = \frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} = \frac{1 - r^2}{(1 - re^{ix})(1 - re^{-ix})}.$$

Hieruit volgt gemakkelijk (4.33). $\square$

**Lemma 4.29**

(a) *Voor alle* $0 \leq r < 1$ *geldt dat* $P_r(x) > 0$, $(\forall x \in \mathbb{R})$, *en dat*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\, dx = 1. \tag{4.34}$$

(b) *Zij* $0 < \delta < \pi$. *Dan convergeert* $P_r$ *op* $V := [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ *uniform naar nul, voor* $r \uparrow 1$.

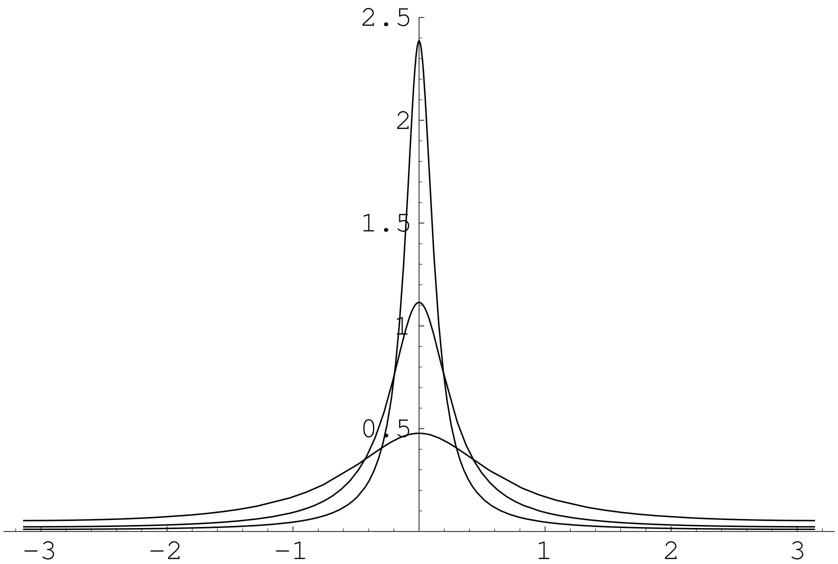
**Bewijs** We beginnen met (a). Uit $0 \leq r < 1$ en $|\cos x| \leq 1$ volgt dat teller en noemer in (4.33) strikt groter dan nul zijn, dus dat $P_r(x) > 0$.

Uit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} < \infty$ volgt dat $P_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met de definiërende reeks als Fourier reeks. In het bijzonder is de nulde Fourier coëfficiënt gelijk aan $r^0 = 1$. Hieruit volgt dat $\langle P_r, \varepsilon_0 \rangle = 1$, dus (4.34).

Om (b) te bewijzen merken we op dat $1 - \cos x \geq 1 - \cos \delta$ voor $x \in V$, dus

$$0 < P_r(x) \leq \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 2r(1 - \cos \delta)}, \qquad (x \in V).$$

Het rechterlid heeft limiet nul voor $r \uparrow 1$. Hieruit volgt dat $\|P_r\|_V \to 0$. $\square$




De functies $v \mapsto P_r(v)$ voor $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{4}$ en $r = \frac{7}{8}$.

Omdat $f_r = P_r * f$, is de volgende stelling equivalent met Stelling 4.23.

**Stelling 4.30** *Laat* $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. *Dan geldt dat* $P_r * f \to f$ *uniform op* $\mathbb{R}$, *voor* $r \uparrow 1$.

**Bewijs** We zullen dit afleiden puur door gebruik te maken van de in Lemma 4.29 geformuleerde eigenschappen van de *Poisson-kern* $P_r$. De redenatie is als volgt. We merken op dat

$$\begin{aligned} P_r * f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)P_r(y)\,dy - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y) - f(x)]P_r(y)\,dy. \end{aligned}$$

waarbij de tweede identiteit volgt door toepassing van (4.34). Hieruit volgt door toepassing van de driehoeksongelijkheid voor integralen dat

$$|P_r * f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|P_r(y)\,dy. \tag{4.35}$$

De functie $f$ is continu dus uniform continu op $[-2\pi, 2\pi]$. Vanwege de periodiciteit is de functie ook uniform continu op $\mathbb{R}$. Er is dus een $0 < \delta < \pi$ zo dat voor $u, v \in \mathbb{R}$ geldt:

$$|u - v| \leq \delta \implies |f(u) - f(v)| < \varepsilon/2.$$

Voor alle $x \in [-\pi, \pi]$ en alle $y \in [-\delta, \delta]$ volgt dus dat $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon/2$. Anderzijds geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ dat

$$|f(x-y) - f(x)| \leq |f(x-y)| + |f(y)| \leq 2\|f\|_{\mathbb{R}}.$$

Splitsen we de bovenstaande integraal op in een stuk over het interval $[-\delta, \delta]$ en een stuk over de verzameling $V := [-\pi, \pi] \setminus\, ]-\delta, \delta[$ dan vinden we

$$\begin{aligned} |P_r * f(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} P_r(y)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_V 2\|f\|_{\mathbb{R}}\|P_r\|_V\,dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{2} P_r(y)\,dy + 2\|f\|_{\mathbb{R}}\|P_r\|_V \\ &= \varepsilon/2 + 2\|f\|_{\mathbb{R}}\|P_r\|_V. \end{aligned}$$

Uit Lemma 4.29 (b) volgt nu dat er een $R < 1$ bestaat zo dat voor alle $r \in ]R, 1[$ geldt $\|P_r\|_V < \varepsilon/4(1 + \|f\|_{\mathbb{R}})$. Voor dergelijke $r$ geldt dus de schatting

$$|P_r * f(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \qquad (\forall x \in [-\pi, \pi]),$$

dus ook $\|P_r * f - f\|_{[-\pi,\pi]} \leq \varepsilon$. De uniforme convergentie volgt. □

Zij $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van Fourier-polynomen, gedefinieerd als in Definitie 4.6.

**Gevolg 4.31** *De ruimte $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ligt dicht in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ten aanzien van de sup-norm. Anders gezegd, zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een Fourier-polynoom $p \in P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat $\|f - p\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$.*

**Bewijs** Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan bestaat er wegens Stelling 4.23 een $0 < r < 1$ zo dat $\|f_r - f\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon/2$. Schrijf $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ en definieer

$$f_{r,n} = \sum_{|k| \leq n} r^{|k|} c_k \varepsilon_k.$$

Dan geldt dat $f_{r,n} \to f_r$, uniform op $\mathbb{R}$. Er bestaat dus een $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$\|f_{r,N} - f_r\| < \varepsilon/2.$$

Kies $p = f_{r,N}$, dan is $p$ een Fourier-polynoom, en er geldt dat

$$\|f - p\|_{\mathbb{R}} \leq \|f - f_r\|_{\mathbb{R}} + \|f_r - p\|_{\mathbb{R}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Aan het eind van de vorige paragraaf wezen we al op het belang van het volgende gevolg van Stelling 4.30.

**Gevolg 4.32** *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en veronderstel dat $(\mathcal{F}f)_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Dan is $f = 0$.*

**Bewijs** Definieer $f_r$ als in (4.27). Dan volgt uit het nul zijn van de Fourier-coëfficiënten dat $f_r = 0$ voor elke $0 \leq r < 1$. Volgens Stelling 4.23 geldt dat $\lim_{r\uparrow 1} f_r = f$, uniform op $\mathbb{R}$. We concluderen dat $f = 0$. □

Hiermee is Stelling 4.19 bewezen, en daarmee ook zijn belangrijke gevolg, Stelling 4.20.

## 4.4 Differentiëren en Fourier-transformatie

Voor $p \in \mathbb{N}$ noteren we met $C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van functies $g \in C(R/2\pi\mathbb{Z})$ die bovendien $C^p$ zijn, dwz. alle afgeleiden $g, g', \ldots, g^{(p)}$ bestaan en zijn continu. Met $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ noteren we de ruimte van alle functies $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die willekeurig vaak differentieerbaar zijn.

**Lemma 4.33** *Als $g \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan geldt dat $g * h \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en*

$$\frac{d}{dx}(g * h) = \frac{dg}{dx} * h.$$

**Bewijs** Er geldt dat

$$g * h(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, y)\, dy,$$

met $\varphi(x, y) = g(x - y)h(y)$. Hieruit blijkt dat $\varphi$ continu is op $\mathbb{R}^2$, en bovendien dat $\varphi$ partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele, met partiële afgeleide

$$D_1\varphi(x, y) = g'(x - y)h(y).$$

Aangezien $D_1\varphi$ weer continu is, is differentiatie onder het integraalteken geoorloofd (zie 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen'), en we vinden:

$$\frac{d}{dx} g * h(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} D_1\varphi(x, y)\, dy = (g') * h(x).$$

Hieruit volgt dat $g*h$ differentieerbaar is met afgeleide $(g')*h$. Aangezien $g', h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, vinden we dat de afgeleide continu is. Dus $g * h$ is $C^1$, en de formule voor de afgeleide geldt. □

**Gevolg 4.34** *Zij $p \in \mathbb{N}$ of $p = \infty$. Als $g \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan is $g * h \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.*

**Bewijs** Dit volgt door herhaalde toepassing van het vorige lemma. $\square$

Het onderstaande resultaat is een afzwakking van Gevolg 4.31. We geven toch nogmaals een bewijs, als illustratie van het gebruik van convolutie.

**Gevolg 4.35** *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een functie $g \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met*

$$\|f - g\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon.$$

**Opmerking 4.36** In de taal van de metrische ruimten betekent dit dat $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dicht ligt in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ten aanzien van de uniforme metriek. $\oslash$

**Bewijs** Voor elke $0 \leq r < 1$ is $P_r \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dus ook $P_r * f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Pas nu Stelling 4.30 toe. Dan zien we dat de bewering geldt met $g = P_r * f$, voor $r$ voldoende dicht bij 1. $\square$

Het volgende resultaat is een interessant gevolg, dat verder in deze paragraaf geen rol meer zal spelen.

**Gevolg 4.37** *Zij $a < b$ en $\varphi \in C([a, b])$. Dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een functie $\psi \in C^\infty([a, b])$ met $\|\varphi - \psi\|_{[a,b]} < \varepsilon$.*

**Bewijs** Door verschuiven en herschalen kunnen we reduceren tot het geval dat $a = 0$ en $b = \pi/2$. Laat $\varphi \in C([0, \pi/2]$ en $\varepsilon > 0$. We definiëren nu een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $f|_{[0,\pi/2]} = \varphi$ als volgt

$$f(x) = \begin{cases} (x/\pi + 1)\varphi(0) & \text{voor} \quad -\pi \leq x \leq 0; \\ \varphi(x) & \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi/2; \\ (2 - 2x/\pi)\varphi(\pi/2) & \text{voor} \quad \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

De functie $f$ is continu op $[-\pi, \pi]$ terwijl $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Hieruit volgt dat $f$ uit te breiden is tot een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Nu is er een $g \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat $\|f - g\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$. Definieer $\psi = g|_{[a,b]}$. Dan is

$$\|\varphi - \psi\|_{[a,b]} \leq \|f - g\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon.$$

$\square$

We gaan nu aantonen dat iedere continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie $f$ op $\mathbb{R}$, die bovendien periodiek is met periode $2\pi$, een absoluut uniform convergente Fourier-reeks heeft. Vanwege Stelling 4.20 is dan $f$ gelijk aan zijn eigen Fourier-reeks. Hiermee is aangetoond dat de klasse van functies waarvoor we zeker zijn dat ze gelijk zijn aan hun eigen Fourier-reeks, behoorlijk groot is.

We beginnen met het principe dat, naarmate een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ vaker differentieerbaar is, zijn Fourier-getransformeerde $\mathcal{F}(f)_k$ harder naar nul gaat voor $|k| \to \infty$.

**Lemma 4.38** *Zij $f$ een continu differentieerbare en $2\pi$-periodieke functie op $\mathbb{R}$. Dan geldt*

$$\mathcal{F}(f')_k = ik\,\mathcal{F}(f)_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Bewijs** Met partiële integratie volgt dat

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{i\,k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \\ &= ik\mathcal{F}(f)_k\end{aligned}$$

waarbij de optredende randtermen tegen elkaar wegvallen vanwege de $2\pi$-periodiciteit van de functies $f$ en $\varepsilon_{-k}$. □

Het bovenstaande resultaat heeft een uitbreiding naar functies $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die stuksgewijs $C^1$ zijn, iets wat in de praktijk vaak optreedt.

**Definitie 4.39** Laat $a, b \in \mathbb{R}$ zijn met $a < b$. Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heet *stuksgewijs* $C^p$, voor $p \geq 0$, als er een verdeling $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ van het interval $[a, b]$ bestaat met de volgende eigenschap. Voor iedere $1 \leq j \leq n$ bestaat een $f_j \in C^p([a_{j-1}, a_j])$ zo dat $f = f_j$ op $]a_{j-1}, a_j[$. ⊘

Is een $2\pi$-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stuksgewijs $C^p$ op $[-\pi, \pi]$, dan is hij vanwege de periodiciteit stuksgewijs $C^p$ op ieder gesloten en begrensd interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. We noemen een dergelijk functie dan ook kortweg stuksgewijs $C^p$.

Nu volgt dan de beloofde uitbreiding van Lemma 4.38.

**Lemma 4.40** *Laat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs $C^1$ zijn. Dan geldt voor elke $k \in \mathbb{Z}$ dat*

$$\mathcal{F}(f')_k = ik\mathcal{F}(f)_k \tag{4.36}$$

**Bewijs** Zij $-\pi = a_0 < a_1 < \cdots < a_d = \pi$ een verdeling van het interval $[-\pi, \pi]$ zo dat $f|_{]a_{j-1}, a_j[}$ uit te breiden is naar een $C^1$ function op $[a_{j-1}, a_j]$, voor alle $1 \leq j \leq d$. Omdat $f$ continu is moet deze uitbreiding gelijk zijn aan de beperking van $f$ tot het interval $[a_{j-1}, a_j]$. We concluderen dat de beperking van $f$ tot $[a_{j-1}, a_j]$ een $C^1$ functie is. Zij $k \in \mathbb{Z}$. Door partiële integratie volgt voor elke $j$ dat

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(x) e^{-ikx}\, dx = f(x) e^{-ikx}\Big|_{a_{j-1}}^{a_j} + ik \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

Door sommatie over $j$ vinden we hieruit dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx}\, dx = f(x) e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + ik \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

Wegens de $2\pi$ periodiciteit van $f$ volgt dat de eerste uitdrukking na het gelijkheidsteken gelijk is aan nul. Hieruit volgt (4.36). □

Het volgende lemma zal ons in staat stellen om het vorige optimaal te benutten. Aan het integraal inproduct op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ koppelen we de *kwadraat integraal norm* $\|\cdot\|_2$ die gegeven wordt door

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

De definities van inproduct en norm breiden op voor de hand liggende manier uit naar $2\pi$-periodieke functies $f$ die stuksgewijs continu zijn.

**Lemma 4.41 (Ongelijkheid van Bessel)** *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een $2\pi$-periodieke en stuksgewijs continue functie met Fourier-coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(f)_k$. Dan is*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{4.37}$$

**Bewijs** Zij $n \in \mathbb{N}$. We merken op dat $c_k = \langle f, \epsilon_k\rangle$ en beschouwen het Fourier-polynoom $p = \sum_{|k|\leq n} c_k\epsilon_k$ Dan is

$$\langle p, f-p\rangle = \sum_{|k|\leq n} c_k\langle \epsilon_k, f-p\rangle = 0,$$

dus

$$\|f\|_2^2 = \langle p + (f-p), p + (f-p)\rangle = \langle p, p\rangle + \langle f-p, f-p\rangle,$$

waaruit we afleiden dat

$$\sum_{|k|\leq n} |c_k|^2 = \langle p, p\rangle \leq \|f\|_2^2.$$

Uit de geldigheid van deze schatting, voor iedere $n \in \mathbb{N}$, volgt (4.37). □

**Stelling 4.42** *Laat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs $C^1$ zijn, en schrijf $c_k = \mathcal{F}(f)_k$. Dan geldt:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty.$$

**Bewijs** Uit de aanname dat $f$ stuksgewijs $C^1$ is volgt dat $f'$ een $2\pi$-periodieke stuksgewijs continue functie is, en dus is de kwadraat integraal norm $\|f'\|_2$ eindig. Hieruit volgt wegens de ongelijkheid van Bessel dat

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f')_k|^2 \leq \|f'\|_2^2 < \infty. \tag{4.38}$$

Door toepassing van Lemma 4.40 zien we dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{|k|\leq n} |c_k| = |c_0| + \sum_{0<|k|\leq n} |\mathcal{F}(f')_k|\frac{1}{|k|}.$$

Door toepassing van de Cauchy-Schwarz ongelijkheid op de som in het rechterlid en door vervolgens (4.38) te gebruiken vinden we dat

$$\begin{aligned}\sum_{|k|\leq n} |c_k| &\leq |c_0| + (\sum_{0<|k|\leq n} \|\mathcal{F}(f')_k\|^2)^{1/2}(2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2})^{1/2}\\ &\leq |c_0| + \sqrt{2}\,\|f'\|_2 \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

Aangezien deze schatting geldt voor alle $n \geq 0$, terwijl de uitdrukking in het uiterste rechterlid niet van $n$ afhangt, concluderen we de gewenste schatting. $\square$

Door toepassing van Stelling 4.20 leiden we direct het volgende af.

**Gevolg 4.43** *Laat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs $C^1$ zijn. Dan convergeert de Fourierreeks voor $f$ absoluut uniform naar $f$.*

Voor de fijnproever leiden we nog het volgende sterkere resultaat af voor functies die stuksgewijs $C^2$ zijn.

**Lemma 4.44** *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs $C^2$ en schrijf $c_k := \mathcal{F}(f)_k$. Dan is er een $C > 0$ zo dat*

$$|c_k| \leq C\,(1 + |k|^2)^{-1} \tag{4.39}$$

**Bewijs** Als in het bewijs van Lemma 4.40 concluderen we dat er een verdeling $-\pi = a_0 < a_1 < \cdots < a_d = \pi$ is zo dat de beperking $f_j$ van $f$ tot ieder van de deelintervallen $I_j := [a_{j-1}, a_j]$ een $C^2$-functie is. Op zo'n deelinterval hebben we

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f''(x)e^{-ikx}\,dx = f'(x)e^{-ikx}\Big|_{a_{j-1}+}^{a_j} + ik\int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(x)e^{-ikx}\,dx.$$

Door sommatie over $j$ vinden we dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-ikx}\,dx = C_k + ik\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx.$$

met $C_k$ een geschikte constante. Het is gemakkelijk in te zien dat

$$|C_k| \leq \sum_{j=1}^{d}\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|f'(a_j - \varepsilon)| + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}|f'(a_{j-1} + \varepsilon)|\right) \leq 2dM(f'),$$

waarin

$$M(f') := \max_{1\leq j\leq d}\|f_j'\|_{I_j}.$$

Voor $k \neq 0$ vinden we dat

$$\mathcal{F}(f')_k = \frac{1}{ik}\left(\mathcal{F}(f'')_k - \frac{C_k}{2\pi}\right).$$

Combineren we dit met (4.36) dan vinden we dat

$$\mathcal{F}(f)_k = \frac{-1}{k^2}\left(\mathcal{F}(f'')_k - \frac{C_k}{2\pi}\right).$$

Aangezien $f''$ en $f''\varepsilon_{-k}$ Riemann integreerbaar zijn op $[-\pi, \pi]$, volgt dat

$$|\mathcal{F}(f'')_k| \leq \|f''\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx.$$

We concluderen dat, voor $n \neq 0$,

$$|\mathcal{F}(f)_k| \leq \frac{1}{k^2}\left(\|f''\|_1 + \frac{d}{\pi}M(f')\right).$$

Combineren we dit met $1/k^2 \leq 2(1+k^2)^{-1}$ voor $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dan volgt de schatting (4.39) met een geschikte constante $C > 0$. $\square$

**Voorbeeld 4.45** We beschouwen nogmaals de $2\pi$-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die voor $-\pi < x \leq \pi$ gegeven wordt door $f(x) = |x|$. Deze functie is continu en stuksgewijs $C^2$. In Voorbeeld 4.21 zagen we dat de Fourier-coëfficiënten $c_k$ gegeven worden door

$$c_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad c_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \quad k \neq 0.$$

Dit is in overeenstemming met Lemma 4.44 en Stelling 4.42 $\oslash$

## 4.5 Functies met sprongen en de Dirichlet-kern

In deze paragraaf bestuderen we het gedrag van de Fourier-reeks van een $2\pi$-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ waarvan we niet meer zullen eisen dat hij continu is. Een dergelijke functie $f$ heet *lokaal Riemann-integreerbaar* als hij Riemann-intergreerbaar is over ieder gesloten en begrensd interval. Vanwege de periodiciteit is dit het geval dan en slechts dan als $f$ Riemann-integreerbaar is op een interval van de vorm $[a, a+2\pi]$. De ruimte van dergelijke $2\pi$-periodieke lokaal Riemann-integreerbare functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt genoteerd met

$$\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

Het product van twee lokaal Riemann-integreerbare functies is weer lokaal Riemann-integreerbaar, zie Appendix. Daarom kunnen we het integraal-inproduct uitbreiden tot $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ door formule (4.2) te gebruiken voor $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Voor functies $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiëren we zoals voorheen de Fourier-getransformeerde $\mathcal{F}(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ door

$$\mathcal{F}(f)_k := \langle f, \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Bovendien definiëren we voor $l \in \mathbb{N}$ de $l$-de bijbehorende symmetrische partiële som $s(f)_l$ van de Fourier-reeks door

$$s(f)_l(x) = \sum_{k=-l}^{l} c_k e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

met $c_k = (\mathcal{F}f)_k$. Voor een speciale ruimte van functies kan aangetoond worden dat de rij van symmetrische partiële sommen een limiet heeft voor $l \to \infty$.

We brengen de definitie van stuksgewijze $C^1$ functies $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ in herinnering, zie Definitie 4.39.

**Definitie 4.46** In het vervolg noteren we met $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met

(a) $f(x + 2\pi) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f$ is stuksgewijs $C^1$ op het interval $[-\pi, \pi]$.

$\oslash$

Vanwege de periodiciteit is elke functie $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs $C^1$ op ieder gesloten en begrensd interval.

Laat $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt voor elke $x \in \mathbb{R}$ dat de limieten

$$f(x-) := \lim_{h \downarrow 0} f(x-h), \quad \text{en} \quad f(x+) := \lim_{h \downarrow 0} f(x+h)$$

bestaan. Uiteraard geldt dat $f$ continu is in $x$ dan en slechts dan als $f(x+) = f(x-) = f(x)$, in welk geval $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = f(x)$.

**Stelling 4.47** *Zij $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $x \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} s(f)_l(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Voor punten $x \in \mathbb{R}$ waar de functie $f$ uit de bovenstaande stelling continu is, geldt dus:

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \sum_{|k|\le l} (\mathcal{F}f)_k \, e^{ikx}$$

De rest van deze paragraaf zal gewijd zijn aan het bewijs van Stelling 4.47.

**Voorbeeld 4.48** Beschouw de *zaagtandfunctie* $f$ die ontstaat als de $2\pi$-periodieke uitbreiding van de functie $f(x) = x$ op $]0,\, 2\pi[$. Voor de waarde $f(0) = f(2\pi)$ van $f$ in het sprongpunt kunnen we iedere gewenste waarde nemen. Merk op dat voor iedere keuze geldt $f(0+) = 0$ en $f(0-) = f(2\pi-) = 2\pi$. De functie $f$ behoort tot $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Maak een schets!

De Fourier-coëfficiënten worden gegeven door

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,(2\pi)^2 = \pi$$

terwijl we voor $k \neq 0$ met behulp van een partiële integratie krijgen dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,\frac{1}{-ik}\,\frac{d}{\mathrm{d}x}e^{-ikx}\,dx = -\frac{1}{ik}$$

Hiermee is de Fourier-reeks van $f$ gegeven door

$$\pi - \sum_{k\ge 1} \frac{2\,\sin(kx)}{k}.$$

Voor $x = 0$ convergeert deze, op een flauwe manier, met som gelijk aan $\pi$, hetgeen precies midden tussen $f(0+) = 0$ en $f(0-) = 2\pi$ in ligt. Dit suggereert dat $f(0) = \pi$ de natuurlijke keuze is voor de waarde van $f$ in het sprongpunt.

Stelling 4.47 impliceert anderzijds dat

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi, \tag{4.40}$$

een fraaie klassieke formule.

De in dit voorbeeld optredende complexe gedaante

$$\pi - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikx}}{ik}$$

van de Fourier-reeks is niet convergent voor $x = 0$, aangezien de reeks $\sum_{k\ge 1} 1/k$ divergent is, zie Lemma 1.22. De convergentie in Stelling 4.47 van de symmetrische Fourier-som impliceert dus in het algemeen niet dat de Fourier-reeks convergeert in de zin van Definitie 4.9.

$\oslash$

#### Het bewijs van Stelling 4.47

De eerste stap in het bewijs bestaat uit het herschrijven van de *symmetrische partiële Fourier-som* $s(f)_l$ in termen van een convolutie met een speciale functie.

**Lemma 4.49** *Voor iedere $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $l \in \mathbb{N}$ geldt dat*

$$s(f)_l = D_l * f,$$

*met $D_l \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd door*

$$D_l(x) = \sum_{k=-l}^{l} e^{ikx}.$$

**Bewijs** Het is gemakkelijk in te zien dat Lemma 4.25 doorgaat voor een functie $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Uit $D_l = \sum_{|k|\le l} \varepsilon_k$ volgt nu dat

$$D_l * f = \sum_{|k|\le l} \varepsilon_k * f = \sum_{|k|\le l} \mathcal{F}(f)_k\, \varepsilon_k = s(f)_l.$$

□

De functie $D_l$ wordt ook wel de *Dirichlet-kern* genoemd. Uit zijn definitie volgt direct dat $D_l \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat de nulde Fourier-coëfficiënt van $D_l$ gelijk is aan 1. Dus

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_l(x)\, dx = 1, \qquad (l \in \mathbb{N}). \tag{4.41}$$

**Lemma 4.50** *Voor elke $l \in \mathbb{N}$ geldt*

$$D_l(x) = \frac{\sin((l+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}. \tag{4.42}$$

**Bewijs** Zij $l \in \mathbb{N}$, en zij $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} D_l(x) &= \sum_{k=-l}^{l} e^{ikx} = e^{-ilx} \sum_{k=-l}^{l} e^{i(k+l)x} \\ &= e^{-ilx} \sum_{k=0}^{2l} (e^{ix})^k = e^{-ilx} \cdot \frac{1 - e^{i(2l+1)x}}{1 - e^{-ix}} \\ &= \frac{e^{-i(l+\frac{1}{2})x} - e^{i(l+\frac{1}{2})x}}{e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{\frac{1}{2}ix}}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de bovenstaande formule. □

Het meest cruciale ingredient van het bewijs van Stelling 4.47 is het lemma, genoemd naar de Duitse wiskundige B. Riemann en de Franse wiskundige H. Lebesgue.

**Lemma 4.51 (Riemann–Lebesgue)** *Zij $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stuksgewijs continu. Dan geldt*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_a^b f(x)\, e^{i\xi x}\, dx = 0.$$

**Bewijs** We veronderstellen eerst dat $f$ een $C^1$ functie is. Dan volgt door partiële integratie dat, voor $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\, dx &= \frac{1}{i\xi}\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}e^{i\xi x}\, d\xi \\ &= -\frac{1}{i\xi}\int_a^b f'(x)e^{i\xi x}\, d\xi + \frac{1}{i\xi}\, f(x)e^{i\xi x}\Big|_a^b.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\, dx\right| \leq \frac{1}{|\xi|}(\|f'\|_{[a,b]} + 2\|f\|_{[a,b]}).$$

Het rechterlid heeft limiet nul voor $|\xi| \to \infty$. Het resultaat volgt nu door toepassing van de insluitstelling.

We veronderstellen nu dat $f$ continu is. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er wegens Gevolg 4.37 een $g \in C^1([a, b])$ zo dat $\|f - g\|_{[a,b]} < \varepsilon/2(b - a)$. Hieruit volgt dat voor alle $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]e^{i\xi x}\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leq (b - a)\|f - g\|_{[a,b]} < \varepsilon/2.$$

Volgens het eerste deel van het bewijs is er een $R > 0$ zo dat voor alle $\xi$ met $|\xi| > R$ geldt dat

$$\left|\int_a^b g(x)e^{i\xi x}\, dx\right| < \varepsilon/2.$$

Nu volgt voor $|\xi| > R$ dat

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\, dx\right| \leq \left|\int_a^b g(x)e^{i\xi x}\, dx\right| + \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]e^{i\xi x}\, dx\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

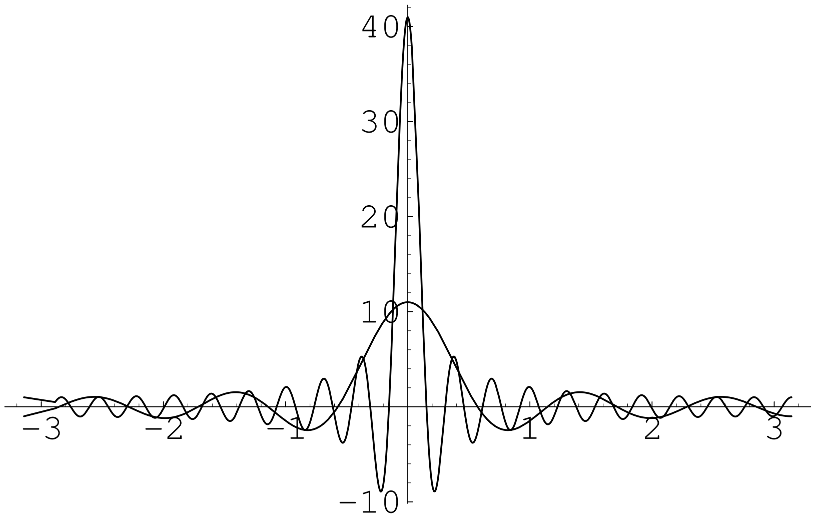
Tenslotte veronderstellen we nog algemener dat $f$ stuksgewijs continu is. Dan is er een verdeling $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ van het interval $[a, b]$ zo dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ een $f_j \in C([a_{j-1}, a_j])$ bestaat zo dat $f = f_j$ op $]a_{j-1}, a_j[$. Derhalve geldt:

$$\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\, dx = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} f_j(x)e^{i\xi x}\, dx \to 0$$

voor $|\xi| \to \infty$, wegens het tweede deel van het bewijs. $\square$

**Gevolg 4.52** *Laat $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, en zij $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stuksgewijs continu. Dan is*

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_a^b f(x)\, \sin(\xi x)\, dx = 0.$$




De functies $v \mapsto D_5(v)$ en $v \mapsto D_{20}(v)$.

**Bewijs** Dit volgt uit het bovenstaande lemma, omdat $\sin(\xi x) = \frac{1}{2i}(e^{i\xi x} - e^{-i\xi x})$. $\square$

Het Riemann-Lebesgue lemma heeft het volgende belangrijke gevolg voor integreren tegen de Dirichlet-kern.

**Gevolg 4.53** *Laat $g \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $0 < \delta < \pi$. Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} g(y) D_l(y)\ dy = 0.$$

**Bewijs** Zij $G(y) = g(y)/\sin(y/2)$, dan is $G$ een stuksgewijze $C^1$ functie op zowel het interval $[-\pi, -\delta]$ als $[\delta, \pi]$. Nu is

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} g(y) D_l(y)\ dy = \int_{-\pi}^{-\delta} G(y) \sin((l + \frac{1}{2})y)\ dy + \int_{\delta}^{\pi} G(y) \sin((l + \frac{1}{2})y\ dy$$

en het resultaat volgt door toepassing van Gevolg 4.52. $\square$

**Gevolg 4.54** *Zij $0 < \delta < 1$. Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^{\delta} D_l(y)\ dy = \lim_{l\to\infty} \int_{-\delta}^{0} D_l(y)\ dy = \pi.$$

**Bewijs** De functie $D_l$ is even, dus

$$\int_0^{\delta} D_l(y)\ dy = \int_{-\delta}^{0} D_l(y)\ dy = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(y)\ dy.$$

Daarom is het voldoende te bewijzen dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(y)\ dy = 1.$$

Dit volgt door combinatie van (4.41) en Gevolg 4.53 met $g$ de constante functie 1. $\square$

**Lemma 4.55** *Zij* $0 < \delta < \pi$ *en zij* $g \in C^1([0,\delta])$. *Dan is*

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^{\delta} g(y) D_l(y)\ dy = \pi g(0).$$

**Bewijs** Definieer de functie $\varphi : [0,\delta] \to \mathbb{C}$ door $\varphi(0) = g'(0)$ en door $g(y) - g(0) = y\varphi(y)$. Dan is $\varphi$ continu op $[0,\delta[$. Er geldt dat

$$\int_0^{\delta} g(y) D_l(y)\ dy = g(0) \int_0^{\delta} D_l(y)\ dy + \int_0^{\delta} y\varphi(y) D_l(y)\ dy.$$

De eerste integraal achter het gelijkteken heeft limiet $\pi g(0)$ voor $l \to \infty$, wegens Gevolg 4.54. De tweede integraal kunnen we herschrijven als

$$\int_0^{\delta} \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)}\ \varphi(y)\ \sin((l+\frac{1}{2})y)\ dy.$$

Omdat $y \mapsto y(\sin(\frac{1}{2}y))^{-1}$ uitbreidt tot een continue functie op $[0,\delta]$ convergeert de laatste integraal naar nul voor $l \to \infty$, wegens Gevolg 4.52. Het resultaat volgt. $\square$

**Bewijs van Stelling 4.47** We schrijven $g(y) = f(x+y)$ en merken op dat $g \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat $s(g)_l(0) = D_l * g(0) = D_l * f(x)$. Verder is $f(x+) = g(0+)$ en $f(x-) = g(0-)$. Het is dus voldoende te bewijzen dat

$$\lim_{l\to\infty} s(g)_l(0) = \frac{g(0-) + g(0+)}{2}.$$

Door verschuiving is hiermee het bewijs van de stelling gereduceerd tot het geval dat $x = 0$. We veronderstellen daarom dat $x = 0$.

Kies $0 < \delta < \pi$ zo dat $f$ zowel op $]0,\delta]$ als op $[-\delta, 0[$ een $C^1$ functie is. We definiëren de functie $f_+ : [0,\delta] \to \mathbb{C}$ door

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{voor} \quad x \in\ ]\,0,\delta], \\ f(0+) & \text{voor} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dan is $f_+$ een $C^1$ functie op $[0,\delta]$. Op soortgelijke wijze breiden we de functie $f|_{[-\delta,0[}$ uit tot een $C^1$ functie $f_-$ op $[-\delta, 0]$, met $f_-(0) = f(0-)$.

Er geldt dat

$$\int_0^{\delta} f(-y) D_l(y)\ dy = \int_0^{\delta} f_-(-y) D_l(y)\ dy.$$

Door toepassing van Lemma 4.55 op de tweede integraal leiden we af dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} f(-y) D_l(y)\ dy = \frac{1}{2} f_-(0). \tag{4.43}$$

Op soortgelijke manier concluderen we dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{0} f(-y)D_l(y)\, dy = \frac{1}{2} f_+(0). \tag{4.44}$$

Uit Gevolg 4.53 leiden we af dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} f(-y)D_l(y)\, dy = 0. \tag{4.45}$$

Uit (4.43), (4.44) en (4.45) volgt met de optelregel voor limieten dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-y)D_l(y)\, dy = \frac{f_-(0) + f_+(0)}{2}.$$

Dit is de gewenste identiteit. □

**Voorbeeld 4.56** Door partiële integratie zien we dat voor $R > 1$ geldt

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_1^R \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\cos x\, dx = \cos 1 - \frac{1}{R}\cos R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

Hieruit blijkt door toepassing van het majorantiekenmerk op de laatste integraal dat de limiet van de eerste integraal voor $R \to \infty$ bestaat. Omdat $x \mapsto x^{-1}\sin x$ voortzetbaar is tot een continue functie op $[0, \infty[$, met waarde 1 in $x = 0$, volgt dat

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

bestaat. We kunnen deze limiet berekenen door toepassing van Gevolg 4.54. Hiertoe merken we op dat

$$\begin{aligned} \int_0^{l+\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_0^1 \frac{\sin((l+\frac{1}{2})x)}{x}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{x}\, D_l(x)\, dx. \end{aligned}$$

De functie $x \mapsto x^{-1}\sin(\frac{1}{2}x)$ is voortzetbaar tot een continue functie $\varphi : [0, \infty[ \to \mathbb{C}$, met waarde $\varphi(0) = \frac{1}{2}$. Met Gevolg 4.54 concluderen we dat

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{l\to\infty} \int_0^{l+\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \varphi(0)\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Dit is de bekende waarde die ons op een andere manier al bekend was uit een van de opgaven. ⊘

## 4.6 Uniforme convergentie en het verschijnsel van Gibbs

We zullen in deze paragraaf laten zien dat de convergentie in Stelling 4.47 uniform is op ieder gesloten en begrensd interval $I \subset \mathbb{R}$ dat geen discontinuïteit van de functie $f$ bevat. Is omgekeerd de convergentie uniform op een dergelijk interval $I$, dan is de beperking $f|_I$ een continue functie wegens Stelling 1.15. In het bijzonder is de convergentie dus zeker niet uniform in een omgeving van een punt $a$ waarin $f$ niet-continu is. Aan het eind van de paragraaf zullen we het gedrag van de benaderende functie $s_l(f)(x)$ beschrijven, dat bekend staat als het *verschijnsel van Gibbs.*

Allereerst is hier het resultaat over de convergentie in punten van continuïteit.

**Stelling 4.57** *Zij $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, en zij $[a,b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval waarop $f$ continu is. Dan geldt $s(f)_l = D_l * f \to f$ uniform op $[a,b]$, voor $l \to \infty$.*

**Opmerking 4.58** In het geval dat $f$ continu is op $\mathbb{R}$, leiden we uit het bovenstaande af dat de $s_l(f)$ van symmetrische partiële Fourier-sommen op $\mathbb{R}$ uniform naar $f$ convergeert. Dit is een zwakkere conclusie dan de conclusie van Stelling 4.42, namelijk dat de Fourier-reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)_k \varepsilon_k$ absoluut uniform convergeert met som $f$. $\oslash$

Het bewijs van Stelling 4.57 volgt de lijn van het bewijs van Stelling 4.47, met dien verstande dat er extra schattingen nodig zijn die de uniformiteit van de convergentie garanderen. In die schattingen speelt de volgende norm op $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ een belangrijke rol.

Voor $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ noteren we met $\mathrm{sing}(f)$ de verzameling van punten $x \in \mathbb{R}$ zo dat $f$ niet $C^1$ is in een omgeving van $x$. We merken op dat $\mathrm{sing}(f)$ niet verandert door translatie over $2\pi$ en dat $[-\pi,\pi] \cap \mathrm{sing}(f)$ eindig is. Voorts definiëren we

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad \|f'\| = \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathrm{sing}(f)} |f'(x)|, \quad \|f\|_{\mathrm{st}} := \max(\|f\|, \|f'\|).$$

Dan is het gemakkelijk in te zien dat $\|\cdot\|_{\mathrm{st}}$ een norm op $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definieert. In het vervolg noteren we met $\mathrm{dc}(f)$ de verzameling van punten waar een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ niet continu is.

Het volgende lemma dient ter voorbereiding op de eerste schatting die we nodig zullen hebben.

**Lemma 4.59** *Zij $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ continu op $[-\delta,\delta]$, waarin $\delta > 0$. Dan geldt*

$$|f(t)| \le |f(0)| + \|f\|_{\mathrm{st}}|t| \qquad (t \in [-\delta,\delta]). \tag{4.46}$$

**Bewijs** We bewijzen de schatting voor $t \in [0,\delta]$. De schatting voor $t \in [-\delta,0]$ volgt dan door de bewezen schatting toe te passen op de functie $t \mapsto f(-t)$.

We beschouwen de verzameling $W$ van punten $t_0 \in [0,\delta]$ zo dat de schatting (4.46) geldig is voor $t \in [0,t_0]$. Er geldt dat $0 \in W$, terwijl $W$ naar boven begrensd is door $\delta$. Hieruit volgt dat $W$ een kleinste bovengrens $s = \sup W \le \delta$ heeft. Stel dat $s < \delta$. Dan geldt de schatting op $[0,s[$. Omdat $f$ continu is op $W$ zien we gemakkelijk in dat de schatting (4.46) ook in $s$ geldt, dus $s \in W$.

Omdat $f$ continu en stuksgewijs $C^1$ is op $[-\delta,\delta]$ bestaat er een $s_1$ met $s < s_1 < \delta$ zo dat $f_\circ := f|_{[s,s_1]}$ van klasse $C^1$ is. Voor $t \in [s,s_1]$ geldt daarom dat

$$|f(t) - f(s)| = \left| \int_s^t (f_\circ)'(\tau)\, d\tau \right| \le (t-s)\|f\|_{\mathrm{st}},$$

dus

$$|f(t)| \leq |f(s)| + (t-s)\|f\|_{\text{st}} \leq |f(0)| + s\|f\|_{\text{st}} + (t-s)\|f\|_{\text{st}} = |f(0)| + t\|f\|_{\text{st}}.$$

De schatting geldt dus voor alle $t \in [s, s_1]$, en we zien dat $s_1 \in W$. Dit is in tegenspraak met $s = \sup W$.

We concluderen dat $s = \delta$. Derhalve is $W = [0, \delta]$. De schatting geldt derhalve voor $t \in [0, \delta]$. $\square$

De genoemde eerste schatting wordt gegeven in het volgende lemma.

**Lemma 4.60** *Er is een $C_0 > 0$ zo dat voor alle $0 < \delta < \pi$ en alle $\varphi \in C^{\text{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $\varphi$ continu op $[-\delta, \delta]$ en $\varphi(0) = 0$ geldt:*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(t)\varphi(t)\, dt \right| \leq \delta\, C_0\, \|\varphi\|_{\text{st}} \qquad (\forall l \in \mathbb{N}).$$

**Bewijs** Uit het voorgaande lemma volgt dat

$$|\varphi(t)| \leq \|\varphi\|_{\text{st}}|t|, \qquad (|t| \leq \delta).$$

Uit de definitie in Lemma 4.49 volgt dat de functie $t \mapsto tD_l(t)$ continu is op $[-\pi, \pi]$ en uit formule (4.42) volgt dat hij voldoet aan de schatting

$$|tD_l(t)| \leq C, \qquad (t \in [-\pi, \pi]),$$

met $C > 0$ een constante onafhankelijk van $l$. Combineren we de verkregen schattingen, dan zien we dat $|D_l(t)\varphi(t)| \leq C\|\varphi\|_{\text{st}}$, voor $|t| \leq \delta$. Hieruit volgt weer

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(t)\varphi(t)\, dt \right| \leq \frac{\delta C}{\pi} \|\varphi\|_{\text{st}}.$$

De gewenste schatting volgt dus met $C_0 = C/\pi$. $\square$

Ter voorbereiding van een tweede schatting die we nodig zullen hebben dient het volgende lemma.

**Lemma 4.61** *Zij $[a, b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval, en zij $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stuksgewijs $C^1$ en continu. Dan geldt voor iedere $C^1$ functie $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ dat*

$$\int_a^b \psi(x)\theta'(x)\, dx = \psi\theta\big|_a^b - \int_a^b \psi'(x)\theta(x)\, dx.$$

**Bewijs** Er bestaat een verdeling $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ van het interval $[a, b]$ zo dat voor iedere $1 \leq j \leq k$ de functie $\psi|_{]a_{j-1}, a_j[}$ uitgebreid kan worden tot een $C^1$ functie $\psi_j : [a_{j-1}, a_j] \to \mathbb{R}$. Met partiële integratie volgt, voor $1 \leq j \leq k$, dat

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \psi(x)\theta'(x)\, dx = \psi_j\theta\big|_{a_{j-1}}^{a_j} - \int_{a_{j-1}}^{a_j} \psi_j'(x)\theta(x)\, dx.$$

Uit de continuïteit van $\psi$ en $\psi_j$ op $[a_{j-1}, a_j]$ volgt dat $\psi = \psi_j$ op $[a_{j-1}, a_j]$. Daarom blijft het rechterlid van de bovenstaande identiteit gelijk als we overal $\psi_j$ door $\psi$ vervangen. Sommeren we vervolgens de ontstane identiteiten voor $1 \leq j \leq k$, dan vinden we de in het lemma gegeven identiteit. $\square$

De tweede schatting die we in het bovenstaande op het oog hadden is de volgende.

**Lemma 4.62** *Zij $\delta > 0$. Dan is er een $C_1 > 0$ zo dat voor elk interval $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ dat lege doorsnede heeft met $]-\delta, \delta[$ en elke $\varphi \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die continu is op $[a, b]$ geldt:*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_a^b D_l(t)\varphi(t)\, dt \right| \leq \frac{C_1}{l+1} \|\varphi\|_{\mathrm{st}} \qquad (\forall l \in \mathbb{N}).$$

**Bewijs** Met het vorige lemma, toegepast op de functies $\psi : t \mapsto \sin(t/2)^{-1}\varphi(t)$ en $\theta : t \mapsto -(l + \frac{1}{2})^{-1} \cos([l + \frac{1}{2}]t)$, vinden we dat

$$\begin{aligned} \int_a^b D_l(t)\varphi(t)\, dt &= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{\sin(t/2)} \sin([l + \tfrac{1}{2}]t)\, dt \\ &= (l + \tfrac{1}{2})^{-1} \left[ \frac{-\varphi(t)}{\sin(t/2)} \cos([l + \tfrac{1}{2}]t) \Big|_a^b + \int_a^b \psi'(t) \cos([l + \tfrac{1}{2}]t)\, dt \right] \end{aligned} \tag{4.47}$$

met

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)\sin(t/2) - \frac{1}{2}\varphi(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)^2}.$$

Er is een $C > 0$ zo dat $|\sin(t/2)|^{-1} \leq C$ voor alle $t$ met $\delta \leq |t| \leq \pi$. Uit de uitdrukking voor $\psi'(t)$ volgt voor $t \in [a, b]$ de schatting

$$|\psi'(t)| \leq C^2 \left( \sup_{[a,b]} |\varphi| + \sup_{[a,b]} |\varphi'| \right) \leq 2C^2 \|\varphi\|_{\mathrm{st}}.$$

Ook geldt voor $t \in [a, b]$ de schatting

$$\left| \frac{\varphi(t)}{\sin(t/2)} \right| \leq C \|\varphi\|_{\mathrm{st}}.$$

Door toepassing van de driehoeksongelijkheid op de integralen en de som in (4.47) vinden we nu

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b D_l(t)\varphi(t)\, dt \right| &\leq (l + \tfrac{1}{2})^{-1} [2C\|\varphi\|_{\mathrm{st}} + 2|b - a| C^2 \|\varphi\|_{\mathrm{st}}] \\ &\leq \frac{4}{2l+1} \left[ C + \pi C^2 \right] \|\varphi\|_{\mathrm{st}}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de gewenste schatting met $C_1 = 2C/\pi + 2C^2$. □

We zijn nu gereed voor het bewijs van Stelling 4.57.

**Bewijs van Stelling 4.57** Laat $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, en veronderstel dat $f$ continu is in alle punten van een gesloten en begrensd interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Omdat de verzameling $\mathrm{dc}(f)$ slechts eindig veel punten in $[a - 1, b + 1]$ bevat, is er een $\delta_0 > 0$ zo dat $f$ continu is in alle punten van $[a - \delta_0, b + \delta_0]$. In het vervolg veronderstellen we $0 < \delta \leq \delta_0$. Zij $x \in [a, b]$. We schrijven

$$s_l(f)(x) - f(x) = D_l * f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_l(t)\varphi_x(t)\, dt, \tag{4.48}$$

waarbij de functie $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd is door

$$\varphi_x(t) = f(x - t) - f(x).$$

Het is gemakkelijk in te zien dat $\varphi_x \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat $\|\varphi_x\|_{\mathrm{st}} \leq 2\|f\|_{\mathrm{st}}$. Bovendien is $\varphi_x$ continu op $[-\delta_0, \delta_0]$, terwijl $\varphi_x(0) = 0$.

Door de integraal over $[-\pi, \pi]$ in (4.48) te splitsen in integralen over $[-\delta, \delta]$, $[-\pi, -\delta]$ en $[\delta, \pi]$, vinden we door toepassing van Lemma's 4.60 en 4.62 op de functie $\varphi_x$ in plaats van $\varphi$ de schatting

$$|s_l(f)(x) - f(x)| \leq 2(\delta C_0 + \frac{2C_1}{l+1})\|f\|_{\mathrm{st}}.$$

Hierbij is de constante $C_0$ onafhankelijk van $x \in [a, b]$ en van $\delta$. De constante $C_1$ is onafhankelijk van $x \in [a, b]$, maar afhankelijk van $\delta$.

Zij nu $\epsilon > 0$. Dan kunnen we in het bovenstaande $\delta > 0$ voldoende klein kiezen zo dat bovendien voldaan is aan $\delta C_0 \|f\|_{\mathrm{st}} < \epsilon/6$. Vervolgens kiezen we een positief geheel getal $N$ met $2C_1\|f\|_{\mathrm{st}}/(N+1) < \varepsilon/6$. Dan geldt voor alle $l \geq N$ en alle $x \in [a, b]$ dat

$$|s_l(f)(x) - f(x)| \leq 2(\varepsilon/6 + \varepsilon/6) = 2\varepsilon/3.$$

We concluderen dat voor $l \geq N$ geldt dat

$$\sup_{x \in [a,b]} |s_l(f)(x) - f(x)| \leq 2\epsilon/3 < \epsilon.$$

Derhalve geldt $s_l(f) \to f$ uniform op $[a, b]$, voor $l \to \infty$. □

We besluiten deze paragraaf met de beschrijving van $s_l(f)(x) - f(x)$ voor $x$ in een omgeving van een punt $a \in \mathbb{R}$ waarin $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ discontinu is. Men kan laten zien dat in dit geval de functie $s_l(f)(x) - f(a+)$ voor $x \downarrow a$ na een geschikte van $l$ afhankelijke herschaling een vast limiet-patroon heeft voor $l \to \infty$. Dit limietpatroon wordt gegeven door de spronggrootte $f(a+) - f(a-)$ maal de functie

$$I : y \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin z}{z}\, dz - \frac{1}{2}.$$

Deze functie voldoet aan $I(0) = -1/2$, $I(y) \to 0$ voor $y \to \infty$. Hij heeft locale extrema in de punten $y_k = k\pi$, voor $k \in \mathbb{N}$, waarbij sprake is van een lokaal minimum voor $k$ even en een lokaal maximum voor $k$ oneven. Tussen twee opeenvolgende $y_k$ is de functie strikt monotoon en heeft hij precies één nulpunt. Dit oscillerende gedrag is goed zichtbaar in de onderstaande figuur. Tenslotte is het lokale maximum van $I$ in $\pi$ absoluut en gelijk aan

$$I(\pi) = 0.08949\ldots.$$

Dit beschreven verschijnsel is vernoemd naar de Amerikaanse fysicus J.W. Gibbs. De precieze formulering van het verschijnsel van Gibbs, die we zonder bewijs zullen geven, is als volgt.

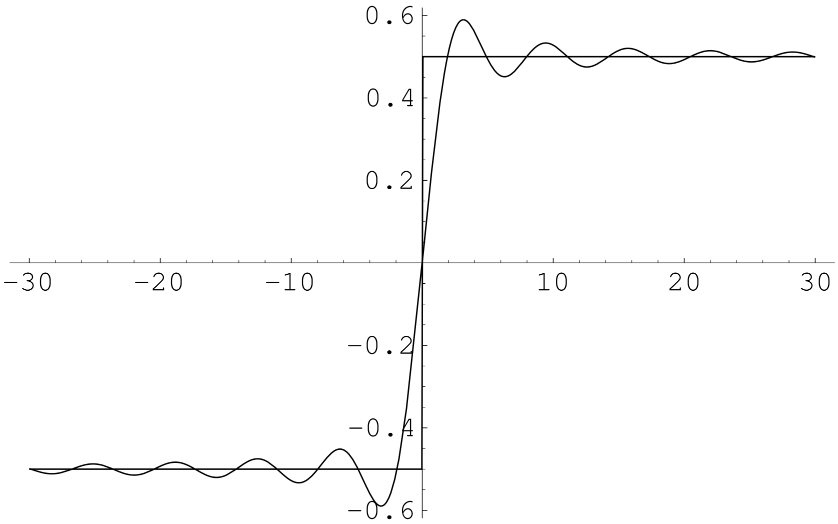
**Stelling 4.63** (Het verschijnsel van Gibbs) *Zij $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt voor iedere $a \in \mathbb{R}$ dat*

$$\lim_{l \to \infty} s(f)_l(a + \frac{y}{l + \frac{1}{2}}) = f(a+) + [f(a+) - f(a-)]I(y).$$

*uniform ten aanzien van $y \in [0, C]$, voor alle $C > 0$.*

**Opmerking 4.64** Door spiegeling ten aanzien van $a$ verkrijgt men een soortgelijk resultaat voor het gedrag van de functie $s(f)_l(x) - f(a-)$ voor $x \uparrow a$. Preciezer,

$$\lim_{l \to \infty} s(f)_l(a - \frac{y}{l + \frac{1}{2}}) = f(a-) - [f(a+) - f(a-)]I(y),$$




De functies $y \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z$ en $z \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{sgn} z$.

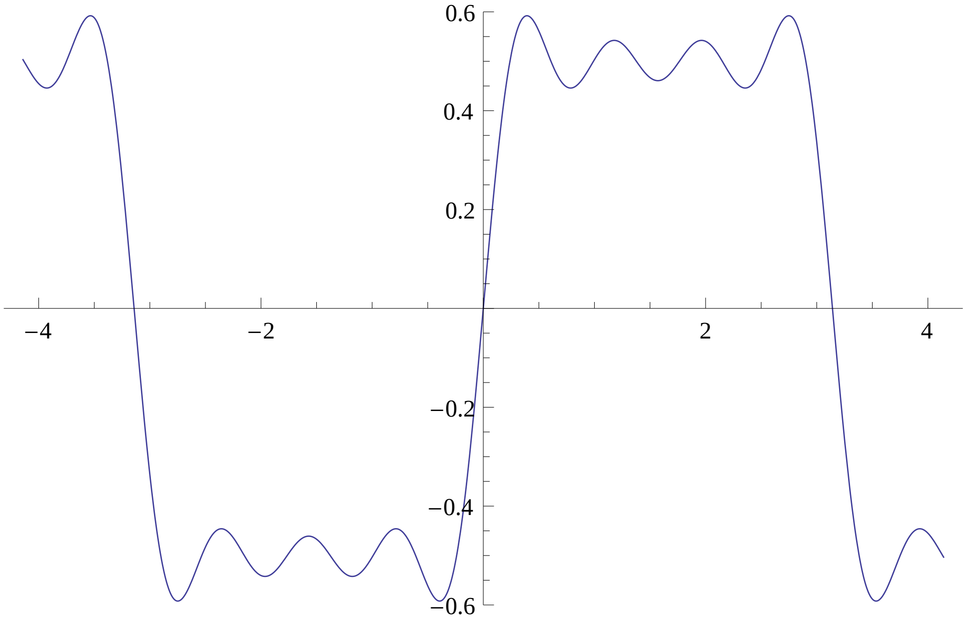
uniform ten aanzien van $y \in [0, C]$, voor iedere $C > 0$. $\oslash$

We zien hieraan dat $s_l(f)$ op ieder interval $[a, a + \delta[$ boven $f$ blijft uitschieten als $l \to \infty$ met een maximale uitwijking die $I(\pi)$ maal de spronggrootte $f(a+) - f(a-)$ bedraagt, dus ongeveer 9 procent van de spronggrootte.

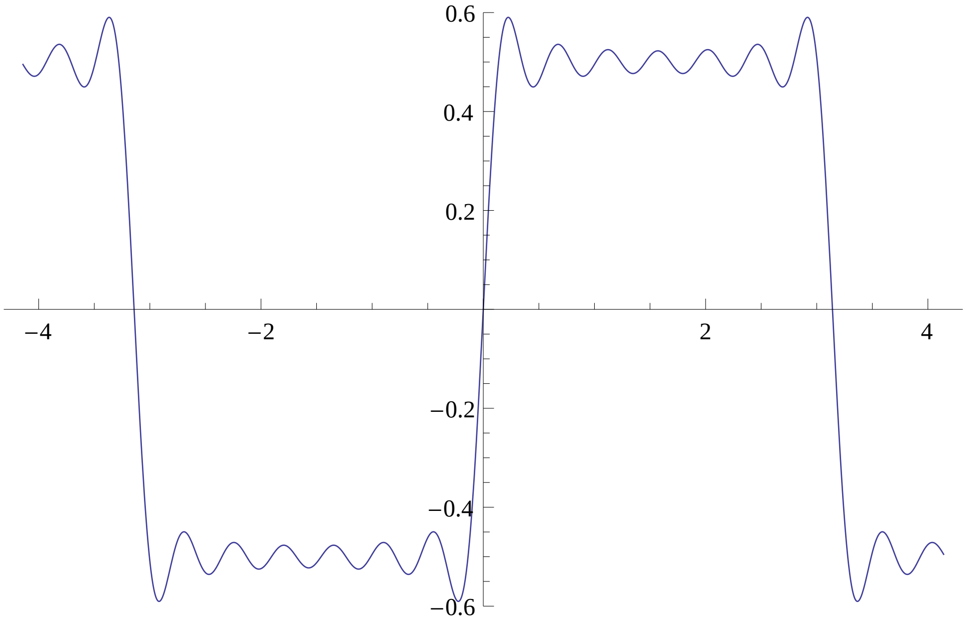
Het verschijnsel van Gibbs wordt treffend geïllustreerd door met Mathematica de som $s(f)_l$ te plotten voor $l = 3, 6, 10, 40$ met $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegeven door $f = -1/2$ op $]-\pi, 0[$, $f = 1/2$ op $]0, \pi[$ en $f(0) = f(\pi) = 0$. Het is gemakkelijk na te rekenen dat deze som gegeven wordt door

$$s(f)_l = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1},$$

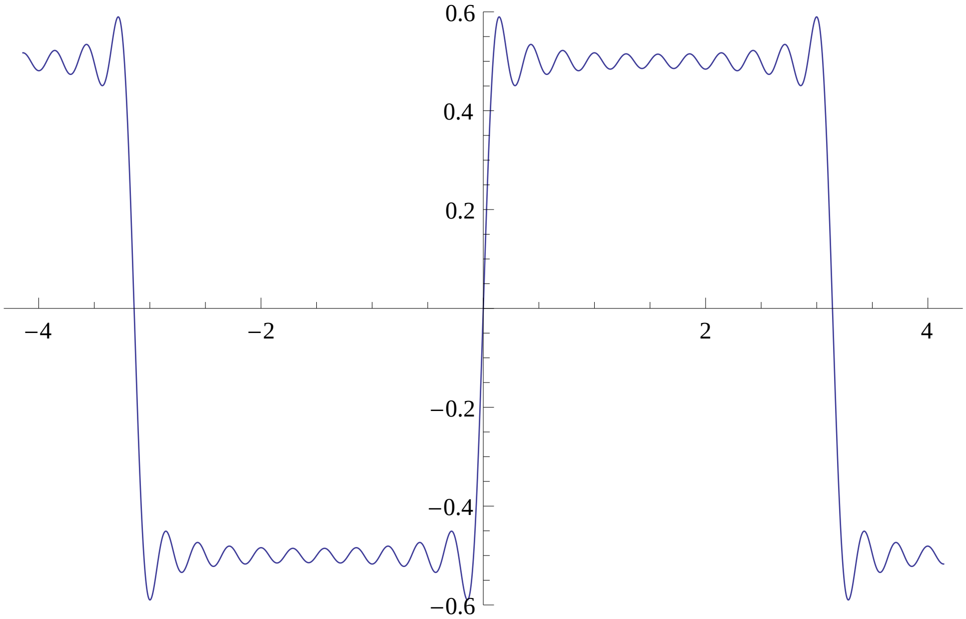
met $[(l-1)/2]$ het grootste gehele getal niet groter dan $(l-1)/2$. Zie de plaatjes op de volgende twee bladzijden.



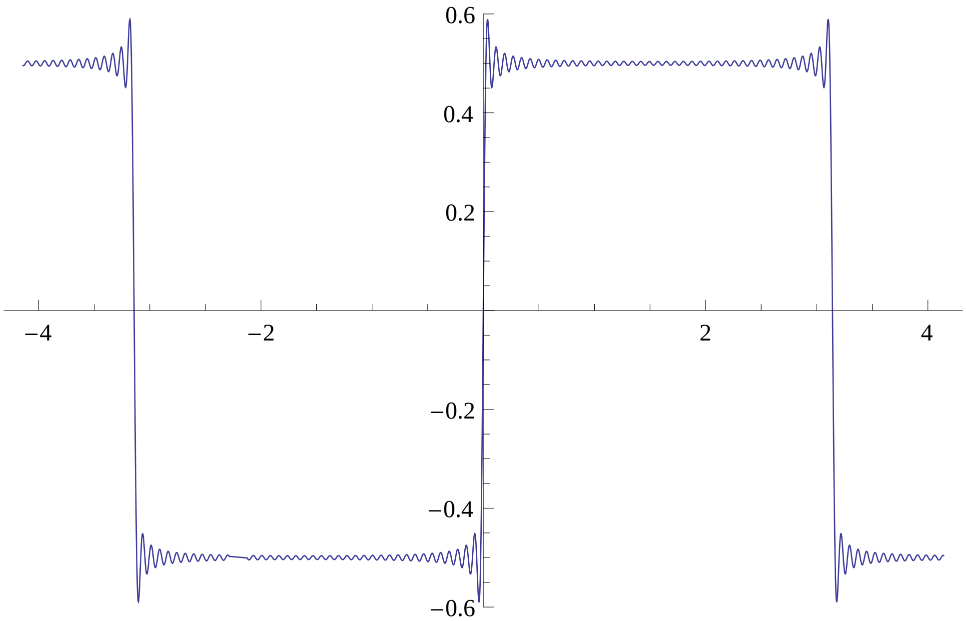

$$s(f)_3 = \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right]$$




$$s(f)_6 = \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right]$$




$$s(f)_{10} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{4}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$




$$s(f)_{40} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{19}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

# 5 De gelijkheid van Parseval, orthonormale stelsels

## 5.1 Orthonormale stelsels

Een belangrijke motivatie voor de huidige paragraaf is de volgende fraaie en belangrijke stelling, die bekend staat als de *gelijkheid van Parseval* voor Fourier-reeksen.

**Stelling 5.1 (De gelijkheid van Parseval)** *Zij $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dat wil zeggen, $f$ is een lokaal Riemann integreerbare functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die $2\pi$-periodiek is. Noteer $c_k = (\mathcal{F})_k$, voor $k \in \mathbb{Z}$. Dan geldt dat*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \tag{5.1}$$

**Voorbeeld 5.2** We beschouwen de $2\pi$-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $]-\pi, \pi]$ gedefinieerd wordt door $f(x) = x$. Er geldt dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

De Fourier-coëfficiënten $c_k$ van $f$ berekenen we als volgt. Het is evident dat $c_0 = 0$. Met partiële integratie vinden we voor $k \neq 0$ dat

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-ik} \left[ \, x \, e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} \, dx \right] \\ &= \frac{(-1)^k}{-ik}. \end{aligned}$$

Derhalve

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

De bovenstaande gelijkheid van Parseval leidt in dit geval dus tot de bekende identiteit

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

$\oslash$

In het vervolg zullen we vanuit een geschikt meetkundig gezichtspunt de identiteit (5.1) opvatten als een oneindig dimensionale versie van de stelling van Pythagoras.

Startpunt van onze beschouwing is een complexe lineaire ruimte $E$, met daarop een *Hermite's inproduct* $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$. Voor de definitie hiervan verwijzen we naar Definitie 4.1. Een dergelijk paar $(E, \langle \cdot \,, \cdot \rangle)$ heet een *pre-Hilbert-ruimte*. In het vervolg zullen wij de basistheorie ervan ontwikkelen.

**Voorbeeld 5.3** Wij zullen de genoemde basistheorie vooral gebruiken voor de specifieke ruimte $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van het Hermite'se inproduct

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx. \tag{5.2}$$

$\oslash$

De idee is dat we zo veel mogelijk theorie ontwikkelen voor een algemene pre-Hilbert-ruimte $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, die puur gebaseerd is op eigenschappen van het inproduct. Door deze abstractie krijgt de theorie een universele geldigheid die in tal van situtaties in de wiskunde van pas komt.

In termen van het Hermite's inproduct definiëren we de afbeelding $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ op $E$ door:

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te verifiëren: voor alle $f \in E$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt:

(a) $\|f\| \geq 0$ en $\|f\| = 0 \implies f = 0$;

(b) $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$.

Het is een algemeenheid dat het inproduct voldoet aan de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|, \qquad (f, g \in E). \tag{5.3}$$

Uit deze ongelijkheid volgt de volgende driehoeksongelijkheid, voor alle $f, g \in E$ :

(c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Vanwege de eigenschappen (a) - (c) is $\|\cdot\|$ een *norm* op de ruimte $E$. In termen van deze norm definiëren we de functie $d : E \times E \to \mathbb{R}$ door

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Het is een algemeenheid dat hierdoor een *metriek* of *afstand* op $E$ gedefinieerd wordt. Dit maakt $(E, d)$ tot een metrische ruimte. Dit betekent dat de in Inleiding Analyse ontwikkelde terminologie van open bollen, open en gesloten verzamelingen, limieten en continuïteit tot onze beschikking staan.

In het bijzonder heeft het begrip convergentie van een rij betekenis. Een rij $(f_k)_{k\geq 0}$ in $E$ convergeert naar $f \in E$ met betrekking tot de metriek $d$ als $\|f_k - f\| \to 0$ voor $k \to \infty$.

Een *Hilbert-ruimte* is een pre-Hilbert-ruimte $E$ waarvoor de metriek $d$ volledig is, dwz. iedere Cauchy-rij in $E$ is convergent naar een element van $E$. De theorie van deze Hilbert-ruimten is een belangrijk onderwerp uit de functionaalanalyse, waarop wij in het kader van deze cursus niet verder in zullen gaan.

**Opmerking 5.4** Ter volledigheid geven we voor een pre-Hilbert-ruimte $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ de bewijzen van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz en de driehoeksongelijkheid.

Voor de eerste merken we op: als $g = 0$ dan is (5.3) evident waar. Veronderstel daarom $g \neq 0$. Dan is $\langle g, g\rangle > 0$. Voor iedere $c \in \mathbb{C}$ geldt dat

$$0 \leq \langle f + c\,g,\, f + c\,g\rangle = \langle f,\, f\rangle + c\,\langle g,\, f\rangle + \overline{c}\,\langle f,\, g\rangle + |c|^2\,\langle g,\, g\rangle.$$

Substitueer in de bovenstaande ongelijkheid $c = -\langle f,\, g\rangle/\langle g,\, g\rangle$ dan volgt (5.3).

Toepassing van de (5.3) geeft nu

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f,\, g\rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f,\, g\rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\| + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2, \end{aligned}$$

waaruit de driehoeksongelijkheid volgt. $\oslash$

**Voorbeeld 5.5** We zullen de norm op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die hoort bij het inproduct (5.2) ook noteren met $\|\cdot\|_2$. Dus, voor $f \in C(\mathbb{R}/2\pi Z)$ geldt dat

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

$\oslash$

**Definitie 5.6 'Loodrecht'**

(a) Als $f, g \in E$ dan zeggen we dat $f$ *loodrecht* op $g$ staat, notatie $f \perp g$, indien $\langle f, g\rangle = 0$.

(b) Is $V \subset E$ een lineaire deelruimte, en $f \in E$, dan zeggen we dat $f$ loodrecht op $V$ staat, notatie $f \perp V$, indien $f \perp g$ voor alle $g \in V$.

(c) Zijn $V, W$ twee lineaire deelruimten van $E$, dan zeggen we dat $V$ en $W$ loodrecht op elkaar staan, notatie $V \perp W$, indien $f \perp g$ voor ale $f \in V$ en $g \in W$.

$\oslash$

Het volgende lemma staat bekend als de *stelling van Pythagoras* voor het Hermite'se inproduct.

**Lemma 5.7** *Als $f, g \in E$ en $f \perp g$, dan geldt*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

**Bewijs** $\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g\rangle = \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2.$ $\square$

**Definitie 5.8** Onder een *orthonormaal stelsel* in $E$ verstaan we een afbeelding $K \to E$, $k \mapsto \varepsilon_k$, met $K$ een index-verzameling, die voldoet aan de volgende eigenschappen:

(a) Voor alle $k, l \in K$ met $k \neq l$ geldt $\varepsilon_k \perp \varepsilon_l$.

(b) Voor alle $k \in K$ geldt $\|\varepsilon_k\| = 1$.

$\oslash$

**Voorbeeld 5.9** Laat $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voorzien zijn van het Hermite'se inproduct (5.2). Neem $K = \mathbb{Z}$, en definieer $\varepsilon_k : x \mapsto e^{ikx}$. Dan is $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ een orthonormaal stelsel van functies in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. $\oslash$

In het vervolg veronderstellen we steeds dat $k \mapsto \varepsilon_k, K \to E$ een orthonormaal stelsel in $E$ is.

**Gevolg 5.10** *Is $J \subset K$ een eindig deel, en $\{c_j \mid j \in J\}$ een collectie complexe getallen, dan is*

$$\|\sum_{j\in J} c_j \varepsilon_j\|^2 = \sum_{j\in J} |c_j|^2.$$

**Bewijs** Dit volgt door herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras. $\square$

Is $J \subset K$ eindig dan noteren we het lineaire opspansel van de vectoren $\{\varepsilon_j \mid j \in J\}$ met $E_J$. Als $f \in E$, dan schrijven we bovendien

$$f_J = \sum_{j\in J} \langle f, \varepsilon_j\rangle \varepsilon_j.$$

We merken op dat $f_J \in E_J$ en dat $f - f_J \perp E_J$. Om deze reden noemen we $f_J$ de orthogonale projectie van $f$ op $E_J$. We merken op dat uit de stelling van Pythagoras volgt dat

$$\|f\|^2 = \|f_J\|^2 + \|f - f_J\|^2. \tag{5.4}$$

**Lemma 5.11** *Zij $f \in E$. Dan neemt de functie $g \mapsto d(f,g) = \|f-g\|$, $E_J \to [0,\infty[$ zijn minimum aan in een uniek punt, namelijk $g = f_J$.*

**Bewijs** Veronderstel dat $g \in E_J$. Dan geldt dat $g - f_J \in E_J$, dus $f - f_J \perp g - f_J$. Hieruit volgt met behulp van de stelling van Pythagoras dat

$$\|f-g\|^2 = \|(f-f_J)\|^2 + \|g-f_J\|^2.$$

Als $g \neq f_J$, dan volgt hieruit dat $\|f-g\| > \|f-f_J\|$. □

Op grond van het bovenstaande lemma interpreteren we $\|f-f_J\|$ als de afstand van $f$ to $E_J$.

**Lemma 5.12** *Zij $f \in E$. Dan geldt voor iedere eindige deelverzameling $J \subset K$ dat*

$$\sum_{j\in J} |\langle f, \varepsilon_j\rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

**Bewijs** Uit (5.4) volgt dat

$$\|f\|^2 \geq \|f_J\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle f, \varepsilon_j\rangle|^2.$$

□

Op grond van het bovenstaande zouden we graag willen schrijven dat $\sum_{k\in K} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leq \|f\|^2$. Dit is niet zonder meer mogelijk, omdat $K$ een oneindige verzameling kan zijn. Vandaar eerste de volgende definitie.

**Definitie 5.13** Zij $(V, \|\cdot\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. Zij voorts $K$ een verzameling en $v : K \to V, k \mapsto v_k$ een functie. We zeggen dat functie $k \mapsto v_k$ *sommeerbaar* is in $V$, indien er een $s \in V$ bestaat met de volgende eigenschap.

Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat voor elk eindig deel $J \subset K$ met $J \supset J_0$ geldt:

$$\|s - \sum_{j\in J} v_j\| < \varepsilon.$$

⊘

**Lemma 5.14** *Veronderstel, met de notatie van de bovenstaande definitie, dat $k \mapsto v_k$ sommeerbaar is. Dan is er precies één $s \in V$ met de bovenstaande eigenschap.*

**Bewijs** Laat ook $t$ de bovenstaande eigenschap hebben. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een deel $J_0$ bij $s, \varepsilon$ als boven, en een deel $J_1$ bij $t, \varepsilon$ als boven. Neem $J = J_0 \cup J_1$, dan is $J$ eindig, en

$$\|s-t\| \leq \|s - \sum_{j\in J} v_j\| + \|\sum_{j\in J} v_j - t\| < 2\varepsilon.$$

Dit geldt voor elke $\varepsilon > 0$, dus $\|s-t\| = 0$, dus $s = t$. □

In het vervolg zullen we met

$$s = \sum_{k\in K} v_k$$

(in $V$) bedoelen dat de functie $k \mapsto v_k$ sommeerbaar is, terwijl $s \in V$ het unieke element is met de eigenschap van Definitie 5.13.

**Lemma 5.15** *Zij $K$ een verzameling, en $t : K \to \mathbb{R}$ een afbeelding met $t_k \geq 0$ voor alle $k \in K$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De functie $k \mapsto t_k$ is sommeerbaar.*

(b) *Er is een $M > 0$ zo dat voor alle eindige $J \subset K$ geldt $\sum_{j \in J} t_j \leq M$.*

*Als (a) en (b) gelden, dan geldt bovendien dat $\sum_{k \in K} t_k \leq M$.*

**Bewijs** Veronderstel eerst dat (a) geldt, en dat $t = \sum_{k \in K} t_k$. Dan is er een eindig deel $L_0 \subset K$ zo dat voor ieder eindig deel $L \subset K$ met $L \supset L_0$ geldt $|\sum_{l \in L} t_l - t| < 1$, dus ook $|\sum_{l \in L} t_l| \leq t + 1$. Zij

$$M = t + 1 + \sum_{l \in L_0} t_l$$

en laat $J \subset K$ een willekeurig eindig deel zijn. Dan geldt

$$\sum_{l \in J} t_j = |\sum_{l \in J \cup L_0} t_j - \sum_{l \in L_0 \setminus J} t_j| \leq \sum_{l \in J \cup L_0} t_j + \sum_{l \in L_0 \setminus J} t_j \leq M.$$

Dus (b) geldt.

Veronderstel omgekeerd dat $(b)$ geldt. Dan is de verzameling $S \subset [0, \infty[$ bestaande uit alle getallen $\sum_{j \in J} t_j$ met $J \subset K$ eindig naar boven begrensd door $M$. De verzameling $S$ heeft dus een supremum $t$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $t - \varepsilon$ geen bovengrens van $S$, dus er is een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat $\sum_{j \in J_0} t_j > t - \varepsilon$. Voor elke eindige deelverzameling $J \subset K$ met $J \supset J_0$ geldt nu:

$$t - \varepsilon \sum_{j \in J_0} t_j \leq \sum_{j \in J} t_j \leq t.$$

Hieruit volgt dat $\sum_{k \in K} t_k = t$ in de zin van Definitie 5.13.

Als (b) geldt, dan blijkt uit de bovenstaande redenering dat $t \leq M$, waaruit de laatste bewering volgt. $\square$

Na deze bespreking van het begrip sommeerbaarheid kunnen we het volgende resultaat afleiden, dat bekend staat als de ongelijkheid van Bessel. We veronderstellen dat $(\varepsilon_k)_{k \in K}$ een orthonormaal stelsel in $E$ is.

**Lemma 5.16 (De ongelijkheid van Bessel)** *Voor elke $f \in E$ geldt dat*

$$\sum_{k \in K} |\langle f, \varepsilon_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

**Bewijs** Uit Lemma 5.12 volgt dat $\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$ voor elk eindig deel $J \subset K$. De gewenste ongelijkheid volgt nu door toepassing van Lemma 5.15. $\square$

**Definitie 5.17** Het orthonormale stelsel $(\varepsilon_k)_{k \in K}$ in $E$ heet *volledig* indien het lineaire opspansel $E_K$ dicht ligt in $E$. $\oslash$

We brengen in herinnering dat het dichtliggen van $E_K$ in $E$ betekent dat de afsluiting van $E_K$ ten aanzien van $\| \cdot \|$ gelijk is aan $E$. Dit betekent precies dat ieder punt van $E$ limietpunt van $E_K$ is. Ofwel, voor iedere $f \in E$ en iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $g \in E_K$ zo dat

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

We merken op dat er een eindig deel $J \subset K$ en een afbeelding $c : J \to \mathbb{C}$ bestaan zo dat $g = \sum_{j \in J} c_j \varepsilon_j$. De bovenstaande schatting kan dus ook geformuleerd worden als

$$\|f - \sum_{j \in J} c_j \varepsilon_j\| < \varepsilon,$$

voor een eindige deelverzameling $J \subset K$ en een $c \in \mathbb{C}^J$.

**Stelling 5.18** *De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:*

(a) *Het orthonormale stelsel $(\varepsilon_k)_{k \in K}$ is volledig.*

(b) *Voor iedere $f \in E$ geldt*

$$f = \sum_{k \in K} \langle f, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k,$$

*in $E$ ten aanzien van de norm $\| \cdot \|$.*

(c) *Voor iedere $f \in E$ geldt*

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in K} |\langle f, \varepsilon_k \rangle|^2.$$

**Bewijs** We zullem de implicaties '(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a)' bewijzen.

Veronderstel eerst dat (a) geldt. Zij $f \in E$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $g$ in het lineaire opspansel $E_K$ van de $\varepsilon_k$ zo dat $\|f - g\| < \varepsilon$. Er is een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat $g \in E_{J_0}$. Zij nu $J \subset K$ eindig, met $J \supset J_0$. Schrijf $f_J = \sum_{j \in J} \langle f, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j$. Dan is $f - f_J \perp g$ en $f - f_J \perp f_J$, dus $f - f_J \perp f_J - g$. Hieruit volgt dat

$$\|f - g\|^2 = \|(f - f_J) + (f_J - g)\|^2 = \|f - f_J\|^2 + \|f_J - g\|^2 \geq \|f - f_J\|^2.$$

We concluderen dat

$$\|f - f_J\| \leq \|f - g\| < \varepsilon.$$

Hiermee is aangetoond dat (b) geldt.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een eindig deel $J \subset K$ zo dat $\|f - f_J\|^2 < \varepsilon$. Hieruit volgt dat

$$\|f_J\|^2 = \|f\|^2 - \|f - f_J^2\| > \|f\|^2 - \varepsilon.$$

Dit impliceert dat

$$\|f\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varepsilon_j \rangle|^2 \leq \sum_{k \in K} |\langle f, \varepsilon_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

We concluderen dat (c) geldt.

Veronderstel tenslotte dat (c) geldt, en dat $f \in E$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een eindig deel $J \subset K$ zo dat

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \varepsilon_j \rangle|^2 \geq \|f\|^2 - \varepsilon^2,$$

dus $\|f_J\|^2 > \|f\|^2 - \varepsilon^2$. We concluderen dat

$$\|f_J - f\|^2 = \|f\|^2 - \|f_J\|^2 < \varepsilon^2,$$

dus $\|f_J - f\| < \varepsilon$. Aangezien $f_J \in E_J \subset E_K$ is hiermee aangetoond dat $f$ tot de afsluiting van $E_K$ behoort. Aangezien dit voor willekeurige $f \in E$ geldt, concluderen we (a). $\square$

Deze in algemeenheid ontwikkelde theorie gaan we toepassen op $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van het Hermite'se inproduct (5.2). We nemen $K = \mathbb{Z}$ en voor $k \in \mathbb{Z}$ definiëren we de functie $\varepsilon_k \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ door $\varepsilon_k(x) = e^{ikx}$. We hebben reeds gezien dat het stelsel $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ orthonormaal is. Merk op dat voor elke $f \in E$ geldt dat

$$\langle f, \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = (\mathcal{F}f)_k.$$

In het volgende lemma worden supnorm en kwadraat integraalnorm op $E$ vergeleken.

**Lemma 5.19** *Voor alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geldt $\|f\|_2 \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$.*

**Bewijs** Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan is

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\mathbb{R}}^2\, dx = \|f\|_{\mathbb{R}}^2.$$

$\square$

**Lemma 5.20** *Het orthonormale stelsel $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ is volledig in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ten aanzien van $\|\cdot\|_2$.*

**Bewijs** We passen de ontwikkelde theorie toe op $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voorzien van de norm $\|\cdot\|_2$ en merken op dat $E_{\mathbb{Z}}$ precies gelijk is aan de ruimte $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ van Fourier-polynomen.

Veronderstel nu dat $f \in E$ en laat $\varepsilon > 0$. Volgens Gevolg 4.31 een Fourier-polynoom $p$ zo dat $\|f - p\|_{\mathbb{R}} < \varepsilon$. Wegens Lemma 5.19 volgt hieruit dat $\|f - p\|_2 < \varepsilon$. Er bestaat dus een $p \in E_{\mathbb{Z}}$ zo dat $\|f - p\| < \varepsilon$. We concluderen dat $E_{\mathbb{Z}}$ dicht ligt in $E$. $\square$

Door toepassing van Stelling 5.18 concluderen we nu dat het volgende geldt.

**Stelling 5.21 (Identiteit van Parseval)** *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan is*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)_k\, \epsilon_k$$

*met convergentie ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_2$.*

*Bovendien geldt de volgende identiteit van Parseval:*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\mathcal{F}f)_k|^2.$$

We hebben hiermee niet alleen de gelijkheid van Parseval bewezen voor een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ maar ook dat een dergelijke $f$ gegeven wordt door zijn Fourier-reeks als we dit interpreteren met convergentie ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_2$. In Opmerking 4.18 vermeldden we reeds dat dit zeker niet algemeen geldt voor puntsgewijze of uniforme convergentie. Blijkbaar is convergentie ten aanzien van de kwadraat integraal norm $\|\cdot\|_2$ natuurlijker in de context van Fourier-reeksen.

## 5.2 Uitbreiding naar lokaal Riemann-integreerbare functies

In het vervolg zullen we door limietovergang laten zien dat Stelling 5.21 algemener waar is voor iedere lokaal Riemann-integreerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek is met periode $2\pi$. De ruimte van deze functies noteren we als voorheen met $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Ter voorbereiding maken we een aantal opmerkingen. Allereerst laat het Hermite'se inproduct op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zich met dezelfde integraalformule voortzetten tot een Hermite'se bilineaire vorm op $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die positief semidefiniet is. Hiermee bedoelen we dat $\langle f, f\rangle \geq 0$, maar het is mogelijk dat $\langle f, f\rangle = 0$ terwijl $f \neq 0$. Een voorbeeld van een functie met de laatste eigenschap is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(2k\pi) = 1$, voor alle $k \in \mathbb{Z}$, terwijl $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

We zetten de norm $\|\cdot\|_2$ voort tot een afbeelding $\|\cdot\|_2 : \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to [0, \infty[$ die de bekende eigenschappen van een norm heeft, met uitzondering van de eigenschap $\|f\|_2 = 0 \implies f = 0$. Een dergelijke afbeelding heet ook wel een *seminorm* op $\mathcal{R}$. Tenslotte merken we op dat voor $f, g \in \mathcal{R}$ met $f \perp g$ geldt dat $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Het volgende lemma dient ook ter voorbereiding.

**Lemma 5.22** *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ een Riemann-integreerbare functie. Dan is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een continue functie $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ met $\|g\|_{[a,b]} \leq \|f\|_{[a,b]}$ en zo dat*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

**Bewijs** Voor $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ een Riemann-integreerbare functie schrijven we

$$\|\varphi\|_1 := \int_a^b |\varphi(x)|\, dx.$$

We merken op dat $\|\cdot\|_1$ voldoet aan de driehoeksongelijkheid.

We behandelen eerst het speciale geval waarin $f$ gelijk is aan de karakteristieke functie $1_{[c,d]}$ van een deelinterval $[c, d] \subset [a, b]$. Dus, $f(x) = 1$ voor $x \in [c, d]$, en $f(x) = 0$ voor $x \in [a, b] \setminus [c, d]$. Zij $\varepsilon > 0$. We definiëren de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g = 1$ op $[c, d]$, door $g = 0$ buiten $[c - \varepsilon/2, d + \varepsilon/2]$ en door

$$g(x) = \begin{cases} 2(x - c + \varepsilon/2)/\varepsilon & \text{als} \quad c - \varepsilon/2 \leq x < c, \\ 2(d + \varepsilon/2 - x)/\varepsilon & \text{als} \quad d < x \leq d + \varepsilon/2. \end{cases}$$

Dan is $g$ continu, en er geldt dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{[a,b]}$. Verder geldt:

$$\|f - g\|_1 \leq \int_{c-\varepsilon/2}^{c} 2(x - c + \varepsilon/2)/\varepsilon\, dx + \int_d^{d+\varepsilon/2} 2(x + \varepsilon/2 - x)/\varepsilon\, dx = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

De stelling is dus waar voor $f = 1_{[c,d]}$. Zij nu $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ een willekeurige Riemann-integreerbare functie, en zij $M = \|f\|_{[a,b]}$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een verdeling $V = \{x_0 < \ldots < x_n\}$ van het interval $[a, b]$ zo dat

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}_{I(j)}\, f \cdot (x_j - x_{j-1}) < \varepsilon/2.$$

Hierin staat $\mathrm{var}_{I(j)}\, f$ voor de variatie van $f$ over het $j$-de deelinterval $I(j) = [x_{j-1}, x_j]$ :

$$\mathrm{var}_{I(j)}\, f = \sup_{x,y \in I(j)} |f(x) - f(y)|.$$

Kies $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, dan is $|f(x) - f(\xi_j)| \leq \mathrm{var}_{I(j)}\, f$ voor alle $x \in I(j)$, dus

$$\int_a^b |f(x) - f(\xi_j)| 1_{I(j)}(x)\, dx \leq \mathrm{var}_{I(j)}(x_j - x_{j-1}).$$

Zij $s = \sum_j f(\xi_j) 1_{I(j)}$, dan is $s$ Riemann-integreerbaar, en

$$\|f - s\|_1 \leq \sum_j \|(f - f(\xi_j)) 1_{I(j)}\|_1 < \varepsilon/2.$$

Voor iedere $j$ is er een continue functie $g_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ met $\|g\|_{[a,b]} \leq 1$, zo dat

$$\|g_j - 1_{I(j)}\|_1 \leq \varepsilon/(2Mn + 1).$$

Definieer $g = \sum_j f(\xi_j) g_j$. Dan is $g$ continu, $\|g\|_{[a,b]} \leq \|f\|_{[a,b]}$ en

$$\|s - g\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)| \|1_{I(j)} - g_j\|_1 \leq Mn\varepsilon/(2Mn + 1) < \varepsilon/2.$$

Er volgt dat

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - s\|_1 + \|s - g\|_1 \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

**Lemma 5.23** *Zij $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en*

$$\|f - g\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

**Bewijs** Er bestaat een $h \in C([-\pi, \pi])$ met $\|h\|_{[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ zo dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h(x)|\, dx < \pi\varepsilon.$$

Hierbij bestaat een $g \in C([-\pi, \pi])$ met $\|g\|_{[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_\infty$, en met $g(-\pi) = g(\pi)$ zo dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - g(x)|\, dx < \pi\varepsilon.$$

De functie $g$ laat zich uniek voortzetten tot een functie $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Wegens de bovenstaande schattingen geldt voor deze voortzetting dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

□

**Gevolg 5.24** *Laat $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat*

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

**Bewijs** Er bestaat een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en $\|f-g\|_1 < \varepsilon^2/(2\|f\|_{\mathbb{R}}+1)$. Hiervoor geldt:

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 \, dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\|f\|_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)| \, dx \\
&= 2\|f\|_{\mathbb{R}}\|f-g\|_1 < \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

□

**Stelling 5.25** *Zij $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan gelden de uitspraken van Stelling 5.21.*

**Bewijs** Voor elke eindige deelverzameling $J \subset \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\|f\|_2^2 = \|f_J\|_2^2 + \|f-f_J\|_2^2,$$

dus in het bijzonder

$$\|f_J\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Zij $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt dat $\|g_J - f_J\|_2 \leq \|g-f\|_2$, dus

$$\|f-f_J\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-g_J\|_2 + \|g_J - f_J\| \leq 2\|f-g\|_2 + \|g-g_J\|.$$

Er bestaat een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $\|f-g\|_2 < \varepsilon/4$. Hiervoor geldt dus

$$\|f-f_J\|_2 \leq \varepsilon/2 + \|g-g_J\|_2.$$

Vanwege de geldigheid van de stelling voor $g$ bestaat er een eindig deel $J_0 \subset \mathbb{Z}$ zo dat voor alle eindige $J \subset \mathbb{Z}$ met $J \supset J_0$ geldt: $\|g-g_J\|_2 < \varepsilon/2$. Voor al dergelijke $J$ geldt dus

$$\|f-f_J\|_2 < \varepsilon. \tag{5.5}$$

Hieruit volgt dat

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)_k \varepsilon_k,$$

in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_2$.

Uit de schatting (5.5) volgt ook dat

$$\|f_J\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f-f_J\|_2^2 > \|f\|_2^2 - \varepsilon^2.$$

Hieruit concluderen we de gelijkheid van Parseval:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\mathcal{F}f)_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

□

# Appendix: Riemann-integreerbaarheid voor vectorwaardige functies

In de vectorwaardige context is het werken met onder- en bovensommen minder geschikt. In plaats daarvan werken we met Riemann-sommen.

Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een begrensde functie, dwz. er bestaat een $M > 0$ zo dat $\|f(x)\| \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$. Onder een verdeling van het interval $I = [a, b]$ verstaan we een eindige verzameling $V \subset I$ met $a, b \in V$. Zij $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de ordening naar grootte van de elementen van $V$. We schrijven ook

$$V = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b\}.$$

Onder een verzameling $\Xi$ van strooipunten bij $V$ verstaan we een collectie punten $\{\xi_1, \dots, \xi_p\} \subset I$ met $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ voor alle $1 \leq j \leq p$. Bij $V$ en $\Xi$ definiëren we de Riemann-som $S(f, V, \Xi)$ door

$$S(f, V, \Xi) := \sum_{j=1}^{p} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

De definitie van Riemann-integreerbaarheid kan als volgt gegeneraliseerd worden van scalaire functies naar vectorwaardige functies.

**Definitie A.1** De functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heet Riemann-integreerbaar indien de volgende condities vervuld zijn:

(a) $f$ is begrensd;

(b) voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een verdeling $V$ van $[a, b]$ zo dat voor elk tweetal collecties $\Xi_1, \Xi_2$ van strooipunten bij $V$ geldt dat

$$\|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\| < \varepsilon. \tag{A.1}$$

$\oslash$

**Lemma A.2** *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een begrensde functie zijn. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De functie $f$ is Riemann-integreerbaar.*

(b) *Voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ geldt dat de functie $f_v : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle f(x), v\rangle$ Riemann-integreerbaar is.*

(c) *Er bestaat een unieke vector $I(f) \in \mathbb{R}^n$ met de volgende eigenschap. Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een verdeling $V$ van $[a, b]$ zo dat voor elke collectie $\Xi$ van strooipunten bij $V$ geldt dat*

$$\|S(f, V, \Xi) - I(f)\| < \varepsilon. \tag{A.2}$$

**Bewijs** Voor $n = 1$ is dit resultaat bewezen in Inleiding Analyse. We veronderstellen nu dat algemener $n \geq 1$. Veronderstel dat (a) geldt en zij $v \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt voor iedere verdeling $V$ en iedere collectie strooipunten $\Xi$ daarbij dat

$$\langle S(f, V, \Xi), v\rangle = S(f_v, V, \Xi).$$

Zij $\varepsilon > 0$. Wegens (a) bestaat er een verdeling $V$ zo dat (A.1) geldt voor alle collecties strooipunten $\Xi_1, \Xi_2$ bij $V$, met $\varepsilon/(\|v\| + 1)$ in plaats van $\varepsilon$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} |S(f_v, V, \Xi_1) - S(f_v, V, \Xi_2)| &= |\langle S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2), v\rangle| \\ &\leq \|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\|\|v\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de Riemann-integreerbaarheid van $f_v$.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $e_1, \ldots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ en schrijf $f = (f_1, \ldots, f_n)$, dan is $f_j = f_{e_j}$. Met (b) volgt dat iedere component $f_j$ Riemann-integreerbaar is. Definieer $I(f) \in \mathbb{R}^n$ door $I(f)_j = \int_a^b f_j(x)\, dx$. Dan volgt voor iedere $j$ het bestaan van een verdeling $V_j$ van $[a, b]$ zo dat

$$\overline{S}(f_j, V_j) - \underline{S}(f_j, V_j) < \varepsilon/n.$$

Deze schatingen gelden ook met $V_j$ vervangen door de gemeenschappelijke verfijning $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Voor iedere collectie $\Xi$ van strooipunten bij $V$ geldt nu dat $S(f_j, V, \Xi)$ en $I(f)_j$ tussen $\underline{S}(f_j, V)$ en $\overline{S}(f_j, V)$ liggen, dus ook

$$|S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| < \varepsilon/n.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \|S(f, V, \Xi) - I(f)\| &\leq \sum_{j=1}^{n} |S(f, V, \Xi)_j - I(f)_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| < n\varepsilon/n = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de uitspraak over de existentie in (c).

Voor de uniciteit redeneren we als volgt. Stel dat $I(f) \in V$ de geformuleerde eigenschap heeft. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een verdeling $V$ van $[a, b]$ zo dat voor elke collectie strooipunten $\Xi$ bij $V$ geldt dat (A.2). Hieruit volgt voor de $j$-de component dat

$$|S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| = |S(f, V, \Xi)_j - I(f)_j| < \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $f_j$ Riemann-integreerbaar is, met integraal $I(f)_j$. Dus $I(f)$ is uniek.

Veronderstel tenslotte dat (c) geldt. Zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat een verdeling $V$ zo dat (A.2) geldt met $\varepsilon/2$ in plaats van $\varepsilon$. Is $\Xi_1, \Xi_2$ een tweetal collecties strooipunten bij $V$, dan volgt

$$\begin{aligned} &\|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\| \\ &\quad \leq \|S(f, V, \Xi_1) - I(f)\| + \|I(f) - S(f, V, \Xi_2)\| < 2\varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $f$ is Riemann-integreerbaar. $\square$

Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integreerbaar, dan noemen we de unieke $I(f) \in \mathbb{R}^n$ die voldoet aan conditie (c) om voor de hand liggende redenen de Riemann-integraal van $f$ over $[a, b]$, en we schrijven

$$\int_a^b f(x)\, dx = I(f).$$

Uit het bovenstaande volgt dat de integraal bepaald is door componentsgewijze integratie:

$$I(f)_j = \int_a^b f_j(x)\, dx, \qquad (1 \leq j \leq n).$$

**Opmerking A.3** In het bijzonder geldt dat iedere continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integreerbaar is. In Paragraaf 3.1 hebben we deze relatie niet hoeven leggen, omdat we de integraal direct konden definiëren. $\oslash$

We hebben nu voldoende achtergrond ontwikkeld om de driehoeksongelijkheid voor vectorwaardige Riemann-integralen te bewijzen.

**Lemma A.4** *Zij* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *een Riemann-integreerbare functie* $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. *Dan is ook de functie* $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ *Riemann-integreerbaar op* $[a, b]$, *en er geldt*

$$\left\| \int_a^b f(x)\, dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\, dx.$$

**Bewijs** We tonen eerst aan dat $\|f\|$ Riemann-integreerbaar is. Dit is het lastigste deel van het bewijs. De rest van het bewijs is hetzelfde als dat voor een continue functie $f$, zie de vorige paragraaf.

Zij $\varepsilon > 0$. Voor iedere $1 \leq k \leq n$ bestaat een verdeling $V_k$ zo dat

$$\overline{S}(f_k, V_k) - \underline{S}(f_k, V_k) < \varepsilon/n.$$

Voor de gemeenschappelijke verfijning $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ van deze verdelingen gelden deze schattingen met $V$ in plaats van $V_k$. Schrijf $V = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_p\}$ en zij $\Xi_1 = \{\xi_{1j}\}$ en $\Xi_2 = \{\xi_{2j}\}$ een tweetal collecties van strooipunten bij $V$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
S(\|f\|, V, \Xi_1) - S(\|f\|, V, \Xi_2) &= \sum_{j=1}^{p} (\|f(\xi_{1j})\| - \|f(\xi_{2j})\|)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \|f(\xi_{1j}) - f(\xi_{2j})\|(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |f_k(\xi_{1j}) - f_k(\xi_{2j})|(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (\sup_{I(j)} f_k - \inf_{I(j)} f_k)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (\overline{S}(f_k, V) - \underline{S}(f_k, V)) < n\varepsilon/n = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Deze schatting geldt ook met verwisseling van $\Xi_1$ en $\Xi_2$, dus

$$|S(\|f\|, V, \Xi_1) - S(\|f\|, V, \Xi_2)| < \varepsilon.$$

We concluderen dat $\|f\|$ inderdaad Riemann-integreerbaar is. Schrijf $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$. Er bestaat een $v \in \mathbb{R}^n$ met $\|v\| = 1$, zo dat $\langle I(f), v\rangle = \|I(f)\|$. (Als $I(f) \neq 0$, dan kunnen we $v = I(f)/\|I(f)\|$ nemen.) Nu geldt

$$\begin{aligned}
\|I(f)\| = \langle I(f), v\rangle &= \int_a^b \langle f(x), v\rangle\, dx \\
&\leq \int_a^b |\langle f(x), v\rangle|\, dx \\
&\leq \int_a^b \|f(x)\|\|v\|\, dx \\
&= \int_a^b \|f(x)\|\, dx.
\end{aligned}$$

□

**Voorbeeld A.5** Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ is Riemann-integreerbaar indien zowel $f_1 = \mathrm{Re} f$ als $f_2 = \mathrm{Im} f$ Riemann-integreerbaar zijn. Bovendien is in dat geval

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + i \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Ook is $|f|$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

$\oslash$

**Voorbeeld A.6** Schrijf $\varepsilon_k$ voor de functie $x \mapsto e^{ikx}$. Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een lokaal Riemann integreerbare functie, die periodiek is met periode $2\pi$, dan zijn zowel de functies $f_1 = \mathrm{Re} f$ als $f_2 = \mathrm{Im} f$ lokaal Riemann-integreerbaar, en ook de functies $x \mapsto f_1 \cos kx + f_2 \sin kx$ en $x \mapsto -f_1(x) \sin kx + f_2(x) \cos kx$. Dit zijn het reële en het imaginaire deel van de functie

$$x \mapsto f(x) e^{-ikx}.$$

Deze functie is dus ook lokaal Riemann-integreerbaar. Er geldt dat

$$|(\mathcal{F}f)_k| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{\mathbb{R}},$$

waar $\|f\|_{\mathbb{R}}$ staat voor de supnorm van $f$ over $\mathbb{R}$. $\oslash$

### Product van Riemann-integreerbare functies

In Hoofdstukken 4 en 5 van dit dictaat maken we regelmatig gebruik van het volgende resultaat voor Riemann-integreerbare functies.

**Lemma A.7** *Veronderstel dat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ een tweetal Riemann-integreerbare functies zijn. Dan is ook de productfunctie $fg : x \mapsto f(x)g(x)$, $[a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar.*

**Bewijs** Deel van de eis van Riemann-integreerbaarheid is dat $f$ en $g$ begrensd zijn. De sup-normen geven we aan met $M_f = \|f\|_{[a,b]}$ en $M_g = \|g\|_{[a,b]}$. Zij $I \subset [a, b]$ een deelinterval. Dan geldt voor alle $x, y \in I$ dat

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)| \\
&\leq \|f\|_{[a,b]} |g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)| \|g\|_{[a,b]} \\
&\leq \mathrm{var}_I\, f \cdot \|g\|_{[a,b]} + \mathrm{var}_I\, g \cdot \|f\|_{[a,b]} \\
&\leq (\mathrm{var}_I\, g + \mathrm{var}_I\, f)(M_f + M_g).
\end{aligned}$$

Hierin zijn de variaties $\mathrm{var}_I\, f$ en $\mathrm{var}_I\, g$ gedefinieerd als in het dictaat Inleiding Analyse. Zij $\varepsilon > 0$. Uit de Riemann-integreerbaarheid van $f$ en $g$ volgt het bestaan van een verdeling $V = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ van $[a, b]$, zo dat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon/2(M_f + M_g + 1), \qquad \overline{S}(g, V) - \underline{S}(g, V) < \varepsilon/2(M_f + M_g + 1)$$

(gebruik een gemeenschappelijke verfijning). Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
\overline{S}(fg,V)-\underline{S}(fg,V) &= \sum_{j=1}^{n}\operatorname{var}_{I(j)}(fg)(x_j-x_{j-1}) \\
&\leq (M_f+M_g)\sum_{j=1}^{n}(\operatorname{var}_{I(j)} f+\operatorname{var}_{I(j)} g)(x_j-x_{j-1}) \\
&= (M_f+M_g)(\overline{S}(f,V)-\underline{S}(f,V)+\overline{S}(g,V)-\underline{S}(g,V)) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Gevolg A.8** *Laat $a,b\in\mathbb{R}, a<b$, en laat $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ Riemann-integreerbaar zijn. Dan is de functie $fg:[a,b]\to\mathbb{C}$ Riemann-integreerbaar.*

**Bewijs** Schrijf $f=f_1+if_2$ en $g=g_1+ig_2$ met $f_1,f_2,g_1,g_2$ reëelwaardig. Door toepassing van het bovenstaande lemma volgt dat $f_1g_1-f_2g_2$ en $f_1g_2+f_2g_1$ Riemann-integreerbaar zijn. Hieruit volgt dat $fg=(f_1g_1-f_2g_2)+i(f_1g_2+f_2g_1)$ Riemann-integreerbaar is. □

# Index