Tentamen inleiding analyse 22 april 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Arjen Baarsma, Sebastiaan Janssens, Janne Kool of Maria Salazar).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- *SUCCES!*

1. **[36]** Definieer $f(x,y) = y^x$ door middel van
$$\begin{array}{rccc} f : &]0,\infty[\times]0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \exp(x \ln y) \end{array}.$$
   (*i*) Ga na dat $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y) = 1$ voor alle $b > 0$.

   (*ii*) Laat zien dat $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = 0$ voor alle $a > 0$.

   (*iii*) Toon aan dat de limiet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ niet bestaat.

2. **[18]** Zij (V,d) een metrische ruimte met de afstandfunctie d. We definiëren een functie $\tilde{d} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ met de formule
$$\tilde{d}(x,y) \quad = \quad \min(1, d(x,y)) \quad \text{voor alle } x,y \in V.$$
   Bewijs dat $(V,\tilde{d})$ ook een metrische ruimte is.

3. **[24]** Zij $f : V \longrightarrow W$ een afbeelding tussen metrische ruimten. Toon aan dat f in $a \in V$ dan en slechts dan continu is, als voor elke convergente rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in V met limiet a de rij $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ in W convergent is met limiet $f(a)$.

4. **[12]** Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in 0 met $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$. Laat zien dat f positieve waarden en negatieve waarden heeft.

Hertentamen analyse A op 25 mei 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en op het eerste vel ook de naam van je werkcollegeleider (Arjen Baarsma, Sebastiaan Janssens, Janne Kool of Maria Salazar).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Alle (deel)opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ de Euclidische norm $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

   (i) Bewijs dat er een $\eta > 0$ bestaat met de eigenschap
   $$\|(x,y) - (2,1)\| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |y| \leq 2 \ .$$

   (ii) Zij $\eta > 0$ als in (i) gekozen. Toon aan dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $\|(x,y) - (2,1)\| < \eta$ geldt dat
   $$|\,xy - 2\,| \leq 2\,|x-2| + 2\,|y-1| \ .$$

   (iii) Bewijs vanuit de definitie van limiet dat $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} xy = 2$.

2. Bereken de volgende limieten in $\mathbb{R}$:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$,

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Geef daarbij precies aan welke rekenregels en standaardlimieten zijn gebruikt. De feiten dat de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ continu is op $[0, \infty[$ en dat de functie $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ continu is op $\mathbb{R}$ mogen daarbij als bekend worden verondersteld.

3. Gegeven is $\varepsilon > 0$, een metrische ruimte (V, d) en een punt $a \in V$.

   (i) Ga na dat er voor iedere $x \in B(a; \varepsilon)$ een positief getal n bestaat met $B(x; \frac{1}{n}) \subseteq B(a; \varepsilon)$.

   (ii) Laat zien dat in het geval $V = \mathbb{R}^p$ (met de Euclidische afstand) een $q \in \mathbb{Q}^p$ bestaat met $a \in B(q; \varepsilon)$.

   (iii) Toon aan dat elke open deelverzameling van $\mathbb{R}$ kan worden geschreven als aftelbare vereniging van open intervallen.

4. De verzameling $C \subseteq \mathbb{R}^3$ bestaat uit de punten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ met $x^2 + y^2 \leq 1$ en $0 \leq z \leq 4$, en $U = \{(x, y, z) \in C \mid x > 0\}$.

   (a) Toon aan dat C een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ is.

   (b) Bewijs dat de verzameling U open is in C.

   (c) Is U ook open in $\mathbb{R}^3$?

5. Definieer de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 1$ en $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$.

   (i) Toon aan dat voor alle oneven $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $a_{n-1} \leq a_{n+1}$ en $a_n \geq a_{n+2}$.

   (ii) Bewijs dat de deelrijen $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ en $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}$ convergeren.

   (iii) Bepaal de limieten $\lim_{k \to \infty} a_{2k}$ en $\lim_{k \to \infty} a_{2k+1}$ en concludeer dat ook de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zelf convergent is.

Uitwerking eerste deeltentamen Inleiding Analyse, 16 april 2009

Opgave 1 [20pt]

Bereken

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin^2 x}$;

Het is bekend dat $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ en $\cos x = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} .$$

De substitutie $y = x - \frac{\pi}{2}$ geeft dan

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{\sin^2 y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{\sin y}\right)^2 = \left(\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1,$$

omdat de functie $z \mapsto z^2$ continu is en $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1 \neq 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$.

Er geldt

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

De functie

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$$

is continu in $x = 0$, omdat

- de functie $x \mapsto 1+x$ is continu in $x = 0$ als de som van twee continue functies;
- de functie $y \mapsto \sqrt{y}$ is continu in $y = 1$;
- de functie $x \mapsto \sqrt{1+x}$ is continu in $x = 0$ als de samenstelling van twee continue functies;
- de functies $g(x) = 1+\sqrt{1+x}$ is continu in $x = 0$ als de som van twee continue functies;
- $1/g(x)$ is continu in $x = 0$ omdat g continu is in $x = 0$ en $g(0) = 2 \neq 0$.

Ook geldt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Hieruit volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f(0) = \frac{1}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

Opgave 2 [15pt]

Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} \ .$$

Ga na of f differentieerbaar is in $x = 0$.

Beschouw het differentiequotiënt $Q : \mathbb{R} \supset\!\to \mathbb{R}$ van f in $x = 0$,

$$Q(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = -\frac{|h|}{h(1 + |h|)}$$

met $\mathrm{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stel dat

$$\lim_{h \to 0} Q(h) = q$$

voor een $q \in \mathbb{R}$. Merk op dat q uniek is, omdat 0 een limietpunt is van $\mathrm{Dom}(Q)$. Dan

$$\lim_{n \to \infty} Q(h_n) = q$$

voor iedere rij $(h_n)_{n \geq 1}$ met $h_n \neq 0$ en zo dat $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$.

Neem eerst

$$h_n = \frac{1}{n} \ .$$

Dan

$$\lim_{n \to \infty} Q(h_n) = -\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = -1$$

omdat de rationale functie

$$x \mapsto \frac{1}{1 + x}$$

continu is in $x = 0$. Nemen we

$$h_n = -\frac{1}{n} \ ,$$

dan

$$\lim_{n \to \infty} Q(h_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

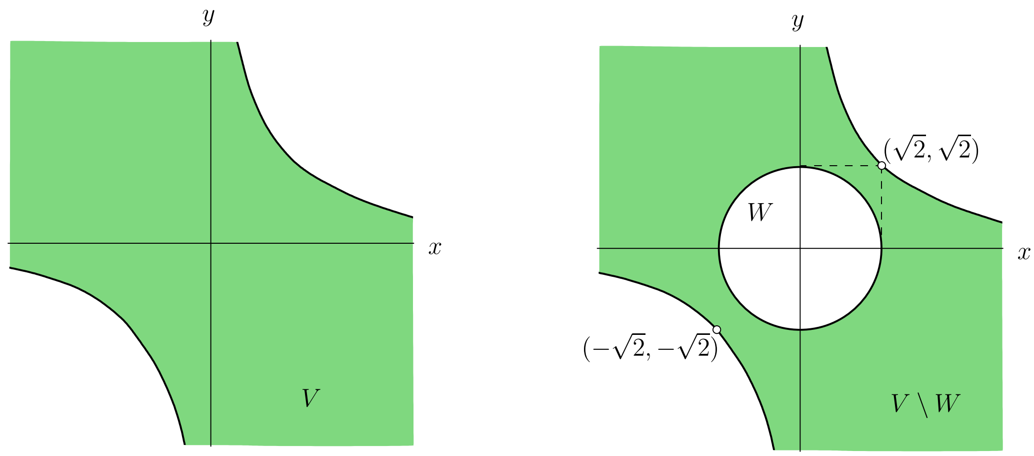
We zouden moeten hebben $q = -1$ en $q = 1$, tegenstelling. Dus heeft $Q(h)$ geen limiet in $h = 0$. De functie f is niet differentieerbaar in $x = 0$.

Opgave 3 [15pt]

Zij $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 2\} \subset \mathbb{R}^2$. Met deze V definiëren we $W \subset \mathbb{R}^2$ door

$$W = \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \ .$$

(a) Schets V en W.



(b) Is W gesloten in $\mathbb{R}^2$? Waarom wel of waarom niet?

We hebben

$$W = \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

omdat voor ieder punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x^2 + y^2 \leq 2$ geldt dat $xy < 2$. Inderdaad, in het grens geval

$$y = \frac{2}{x}, \quad x \neq 0,$$

geldt

$$x^2 + y^2 - 2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 2 = \frac{x^2 - 2x^2 + 4}{x^2} = \frac{(x^2 - 1)^2 + 3}{x^2} > 0.$$

Dus is W een gesloten bol in $\mathbb{R}^2$.

(c) Is W gesloten in V? Waarom wel of waarom niet?

Het complement van W in V,

$$V \setminus W = U := \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 > 2\}$$

is open in V. Inderdaad is U het volledige origineel van het open interval $]2, \infty[$ onder de continue functie $f : V \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dus is W gesloten in V.

Opgave 4 [20pt]

Zij (V, d) een metrische ruimte met de afstand functie d. We definieren een functie $\tilde{d} : V \times V \to \mathbb{R}$ met de formule

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad x, y \in V.$$

Bewijs dat $(V, \tilde{d})$ ook een metrische ruimte is.

Hint: Om de driehoeksongelijkheid te bewijzen, laat zien dat voor $a, b, c \geq 0$ de ongelijkheid $a + b - c \geq 0$ impliceert:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq 0 \ .$$

(i) Voor alle $x, y \in V$ geldt

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0$$

omdat $d(x, y) \geq 0$ voor alle $x, y \in V$. Verder is $\tilde{d}(x, y) = 0$ dan en slechts dan als $d(x, y) = 0$. Maar dat kan alleen als $x = y$.

(ii) We hebben

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = \tilde{d}(y, x)$$

omdat $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in V$.

(iii) Laat $a, b, c \geq 0$ zijn waarvoor $a + b - c \geq 0$. Dan

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} = \frac{(a + b - c) + ab(2 + c)}{(1 + a)(1 + b)(1 + c)} \geq 0.$$

Voor $x, y, z \in V$ definiëer $a := d(x, z), b := d(z, y), c := d(x, y)$. Er geldt $a, b, c \geq 0$ en $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ zodat $a + b - c \geq 0$. We hebben dus

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq 0$$

ofwel $\tilde{d}(x, y) \leq \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(z, y)$ voor alle $x, y, z \in V$. Hiermee is de driehoeksongelijkheid bewezen.

We zien dat $\tilde{d}$ alle eigenschappen van de afstandfunctie heeft, dus is $(V, \tilde{d})$ een metrische ruimte.

Opgave 5 [20pt]

Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$ zodanig dat $a_0 = 3$ en

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$$

voor $n \geq 0$.

(a) Bewijs dat $a_n \geq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Hint: Laat eerst laat dat

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$$

voor alle $x \geq 2$. Pas dan de inductie naar n toe.

We hebben

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} - 2 = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x} = \frac{(x-2)^2}{2x} \geq 0$$

voor alle $x \geq 2$. Dus, inderdaad

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$$

voor alle $x \geq 2$.

Stel dat $a_n \geq 2$ voor een $n \in \mathbb{N}$. Dan

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \geq 2 \ .$$

Ook geldt dat $a_0 = 3 \geq 2$. Met inductie naar n krijgen we dat $a_n \geq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bewijs dat $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Hint: Gebruik (a).

Als $x \geq 1$ dan

$$\frac{1}{x} \leq x \ .$$

Uit (a) volgt dat $\frac{a_n}{2} \geq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Hieruit blijkt dat

$$\frac{2}{a_n} \leq \frac{a_n}{2} \ .$$

Dus

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n$$

ofwel $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bewijs dat (a_n) convergent is en bereken $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

De rij (a_n) is naar beneden begrensd (wegens (a)) en monotoon dalend (wegens (b)). Dus is (a_n) convergent, d.w.z. bestaat er een $a \in \mathbb{R}$ zo dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ .$$

Bovendien is $a \geq 2$. De functie

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

is continu in elke $x \neq 0$. De limietovergang $n \to \infty$ in

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

levert

$$a = f(a) \quad \text{ofwel} \quad a = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} \ .$$

Dus voldoet a aan de vergelijking $a^2 = 4$. Deze vergelijking heeft twee oplossingen: $a = 2$ en $a = -2$. De tweede is uitgesloten wegens $a \geq 2$. Dus $a = 2$.

Bonus Opgave [10pt]

Neem het interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ en knip daar het middelste derde $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ uit weg. Er blijven twee intervallen over: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ en $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Uit elk van deze twee intervallen knippen we weer het middelste deel weg. Als we dat nu oneindig veel keer doen, vinden we als limiet de *Cantorverzameling* Λ.

Bewijs dat Λ gesloten is in $\mathbb{R}$.

De intervalen $]-\infty, 0[$ en $]1, \infty[$ zijn open in $\mathbb{R}$. Ieder uitgeknipte middelste derde is een open interval. Dus is de Cantorverzameling Λ het complement in $\mathbb{R}$ van de (oneindig veel) open deelverzamelingen. Deze vereniging is open. Dus is het complement gesloten. De Cantorverzameling Λ is dus gesloten.