Analyse 2

Opgaven

E.P. van den Ban

Hoofdstuk 1

In deze collectie opgaven is de nummering van de hoofdstukken in de Naslagtekst Analyse 2 aangehouden.

Opgave 1.1 Bepaal de volgende limieten. Geef daarbij precies aan welke stellingen en rekenregels u gebruikt.

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2+1}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}); \qquad \text{(c)} \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n).$$

Opgave 1.2 Voor een rij $(a_n)_{n\geq 0}$ in R spreken we af dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ betekent: voor alle $R > 0$ bestaat er een $N \in$ N zo dat $n \geq N \Rightarrow a_n > R$.

In deze opgave veronderstellen we dat $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ rijen in $]0,\infty[$ zijn. Tevens veronderstellen we dat er een $L > 0$ bestaat zo dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Toon aan:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0.$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$

Opgave 1.3 Gegeven is een monotoon stijgende rij $(a_n)_{n\in\text{N}}$. Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn.

(a) De rij (a_n) is niet naar boven begrensd;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

Opgave 1.4 Gegeven is een getal $c > 0$. We definiëren de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ door

$$a_n = \sqrt[n]{c}.$$

(a) Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \log(a_n) = 0.$

(b) Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1.$

Opgave 1.5 Een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ wordt gedefinieerd door de recurrente betrekkingen $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ voor $n \geq 1$. Bewijs de volgende beweringen.

(a) De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ is monotoon stijgend.

(b) De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ is naar boven begrensd.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

Opgave 1.6 Een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ wordt gedefinieerd door de recurrente betrekkingen $a_1 = 2$ en

$$a_{n+1} = (a_n^2 + 3)/2(a_n - 1) \qquad (n \geq 1).$$

Bewijs dat $a_n > a_{n+1} > 3$ voor alle $n \geq 2$. Bewijs dat de rij (a_n) convergeert en bepaal de limiet.

Opgave 1.7 Bepaal:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2 - 1} + \ldots + \frac{n}{n^2 - n + 1} \right).$$

Hint: geef eerst een van k onafhankelijke boven- en onderschatting voor $1/(n^2 - k + 1)$, als $1 \leq k \leq n$.

Opgave 1.8 Gegeven is een rij reële getallen $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$. Bewijs:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ met $a > 0 \Rightarrow$ er bestaat een $N \in \mathrm{N}$ zo dat voor alle $n \geq N$ geldt $a_n > 0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$;

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$;

Ga voor (a) t/m (c) na of de omgekeerde implicatie ook juist is. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 1.9 Bewijs, door alleen de definitie van limiet te gebruiken, dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Opgave 1.10 Van een rij (a_n) in R is gegeven dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ en dat $|a_{n+1} - a_n| \leq R$ voor alle $n \in \mathrm{N}$; hierbij is $R > 0$ een constante. Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Hint: schrijf $a_{n+1} = a_n + r_n$.

Opgave 1.11 Gegeven is een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]0,\infty[$. Voorts is gegeven dat er constanten $N \in \mathbb{N}$, $C_1 > 0$ en $C_2 > 0$ bestaan zo dat

$$C_1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < C_2, \qquad \text{voor alle} \quad n \geq N.$$

(a) Toon aan dat voor alle $n \geq N$ geldt: $\sqrt[n]{a_n} < C_2 \sqrt[n]{a_N C_2^{-N}}$.
Hint: schrijf $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N$.

(b) Toon aan dat er voor elke $C_2' > C_2$ een $N' \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat: $n \geq N' \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < C_2'$.
Hint: gebruik Opgave 1.4.

(c) Toon aan dat er voor elke $C_1' < C_1$ een $N'' \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat: $n \geq N'' \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > C_1'$.
Hint: pas de voorgaande onderdelen toe op de rij a_n^{-1}.

(d) Zij $L > 0$. Laat zien dat de volgende implicatie geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Opgave 1.12 Gegeven zijn begrensde deelverzamelingen $V_1, V_2, \ldots, V_k$ van $\mathbb{R}^n$. Bewijs dat $\cup_{i=1}^k V_i$ begrensd is. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de vereniging van oneindig veel begrensde verzamelingen niet begrensd hoeft te zijn.

Opgave 1.13 Gegeven zijn deelverzamelingen $W_1, \ldots, W_k$ van $\mathbb{R}^n$ en een punt $a \in \mathbb{R}^n$ dat inwendig punt is van alle $W_i, i = 1, \ldots, k$. Bewijs dat a inwendig punt is van $\cap_{i=1}^k W_i$. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de analoge uitspraak voor oneindig veel deelverzamelingen niet waar hoeft te zijn.

Opgave 1.14 Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de vereniging van oneindig veel gesloten verzamelingen niet gesloten hoeft te zijn.

Opgave 1.15 Gegeven is een metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling $A \subset V$.

(a) Toon aan: als $S \subset V$ gesloten is en $S \supset A$, dan $S \supset \bar{A}$.

(b) Zij $\mathcal{C}$ de collectie gesloten verzamelingen $T \subset V$ met $T \supset A$. Toon aan dat $\bar{A} = \cap_{T\in\mathcal{C}} T$.

Opgave 1.16 Zij (V, d) een metrische ruimte. We zullen een verzameling $A \subset V$ begrensd noemen als er een $a \in V$ en een $R > 0$ bestaan zo dat $A \subset B(a; R)$.

(a) Zij $A \subset V$ begrensd. Toon aan dat voor iedere $b \in V$ een $R' > 0$ bestaat zo dat $A \subset B(b; R')$.

(b) Zij $(E, ||\cdot||)$ een genormeerde lineaire ruimte. Toon aan dat een deelverzameling $A \subset E$ begrensd is dan en slechts dan als er een $R > 0$ bestaat zo dat $||a|| \leq R$ voor alle $a \in A$.

Een rij (a_n) in V heet begrensd als de deelverzameling $\{a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ van V begrensd is in V.

(c) Zij $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ een convergente rij in V. Toon aan dat (a_n) begrensd is in V.

Opgave 1.17 We beschouwen de ruimte $B = B(\mathrm{R})$ van begrensde functies $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$, voorzien van de sup-norm. Bedenk een rij $(f_n)_{n\geq 0}$ in B die begrensd is, maar geen convergente deelrij bezit. Bewijs vervolgens uw beweringen. Hint: start met een begrensde functie $f_0 : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ die niet identiek gelijk aan nul is, en beschouw verschuivingen daarvan.

Opgave 1.18 Geef het bewijs van Lemma 1.28 uit de Handleiding.

Opgave 1.19 Geef het bewijs van Lemma 1.39 uit de Handleiding.

Opgave 1.20 Gegeven is een genormeerde lineaire ruimte $(V, \|\cdot\|)$, en een rij-compacte deelverzameling $D \subset V$.

(a) Toon aan dat D gesloten en begrensd is. Uit welke eerder gemaakte opgave blijkt dat het omgekeerde niet hoeft te gelden?

(b) Toon aan dat iedere gesloten deelverzameling $A \subset D$ weer rij-compact is.

(c) Gegeven is een rij gesloten niet-lege verzamelingen A_n, $n \in \mathrm{N}$ met $A_0 = D$ en $A_n \supset A_{n+1}$ voor alle $n \geq 0$. Toon aan dat de doorsnede

$$A := \cap_{n\in\mathrm{N}} A_n$$

niet-leeg en rij-compact is. Hint: beschouw een rij $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ met $a_n \in A_n$.

(d) Geef een voorbeeld van een rij A_n van niet-lege gesloten delen van R zo dat $\cap_{n\in\mathrm{N}} A_n = \emptyset$.

(e) Geef een voorbeeld van een rij A_n van niet-lege begrensde delen van R zo dat $\cap_{n\in\mathrm{N}} A_n = \emptyset$.

Opgave 1.21 Laat (V, d) een metrische ruimte zijn. Een rij $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ in V heet een Cauchy rij als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathrm{N}$ bestaat zo dat: voor alle $m, n \geq N$ geldt:

$$n, m \geq N \quad \Rightarrow \quad d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

(a) Toon aan dat iedere convergente rij in V een Cauchy rij is.

(b) Toon aan dat iedere Cauchy rij in V begrensd is.

De metrische ruimte V heet volledig indien iedere Cauchy rij in V convergent is.

(c) Toon aan dat R^p volledig is. Hint: gebruik de stelling van Bolzano-Weierstrass.

Opgave 1.22 Bewijs dat de volgende afbeeldingen $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ continu zijn:

(a) $x \mapsto \langle a, x \rangle$, waarbij a een gegeven vast element in R^n is.
(b) $x \mapsto \|x\|$.
(c) $x \mapsto \langle x, x \rangle$.

Geef het bewijs op twee manieren:

(i) Zonder gebruik te maken van coördinaten en met behulp van de definitie van continuïteit en eigenschappen van het inprodukt.

(ii) Door gebruik te maken van coördinaten en geschikte stellingen toe te passen.

Opgave 1.23 Gegeven is een interval $I \subset \mathrm{R}$. (We veronderstellen verder niets over dit interval, het mag open of onbegrensd zijn.) Voorts is een differentieerbare functie $f : I \to \mathrm{R}$ gegeven. We veronderstellen dat er een $M > 0$ bestaat zo dat

$$|f'(x)| \leq M \quad \text{voor alle} \quad x \in I.$$

(a) Toon aan dat voor alle $a, b \in I$ geldt:

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Hint: gebruik de middelwaardestelling.

(b) Toon aan dat f uniform continu is op I.

Opgave 1.24 Gegeven is een open deel $U \subset \mathrm{R}^n$ dat convex is; d.w.z. als $a, b \in U$ dan is ook het lijnstuk $L_{a,b} = \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ bevat in U. Voorts is een differentieerbare functie $g : U \to \mathrm{R}$ gegeven met $\|\mathrm{grad}\, g(x)\| \leq M$ voor alle $x \in U$.

(a) Toon aan dat voor alle $a, b \in U$ geldt $|g(b) - g(a)| \leq M\|b - a\|$. Hint: gebruik de vorige opgave.
(b) Toon aan dat de functie g uniform continu is op U.

Opgave 1.25

(a) Bewijs dat $x \mapsto \|x\|$ een uniform continue afbeelding van R^n naar R is.
(b) Zij $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ continu (resp. uniform continu). Bewijs dat $x \mapsto \|f(x)\|$ continu (resp. uniform continu) is.

Opgave 1.26 Zij V een begrensde en gesloten deelverzameling van R^n en $f : V \to \mathrm{R}^p$ een continue functie met de eigenschap dat voor alle $x \in V$ geldt $f(x) \neq 0$.

(a) Bewijs dat $\inf\{\|f(x)\| \mid x \in V\} > 0$.

(b) Geef voorbeelden met $V \subset \mathrm{R}^2$ waaruit blijkt dat de uitspraak onder (a) niet meer juist hoeft te zijn als V niet begrensd of niet gesloten is.

Opgave 1.27 In deze opgave zijn V, W, Z metrische ruimten.

(a) Gegeven zijn twee uniform continue functies $f, g : V \to \mathrm{R}^p$. Toon aan dat $f+g$ een uniform continue functie $V \to \mathrm{R}^p$ is.

(b) Gegeven zijn afbeeldingen $\varphi : V \to W$ en $\psi : W \to Z$. Toon aan: als φ en ψ uniform continu zijn, dan is hun compositie $\psi \circ \varphi$ dat ook.

(c) Onderzoek of de functie $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $(x, y) \mapsto xy$ uniform continu is. Bewijs uw beweringen.

(d) Bewijs dat iedere lineaire afbeelding $A : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ uniform continu is.

Opgave 1.28 De functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ is gedefinieerd door

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{als} \qquad (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Bewijs dat f continu is op $\mathrm{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Bewijs dat voor iedere $x \in \mathrm{R}$ de functie $y \mapsto f(x, y)$ continu is en dat voor iedere $y \in \mathrm{R}$ de functie $x \mapsto f(x, y)$ continu is.

(c) Schets de niveauverzamelingen van f voor de functiewaarden -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1.

(d) Bewijs dat f niet continu is in $(0, 0)$.

(e) Voor welke $c \in \mathrm{R}$ bestaat er een rij $(x_n, y_n)_{n \geq 1}$ in R^2 met $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$ en $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = c$? Voor welke $c \in \mathrm{R}$ bestaat er niet zo'n rij? Motiveer uw antwoord.

(f) Bewijs dat f begrensd is en bereken $\sup f$ en $\inf f$.

Opgave 1.29 De functies $g : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ en $h : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ zijn voor $(x, y) \neq (0, 0)$ gedefinieerd door

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^6}.$$

Verder is $g(0, 0) = h(0, 0) = 0$.

(a) Onderzoek of g en h continu zijn in $(0, 0)$.

(b) Onderzoek of g en h begrensde functies zijn.

Motiveer uw antwoorden.

Opgave 1.30 De functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos xy - 1}{x^2y^2} & \text{als} \quad x \neq 0 \quad \text{en} \quad y \neq 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{als} \quad x = 0 \quad \text{of} \quad y = 0. \end{cases}$$

(a) Bewijs dat f continu is.

(b) Bewijs dat f niet uniform continu is.

Aanwijzing: Beschouw f als compositie van twee geschikte functies.
De functie $g : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ is gedefinieerd door

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{\cos xy - 1}{x^2(x^2+y^2)} \quad \text{als} \quad x \neq 0, \\ g(0,y) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) Onderzoek in welke punten de functie g continu is en in welke niet.

Opgave 1.31 Als $1 \leq i,j \leq n$, dan noteren we met E_{ij} de $n \times n$ matrix met een 1 op de positie van de i-de rij en de j-de kolom en op de overige posities nullen. De matrices $E_{11}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{nn}$ vormen een basis van de lineaire ruimte V bestaande uit de $n \times n$ matrices (met reële coëfficiënten). Via deze basis identificeren we V met R^{n^2}; aldus kunnen we spreken over continue afbeeldingen $V \to \mathrm{R}$ en $V \to V$.

(a) Bewijs dat de afbeelding $f : V \to \mathrm{R}, M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ continu is (hierbij is $\mathrm{tr}(M)$ het spoor van de matrix M, d.w.z. de som van de diagonaalelementen).

(b) Bewijs dat de afbeelding $g : V \to V$, $M \mapsto {}^tM$ continu is. (${}^tM$ is de getransponeerde of gespiegelde van de matrix M.)

(c) Bewijs dat de afbeelding $h : V \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $h(M) = \det(M)$ continu is.

Laat U de deelverzameling van V zijn bestaande uit de matrices met determinant ongelijk aan nul.

(d) Toon aan dat U een open deel is van V. Hint: gebruik het voorgaande onderdeel.

(e) Bewijs dat $M \mapsto M^{-1}$ een continue afbeelding $U \to V$ is.

Opgave 1.32 Schets elk van de volgende verzamelingen $V \subset \mathrm{R}^2$, en bepaal tevens het inwendige V^{inw}, de afsluiting $\overline{V}$ en de rand $\overline{V} \setminus V^{\mathrm{inw}}$. Zeg tevens of de verzameling open en/of gesloten of geen van beiden is. Hierbij mag u volstaan met het geven van antwoorden zonder motivatie.

(a) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \ \|(x,y)\| < 1\}$,

(b) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \ \|(x,y)\| \leq 1\}$,

(c) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \ \|(x,y)\| \leq 1, \, y > 0\}$,

(d) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \ xy \leq 1\}$,

(e) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \ |x| < 1, \, |y| < 1, \, (x,y) \neq (0,0)\}$,

(f) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \; xy = 1,\, y > 0\}$.

Opgave 1.33 Bewijs de juistheid van de in de vorige opgave in de onderdelen (c) en (e) gedane beweringen.

Opgave 1.34 Schets elk van de volgende deelverzamelingen $V \subset \mathrm{R}^2$ en bepaal of hij open of gesloten of geen van beiden is. Bewijs uw beweringen door zoveel mogelijk gebruik te maken van de resultaten van Hoofdstuk 2 uit de Handleiding.

(a) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \; y < x^2\}$,
(b) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \; y \leq x^2\}$,
(c) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \; 0 \leq y \leq x^2\}$,
(d) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \; 0 < y < x^2 \leq 4\}$,
(e) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \; |x| < 1,\, |y| < 1,\, (x,y) \neq (0,0)\}$,
(f) $V = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 \mid \; xy = 1,\, y > 0\}$.

Opgave 1.35 Gegeven is een tweetal verzamelingen V, W en een afbeelding $f : V \to W$. Voorts is een index verzameling $\mathcal{A}$ gegeven en voor iedere $\alpha \in \mathcal{A}$ een deelverzameling $B_\alpha \subset W$.

(a) Bewijs dat $f^{-1}(\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha) = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} f^{-1}(B_\alpha)$.
(b) Bewijs dat $f^{-1}(\cap_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha) = \cap_{\alpha\in\mathcal{A}} f^{-1}(B_\alpha)$.

Aanwijzing bij bijvoorbeeld (a). Het werkt prettig om twee inclusies te bewijzen, namelijk '$\subset$' en '$\supset$'. Voor de inclusie '$\subset$' kun je als volgt te werk gaan. Begin met 'Zij $x \in f^{-1}(\cup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha)$'. Probeer vervolgens door een redenering aan te tonen dat $x \in \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} f^{-1}(B_\alpha)$.

Opgave 1.36 Geef het bewijs van Lemma 2.4 uit de Handleiding Analyse 2.

Opgave 1.37

(a) Toon aan dat de functie $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x_j$ (de j–de coordinaatsfunctie) continu is.
(b) Toon aan, door het vorige onderdeel en geschikte rekenregels te gebruiken, dat de volgende functies $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ continu zijn:

$$f(x,y) = x + y^2 \cos(xy+1), \qquad g(x,y) = \frac{\log(1 + x^2y^2) + \cos x}{x^4 + y^2 + 2}.$$

Opgave 1.38 Gegeven is een deelverzameling $S \subset \mathrm{R}^p$.

(a) Toon aan dat $a \in \mathrm{R}^p$ een verdichtingspunt van S is dan en slechts dan als er een rij (x_k) in S bestaat met $\lim_{k\to\infty} x_k = a$.

(b) Toon aan dat S gesloten is dan en slechts dan als voor iedere in S gelegen rij (x_k) geldt:

$$\lim_{k\to\infty} x_k \quad \text{bestaat} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} x_k \in S.$$

Opgave 1.39 Gegeven zijn twee gesloten en begrensde verzamelingen $S \subset \mathrm{R}^m$ en $T \subset \mathrm{R}^n$. Op natuurlijke wijze vatten we $S \times T$ op als deel van de metrische ruimte R^{m+n}. Voorts is een continue functie $f : S \times T \to \mathrm{R}$ gegeven. De variabelen in R^m noteren we met $x = (x_1, \ldots, x_m)$, die in R^n met $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

(a) Toon aan dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $a, b \in S$ met $\|a - b\| < \delta$ geldt:

$$\forall y \in T \;:\quad \|f(a,y) - f(b,y)\| < \varepsilon.$$

Voor elke $x \in S$ definiëren we

$$m(x) = \max_{y\in T} f(x,y).$$

(b) Toon aan dat voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $a, b \in S$ met $\|a - b\| < \delta$ geldt: $m(a) > m(b) - \varepsilon$. Aanwijzing: gebruik dat $m(b) = f(b, y_b)$ voor een geschikte van b afhankelijke $y_b \in T$.

(c) Toon aan dat de functie $m : S \to \mathrm{R},\ x \mapsto m(x)$ continu is.

Opgave 1.40 Gegeven is een continue afbeelding $f : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^q$ met de eigenschap dat het volledig origineel $f^{-1}(A)$ van ieder gesloten en begrensd deel $A \subset \mathrm{R}^q$ gesloten en begrensd in R^p is.

(a) Laat $(x_k)_{k\geq 1}$ een rij in R^p zijn zo dat de rij $(f(x_k))_{k\geq 1}$ convergent is met limiet $b \in \mathrm{R}^q$. Toon aan dat $(x_k)_{k\geq 1}$ een convergente deelrij heeft. Zij a de limiet van die convergente deelrij. Toon aan dat $f(a) = b$.

(b) Gegeven is een gesloten deel $V \subset \mathrm{R}^p$. Toon aan dat $f(V)$ een gesloten deel van R^q is.

(c) Bedenk zelf een uitbreiding van het bovenstaande naar een zo algemeen mogelijke context.

Opgave 1.41 Gegeven is een niet-lege verzameling $V \subset \mathrm{R}^p$ en een punt $a \in R^p$. Voor $x, y \in \mathrm{R}^p$ noteren we $d(x,y) = \|x - y\|$. Merk op dat de verzameling $\{d(a,x) \mid x \in V\}$ een niet-lege naar onderen begrensde deelverzameling van R is en derhalve een infimum bezit. We noteren dit getal met

$$d(a,V) := \inf\{d(x,a) \mid x \in V\}$$

en noemen het de afstand van a tot V.

(a) Toon aan dat a een verdichtingspunt van V is dan en slechts dan als $d(a,V) = 0$.

Veronderstel nu dat V gesloten is.

(b) Toon aan dat $a \in V \iff d(a, V) = 0$.

(c) Toon aan dat er een $b \in V$ bestaat zo dat $d(a, V) = d(a, b)$. Hint: beschouw de verzameling $V \cap \bar{B}(0; R)$ voor een geschikt gekozen $R \geq 0$.

Opgave 1.42 We gaan de functie $f :]0, 1[\times]0, 1[\to \mathrm{R}$, gegeven door $f(x, y) = x^2 + y$, op verschillende manieren illustreren.

(a) Teken een aantal *niveaulijnen* van f.

(b) We kunnen ook *doorsneden* van vlakken met de grafiek van f tekenen. Dat doen we door één van de variabelen vast te houden; dat levert een functie van één variabele op.

Schets onder elkaar de grafieken van $x \mapsto f(x, 0)$, $x \mapsto f(x, \frac{1}{2})$ en $x \mapsto f(x, 1)$.

Maak ook enkele doorsneden evenwijdig aan de y-as.

(c) Maak een schets van de *driedimensionale grafiek* van f.

Opgave 1.43 Zij $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\}$. Beantwoord de vragen uit de vorige opgave voor de functie $g : U \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door: $g(x, y) = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hoofdstuk 2

Opgave 2.1 Onderzoek, welke van de volgende functies $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ in $(0,0)$ continu, resp. richtingsdifferentieerbaar ten opzichte van elke $v \in \mathrm{R}^2$ zijn:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ als $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

(b) $g(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^4}$ als $(x,y) \neq (0,0)$, $g(0,0) = 0$.

(c) $h(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ als $(x,y) \neq (0,0)$, $h(0,0) = 0$.

Opgave 2.2 Dezelfde vragen als in Opgave 2.1 voor:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{2x^2+y^4}$ als $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

(b) $g(x,y) = \dfrac{x|y|^{3/2}}{x^2+y^2}$ als $(x,y) \neq (0,0)$, $g(0,0) = 0$.

Opgave 2.3 Bereken de partiële afgeleiden van de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = (\sin(x^2+y^2), \sqrt{x^2+y^2}, e^{xy}).$$

Opgave 2.4 Bepaal de volgende partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y)^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}\log(1+x^2y^2), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y^2}\cos(xy^2) - x^3\right).$$

Bepaal voor $f(x,y) = \log(1+x^2y^2)$ de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Opgave 2.5 Gegeven is een veelterm $p(x,y)$ in twee variabelen, en een twee keer differentieerbare functie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Toon aan dat

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(p(x,y)) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(p(x,y)).$$

Waarschuwing: we hebben niet verondersteld dat de tweede orde afgeleide f'' van f continu is.

Opgave 2.6 Zij $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ partieel differentieerbaar en zij $\operatorname{grad} f(x) = 0$ voor iedere $x \in \mathrm{R}^n$. Bewijs dat f constant is.

Opgave 2.7 $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ is gedefinieerd door $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$.

(a) Bereken alle stationaire punten van f.

(b) Onderzoek in alle stationaire punten of f een lokaal maximum, een lokaal minimum of geen van beide heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau van f en gebruik de maximum-minimum stelling.

Opgave 2.8 De functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ is gedefinieerd door $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.

(a) Bewijs dat f vier stationaire punten heeft.

(b) Bewijs dat f in precies één van deze punten een extremum heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau en gebruik de maximum-minimum stelling.

Opgave 2.9 De functie $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ (met $n \geq 2$) is gedefinieerd door $f(x) = \langle x, x \rangle^2 - \langle a, x \rangle^2$, waarin a een vaste vector in $\mathrm{R}^n \setminus \{0\}$ is.

(a) Bewijs dat

$$f^{-1}(\,]-\infty, 0[\,) \subset B(0; ||a||).$$

(b) Bewijs dat $(\operatorname{grad} f)(x) = 4\langle x, x \rangle x - 2\langle a, x \rangle a$.

(c) Bewijs dat f twee lokale minima heeft en bereken deze. Aanwijzing: gebruik de maximum-minimum stelling op $\bar{B}(0; ||a||) := \{x \in \mathrm{R}^n \mid ||x|| \leq ||a||\}$ en merk op dat $f(-x) = f(x)$.

(d) Geef met behulp van een tekening voor het geval $n = 2$ de tekenverdeling van de functie f.

Opgave 2.10 Beschouw de veeltermfunctie

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x + xy^2$$

van twee variabelen. Bereken de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$, en bepaal de kritieke punten. Onderzoek of f zijn maximum en/of minimum aanneemt op het rechter halfvlak

$$V_+ = \{(x, y) \mid x \geq 0\},$$

respectievelijk op het linker halfvlak

$$V_- = \{(x, y) \mid x \leq 0\}.$$

Is dit zo, bepaal dan ook het maximum, resp. minimum. Beantwoord tenslotte dezelfde vragen met $f(x, y)$ vervangen door $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x - xy^2$.

Opgave 2.11 Onder een vectorveld op een open deel $U \subset \mathrm{R}^n$ verstaan we een afbeelding $v : U \to \mathrm{R}^n$. De naam vectorveld is afkomstig van het feit dat aan ieder punt van $x \in U$ een vector $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ toegevoegd wordt. In toepassingen stelt men zich vaak voor dat de vector $v(x)$ *aangrijpt* in het punt x : aldus wordt een 'veld' van vectoren op U gedefinieerd (denk bijvoorbeeld aan krachtvelden in de natuurkunde). Het vectorveld v heet C^k als iedere component v_j tot $C^k(U)$ behoort. Is $f \in C^2(U)$, dan is $\operatorname{grad} f$ een C^1–vectorveld op U.

(a) Toon aan: als het C^1–vectorveld $v : U \to \mathrm{R}^n$ de gradient van een C^2–functie is, dan moet gelden:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Zij nu $n = 3$. Voor een C^1-vectorveld v op U definiëren we de rotatie van v als het vectorveld $\operatorname{rot} v$ gegeven door

$$\operatorname{rot} v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

(in de Engelstalige literatuur gebruikt men de notatie $\operatorname{curl} f$ i.p.v. $\operatorname{rot} f$). Voorts wordt de divergentie van v gedefinieerd als de functie $\operatorname{div} v : U \to \mathrm{R}$ gegeven door:

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

(b) Laat zien dat voor $f \in C^2(U)$ geldt: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$.

(c) Laat zien dat voor elk C^2–vectorveld v op U geldt: $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$.

Men kan de definities van $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}$ en div onthouden door gebruik te maken van de formele notaties:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

(spreek uit: nabla) en:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \operatorname{rot} v = \nabla \times v, \quad \operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \langle \nabla, v \rangle.$$

De hierboven gedefinieerde differentiaaloperatoren spelen een belangrijke rol in de Maxwell theorie. Ze zijn verbonden door de belangrijke integraalstellingen van Gauss, Green en Stokes, die later in dit college (of in het college Infinitesimaalrekening B) zullen worden bestudeerd.

Opgave 2.12 Veronderstel dat f en g differentieerbare functies $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ zijn. Bewijs de volgende rekenregels voor de gradiënt:

(a) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

(b) $\operatorname{grad}(f^n) = n f^{n-1} \operatorname{grad} f$.

(c) $\operatorname{grad}(\frac{1}{f}) = -\frac{1}{f^2} \operatorname{grad} f$, voor die punten van R^n waarin f ongelijk nul is.

Hoofdstuk 3

Opgave 3.1 Bewijs zorgvuldig uitgaande van de definitie van $\mathcal{O}$:

$$x^2 + x = \mathcal{O}(x^2) \quad (x \to \infty)$$
$$x^2 + x = \mathcal{O}(|x|) \quad (x \to 0)$$
$$x^2 + x = \mathcal{O}(1) \quad (x \to 9)$$

Opgave 3.2 Waar of onwaar? Geef argumenten.

$$\begin{aligned} x &= o\left(\sqrt{x}\right) && (x \to \infty) \\ x &= o\left(\sqrt{x}\right) && (x \downarrow 0) \\ x \log x &= o\left(x\right) && (x \downarrow 0) \\ x \log x &= o\left(x \log x\right) && (x \downarrow 0) \end{aligned}$$

Opgave 3.3 Gegeven is een tweetal veeltermfuncties $p, q : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Toon aan: als de graad van p strikt kleiner is dan die van q, dan geldt:

$$p(x) = o(|q(x)|) \qquad (x \to \infty).$$

Opgave 3.4 Van een veeltermfunctie $p : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ van graad ten hoogste n is gegeven dat $p(x) = o(|x|^n)$ $(x \to 0)$. Toon aan dat p de nulveelterm is.

Opgave 3.5 Van een functie $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ is gegeven dat $f(x) = o(\|x\|)$ $(x \to 0)$. Toon aan dat f partieel differentieerbaar is in 0, en bepaal $\operatorname{grad} f(0)$.

Opgave 3.6 Zij $f : \mathrm{R}^n$ æ R, a een inwendig punt van $\mathrm{dom}(f)$ en laat alle partiële afgeleiden van f in een omgeving van a bestaan en in die omgeving begrensd zijn.

(a) Bewijs dat f continu is in a.

(b) Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ die in $(0, 0)$ niet continu is, maar wel de eigenschap heeft dat alle partiële afgeleiden in een omgeving van $(0, 0)$ bestaan.

Opgave 3.7 De functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ wordt gedefinieerd door: $f(x,y) = xy^3 + e^{xy}$. Laat zien dat f in het punt $(1,1)$ richtingsdifferentieerbaar is in iedere richting $v \in \mathrm{R}^2$. Geef een formule voor $D_v f(1,1)$.

Opgave 3.8 We definiëren de functie $\varphi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ door $\varphi(x,y) = xy$. Laten $f, g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ differentieerbare functies zijn. Gebruik de kettingregel voor differentiëren langs een kromme om

$$\frac{d}{dt}\varphi(f(t), g(t))$$

uit te drukken in f, g en hun afgeleiden f', g'. Kunt u het gevonden resultaat ook op een andere manier begrijpen? Formuleer en bewijs een produktregel voor differentiatie van een produkt van n functies $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$.

Opgave 3.9 Laat $f \in C^1(\mathrm{R}^n \setminus \{0\})$ zijn en $m \in \mathrm{R}$. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

(a) $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = mf(x)$ voor alle $x \in \mathrm{R}^n \setminus \{0\}$.
(b) $f(tx) = t^m f(x)$ voor alle $x \in \mathrm{R}^n \setminus \{0\}$ en $t > 0$.

Hint: Onderzoek de afgeleide naar t van de functie:

$$t^{-m} f(tx) = t^{-m} f(tx_1, \ldots, tx_n).$$

De functie heet *positief homogeen van de graad* m als zij aan (b) voldoet. De vergelijking in (a) heet de *differentiaalvergelijking van Euler.* Bewijs in het geval $n = 1$, dat f op $[0, \infty[$ op een constante factor na is vastgelegd door (a). Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat iets soortgelijks niet geldt zodra $n > 1$.

Opgave 3.10 Zij

$$r = r(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

de afstand van het punt (x,y) in het vlak tot de oorsprong en zij

$$f(x,y) = \varphi(r(x,y))$$

een reëelwaardige functie op $\mathrm{R}^2 \setminus \{0\}$, waarin $\varphi :]0, \infty[\to \mathrm{R}$ een nader te bepalen tweemaal differentieerbare functie is. Bepaal de functies φ, waarvoor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

op $\mathrm{R}^2 \setminus \{0\}$. Hint: herken een Euler differentiaalvergelijking voor de functie $\psi(r) = \varphi'(r)$.

Opgave 3.11 Bepaal het raakvlak in het punt $(a, f(a))$ van de grafiek van de functie $f : \mathrm{R}^2$ æ R in de volgende gevallen.

(a) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2, \quad a = (1, 0),$
(b) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2, \quad a = (0, 1),$
(c) $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 + y^2}, \quad a = (1, 1).$

Opgave 3.12 Gegeven zijn de functies $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2$ en $g : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door:

$$f(t) = (t, \cos t), \qquad g(x, y) = e^x \cos y.$$

Bereken de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren:

(a) Door een formule voor $g \circ f$ te bepalen en die te differentiëren.
(b) Door de kettingregel toe te passen.

Opgave 3.13 Gegeven zijn de functies $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^3$ en $g : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door:

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad g(x, y, z) = (x + y)^2 - z^2.$$

Bereken de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren:

(a) Door een formule voor $g \circ f$ te bepalen en die te differentiëren.
(b) Door de kettingregel toe te passen.

Opgave 3.14

(a) Gegeven zijn differentieerbare functies $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ en $g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$. Bewijs dat $\mathrm{grad}\,(f \circ g) = (f' \circ g)\mathrm{grad}\, g$.
(b) Gegeven zijn een differentieerbare functie $g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ en een C^1-functie $f : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}$. Bewijs dat de i-de component van $\mathrm{grad}\,(f \circ g)$ gelijk is aan

$$\langle\, (\mathrm{grad}\, f) \circ g, \frac{\partial g}{\partial x_i}\,\rangle.$$

Opgave 3.15 Gegeven zijn een C^1-functie $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, en een drietal punten $a, b, v \in \mathrm{R}^n$.

(a) Druk de afgeleide van de functie $t \mapsto f(a + tv)$ uit in de partiële afgeleiden van de functie f.
(b) We definiëren $L(a, b)$ als het lijnstuk in R^n met beginpunt a en eindpunt b. Toon aan dat er een $c \in L(a, b)$ bestaat zo dat

$$f(b) - f(a) = \langle\, \mathrm{grad}\, f(c), b - a\,\rangle$$

Hint: gebruik het vorige onderdeel met $v = b - a$.

(c) Toon aan dat

$$|f(b) - f(a)| \leq \max_{x \in L(a,b)} ||\mathrm{grad}\, f(x)||\, ||b - a||.$$

(d) Veronderstel nu dat $x \mapsto ||\mathrm{grad}\, f(x)||$ begrensd is op R^n. Toon aan dat de functie f uniform continu is op R^n.

Opgave 3.16 We beschouwen de functie $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathrm{R}$, gegeven door $f(x,y) = x^2 + y$. In Opgave 1.42 werd reeds gevraagd een aantal niveaulijnen van f te schetsen. Bepaal nu grad f, en maak een schets van dit vectorveld.

Opgave 3.17 Zij $U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 25\}$. Beantwoord de vragen uit de vorige opgave voor de functie $g : U \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door: $g(x,y) = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$ (zie ook Opgave 1.43).

Opgave 3.18 We beschouwen de functie $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2$.

(a) Schets de niveauverzameling N van f voor het niveau 6.

(b) Bepaal grad $f(1,1,1)$.

(c) Aan de in (a) gemaakte schets zien we dat N in $(1,1,1)$ een raakvlak behoort te hebben. Gebruik onderdeel (b) om een vergelijking voor dit raakvlak op te stellen.

Opgave 3.19 Bereken het raakvlak in $(2,1,1)$ aan de ellipsoïde $E \subset \mathrm{R}^3$ gegeven door de vergelijking:

$$E : \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$$

op twee manieren:

(a) Door gebruik te maken van Lemma 3.4.4.

(b) Door E in de buurt van $(2,1,1)$ te beschrijven als grafiek van een functie en de techniek van Voorbeeld 3.2.4 te gebruiken.

Opgave 3.20 Van $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ is gegeven dat

$$(\mathrm{grad}\, f)(x,y) = (ye^x, e^x - \frac{1}{1+y^2}).$$

Bereken alle f die hieraan voldoen.

Hoofdstuk 4

Opgave 4.1

(a) Bewijs, zonder Stelling 4.2.6 te gebruiken, dat de afbeelding $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$, gedefinieerd door $f(x,y) = (x+y, x^2+y^2, xy)$, in ieder punt van R^2 totaal differentieerbaar is en bereken de afgeleide, dat wil zeggen geef voor ieder punt $(a,b) \in \mathrm{R}^2$ de afbeelding $(h,k) \mapsto Df(a,b)(h,k)$ aan.

(b) Overeenkomstige vragen voor $g : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $g(x,y,z) = xyz + xy + x$.

(c) Idem voor $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door $\varphi(x) = (1, x, x^2)$.

Opgave 4.2 Gegeven zijn twee vaste vectoren b en c in R^n. Bewijs, zonder gebruik te maken van coördinaten, dat elk der onderstaande afbeeldingen in ieder punt van R^n totaal differentieerbaar is en bereken zijn afgeleide, dat wil zeggen geef in ieder punt $a \in \mathrm{R}^n$ de afbeelding $h \mapsto Df(a)(h)$ aan.

(a) $f(x) = \langle b, x \rangle$,

(b) $f(x) = \langle b, x \rangle \langle c, x \rangle$,

(c) $f(x) = \langle x, x \rangle$,

(d) $f(x) = \langle b, x \rangle b$,

(e) $f(x) = \langle x, x \rangle x$.

Opgave 4.3 De functie $f : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y,z,t) = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}.$$

Bewijs, zonder Stelling 4.2.6 te gebruiken, dat f totaal differentieerbaar is en bereken de afgeleide.

Opgave 4.4 Onderzoek welke van de functies in de Opgaven 2.1 en 2.2 totaal differentieerbaar zijn in $(0,0)$.

Opgave 4.5 Veronderstel dat f en g twee totaal differentieerbare functies $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ zijn.

(a) Bewijs dat ook fg totaal differentieerbaar is en dat geldt:

$$D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a).$$

Zij $U = \{p \in \mathrm{R}^n \mid f(p) \neq 0\}$.

(b) Toon aan dat U open is.

(c) Toon aan dat de functie $h : U \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ differentieerbaar is in ieder punt $p \in U$. Geef een formule voor de afgeleide.

Aanwijzing: pas de kettingregel toe op $h = i \circ f$, waarbij $i : \mathrm{R} \setminus \{0\} \to \mathrm{R}$ gedefinieerd is door $i(t) = \frac{1}{t}$.

Opgave 4.6 Gegeven is dat $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ en $g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ totaal differentieerbare functies zijn. Bewijs dat $F : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, gedefinieerd door $F(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, een totaal differentieerbare functie is en bewijs dat de totale afgeleide DF gegeven wordt door de formule:

$$DF(x)(h) = \langle f(x), Dg(x)(h) \rangle + \langle Df(x)h, g(x) \rangle \qquad (h \in \mathrm{R}^n).$$

Opgave 4.7

(a) Zij $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ differentieerbaar en zij $Df(x) = 0$ voor iedere $x \in \mathrm{R}^n$. Bewijs dat f constant is. Aanwijzing: het resultaat is bekend voor het 1-dimensionale geval. Gebruik nu richtingsafgeleiden.

(b) Zij $F : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ differentieerbaar en zij $DF(x) = 0$ voor iedere $x \in \mathrm{R}^n$. Bewijs dat F constant is.

Opgave 4.8 Zij $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ een differentieerbare functie, $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ een lineaire afbeelding, en veronderstel dat $Df(x) = L$ voor iedere $x \in \mathrm{R}^n$. Bewijs dat er een $c \in \mathrm{R}^p$ is zo dat $f(x) = L(x) + c$ voor iedere $x \in \mathrm{R}^n$.
Aanwijzing: bekijk $f - L$.

Opgave 4.9 Van $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ is de Jacobimatrix gegeven door

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2e^x & 2ye^x \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

Bereken f als ook nog gegeven is dat $f(0,1) = (1,0)$.

Opgave 4.10 De afbeeldingen $g : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ en $h : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$g(x, y, z) = (xz, \log(y^2 + e^z)), \quad h(x, y) = (x + y, xy).$$

Bereken de Jacobimatrix van $h \circ g$ op twee manieren:

(a) rechtstreeks, dat wil zeggen door $h \circ g$ te berekenen en de definitie van de Jacobimatrix te gebruiken;

(b) met behulp van de kettingregel.

Opgave 4.11 De afbeeldingen $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ en $g : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$f(x, y) = (x^2, y, xy), \quad g(x, y, z) = (xyz, z \sin(xy)).$$

Bereken de Jacobimatrices van $f \circ g$ en $g \circ f$.

Opgave 4.12 Gegeven zijn differentieerbare afbeeldingen $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ en $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$. Noem de componenten van g respectievelijk $g_1, \ldots, g_n$. Geef de Jacobimatrices van $f \circ g$ en $g \circ f$ in termen van de partiële afgeleiden van f en de afgeleiden van de g_j.

Opgave 4.13 Gegeven is een differentieerbare functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$. De variabelen geven we aan door u en v. We definiëren $F : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ door $F(x, y) = f(x + y, x - y)$.
Geef een formule die $\partial F/\partial x + \partial F/\partial y$ uitdrukt in $\partial f/\partial u$ en $\partial f/\partial v$.

Opgave 4.14 We beschouwen een differentieerbare functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$; de variabelen in f worden genoteerd met (x, y). De functie $g : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ is gedefinieerd door $g(\rho, \phi) = f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$.

(a) Geef een formule die de partiële afgeleiden van g uitdrukt in ρ, ϕ en de partiële afgeleiden van f.

(b) Geef een formule die $\partial f/\partial x(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ en $\partial f/\partial y(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$ uitdrukt in ρ, ϕ en de partiële afgeleiden van g.

(c) Geef een formule die

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$$

uitdrukt in ρ, ϕ en de (eventueel hogere orde) partiële afgeleiden van g.

Opgave 4.15 De functie $F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ is gedefinieerd door

$$F(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta).$$

Bereken de Jacobimatrix van F. In welke punten is de determinant van deze matrix gelijk aan 0?

Opgave 4.16 $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ is een differentieerbare functie.

(a) De functie $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ is gedefinieerd door $g(t) = f(tx)$, met $x \in \mathrm{R}^n$ vast gekozen. Bewijs dat $g'(t) = Df(tx)(x)$.

(b) Veronderstel nu dat f homogeen is van de graad m, dat wil zeggen dat voor iedere $x \in \mathrm{R}^n$ en iedere $t > 0$ geldt $f(tx) = t^m f(x)$. Bewijs dat $Df(x)(x) = mf(x)$ voor iedere $x \in \mathrm{R}^n$.

(c) Veronderstel nu dat $Df(x)(x) = mf(x)$ voor iedere $x \in \mathrm{R}^n$. Bewijs dat f homogeen is van de graad m. Aanwijzing: neem g als in onderdeel (a) en bereken de afgeleide van $t \mapsto \frac{g(t)}{t^m}, \quad t \in]0, \infty[$.

Opgave 4.17 Zij L een bijectieve lineaire afbeelding van R^n naar zichzelf. Bewijs dat er een $c > 0$ bestaat zo dat voor alle $h \in \mathrm{R}^n$ geldt $||L(h)|| \geq c||h||$. Aanwijzing: schrijf $h = L^{-1}(L(h))$ en gebruik Lemma 4.3.1.

Opgave 4.18 Zij $U \subset \mathrm{R}^n$ een open deel, en $f : U \to \mathrm{R}^n$ een functie. Zij $a \in U$ en veronderstel dat f differentieerbaar in a is en dat $Df(a)$ bijectief is. Bewijs dat er een $\delta > 0$ en een $M > 0$ bestaan zo dat voor alle h met $||h|| < \delta$ geldt:

$$||f(a+h) - f(a)|| \geq M||h||.$$

Aanwijzing: gebruik Opgave 4.17.

Opgave 4.19 Laten V en W deelverzamelingen van R^n zijn en $f : V \to W$ een bijectieve afbeelding met inverse afbeelding g. Zij a een inwendig punt van V en veronderstel dat voldaan is aan de volgende voorwaarden:

(a) de afbeelding f is differentieerbaar in a en $Df(a)$ is bijectief,

(b) $f(a)$ is inwendig punt van W en g is continu in $f(a)$.

Bewijs dat g differentieerbaar is in $f(a)$ en dat $Dg(f(a)) = Df(a)^{-1}$.
Aanwijzing: gebruik Opgave 4.18 bij het schatten van $g(f(a) + k) - g(f(a)) - Df(a)^{-1}(k)$.

Opgave 4.20 Laten V en W open deelverzamelingen van R^n zijn. Zij $f : V \to W$ bijectief en differentieerbaar en zij $f^{-1} : W \to V$ differentieerbaar. Bewijs dat voor iedere $a \in V$ de afgeleide $Df(a)$ bijectief is en dat $Df(a)^{-1} = D(f^{-1})(f(a))$.

Opgave 4.21 Bewijs dat Stelling 3.2.1 (en dus ook Stelling 4.2.6) nog juist is onder de zwakkere veronderstelling dat slechts $n - 1$ partiële afgeleiden van f in een omgeving van a bestaan en in a continu zijn en van de resterende partiële afgeleide alleen verondersteld wordt dat hij in a bestaat. Aanwijzing: gebruik hetzelfde idee als in het bewijs van Stelling 3.2.1 en schrijf

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \\ &= \sum_{j=2}^{n} (f(a+h^{(j)}) - f(a+h^{(j-1)})) + f(a+h^{(1)}) - f(a). \end{aligned}$$

Pas nu op $\sum_{j=2}^{n}$ de methode van het bewijs van Stelling 3.2.1 toe en op de resterende term de definitie van afgeleide. (We veronderstellen dus dat de partiële afgeleide $\partial f / \partial x_1$ de uitzonderingsrol vervult; wat verandert er in het bewijs als een andere partiële afgeleide dit doet?)

Opgave 4.22 We beschouwen de functie $\varphi : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

(a) Toon aan dat φ differentieerbaar is, en bepaal de afgeleide φ'.

(b) Toon aan dat er geen $\tau \in [0,\pi]$ bestaat zo dat

$$\varphi(\pi) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)\pi.$$

Het analogon van de middelwaardestelling geldt dus in het algemeen niet voor vectorwaardige functies (vergelijk ook met Opgave 3.15). Uit de twee onderstaande opgaven zal blijken dat het analogon van de 'middelwaardeschatting' wel geldt voor vectorwaardige functies.

(c) Toon aan dat er wel een $\tau \in [0,\pi]$ bestaat zo dat

$$||\varphi(\pi) - \varphi(0)|| \leq ||\varphi'(\tau)||\pi.$$

Opgave 4.23 Voor een lineaire afbeelding $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ definiëren we

$$||L|| = \Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} L_{ij}^2\Big)^{1/2},$$

waarin L_{ij} staat voor het element in de i-de rij en de j-de kolom van de matrix van L ten aanzien van de standaardbases.

(a) Toon aan dat voor iedere $1 \leq i \leq p$ en elke $h \in \mathrm{R}^n$ geldt:

$$[(Lh)_i]^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij}^2\right) ||h||^2.$$

Aanwijzing: gebruik de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz voor het standaardinprodukt in R^n.

(b) Toon aan dat voor elke $h \in \mathrm{R}^n$ geldt:

$$||Lh|| \leq ||L||||h||.$$

Opgave 4.24 We beschouwen een open verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$ die *convex* is: d.w.z. voor elk tweetal punten $a, b \in U$ behoort het lijnstuk $L(a,b)$ met eindpunten a en b weer tot U. Laat voorts $f : U \to \mathrm{R}^p$ een differentieerbare functie zijn.

(a) Toon aan: als $a, b \in U$, dan geldt voor $0 \leq t \leq 1$ dat:

$$\frac{d}{dt} f(a + t(b-a)) = Df(a + t(b-a))(b-a).$$

(b) Toon aan: als $a, b \in U$, dan bestaat er voor elke $v \in \mathrm{R}^p$ een $c \in L(a,b)$ zo dat:

$$\langle f(b) - f(a), v \rangle = \langle Df(c)(b-a), v \rangle.$$

Hint: beschouw de functie $g : \mathrm{R}$ æ R gedefinieerd door $g(t) = \langle f(a + t(b-a)), v \rangle$.

We veronderstellen nu dat f een C^1-functie is.

(c) Toon aan: de functie $x \mapsto ||Df(x)||$, $U \to \mathrm{R}$ is continu.

(d) Toon aan: als $w \in \mathrm{R}^p$ en $|\langle\, w, v\,\rangle| \leq C||v||$ voor alle $v \in \mathrm{R}^p$, dan $||w|| \leq C$.

(e) Toon aan: als $a, b \in U$, dan geldt:

$$||f(b) - f(a)|| \leq \max_{c \in L(a,b)} ||Df(c)||||b - a||.$$

(Waarom bestaat het maximum?)

Opgave 4.25 We beschouwen de lineaire ruimte $\mathcal{L} = L(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^p)$ van lineaire afbeeldingen $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$. Als $L \in \mathcal{L}$ dan schrijven we L_{ij} voor het element op de i-de rij en j-de kolom van de matrix van L ten aanzien van de standaardbases.

(a) Toon aan dat door

$$\varphi : L \mapsto (L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1n}, L_{21}, \ldots, L_{2n}, \ldots, L_{p1}, \ldots, L_{pn})$$

een lineaire bijectie $\mathcal{L} \to \mathrm{R}^{np}$ gedefinieerd wordt.

Via de bijectie φ zullen we in het vervolg $\mathcal{L}$ identificeren met R^{np}. In het bijzonder verkrijgen we zo een norm $|| \cdot ||$ op $\mathcal{L}$: als $L \in \mathcal{L}$, dan is $||L|| := ||\varphi(L)||$. Merk op dat deze norm overeenkomt met die in Opgave 4.23.

(b) Zij $U \subset \mathrm{R}^n$ een open deelverzameling, en $f : U \to \mathrm{R}^p$ een functie. Toon aan dat f een C^1-functie is dan en slechts dan als f differentieerbaar is op U met een afgeleide Df die continu is als afbeelding $U \to \mathcal{L}$.

Opgave 4.26 Notaties als in Opgave 4.25; we veronderstellen voorts dat $p = n$.

(a) Toon aan dat de verzameling $U = \{L \in \mathcal{L} \mid \det L \neq 0\}$ open is.

(b) Toon aan dat de afbeelding $S : U \to \mathcal{L}$, $L \mapsto L^{-1}$ differentieerbaar is (en dus ook continu). Hint: gebruik de regel van Cramer en observeer dat de coördinaten van L^{-1} (gedefinieerd via φ) rationale functies zijn in de coördinaten van L.

Definieer de functie $\rho : \mathcal{L}$ æ $\mathcal{L}$ door:

$$\rho(H) = S(I + H) - S(I) + H = (I + H)^{-1} - I + H.$$

(d) Toon aan dat $(I + H)\rho(H) = H^2$.

(e) Toon aan dat $\rho(H) = o(||H||)$ $(H \to 0)$.

(f) Toon aan dat de afgeleide van S in I gegeven wordt door: $DS(I) : H \mapsto -H$.

Hoofdstuk 5

Opgave 5.1 Zij $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathrm{R}$ een begrensde functie die continu is op $]a,b] \times [c,d]$. Bewijs dat voor iedere $y \in [c,d]$ de integraal $\int_a^b f(x,y)\,dx$ bestaat en dat $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,dx$ continu is op $[c,d]$.

Opgave 5.2

(a) Bereken $\int_0^A \frac{dx}{(x^2+t)^2}$ voor $t > 0$.
Aanwijzing: differentieer de functie $F :]0,\infty[\to \mathrm{R}$, gedefinieerd door $F(t) = \int_0^A \frac{dx}{x^2+t}$.

(b) Bereken de integraal:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Opgave 5.3 Definieer $f : \mathbf{R} \to \mathrm{R}$ door:

$$f(a) = \int_0^1 \frac{e^{-a^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

(a) Bewijs m.b.v. een substitutie van variabelen dat geldt:

$$f'(a) = -2e^{-a^2} \int_0^a e^{-x^2}\,dx \quad (a \in \mathbf{R}).$$

Definieer $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ door:

$$g(a) = f(a) + \left(\int_0^a e^{-x^2}\,dx \right)^2.$$

(b) Bewijs dat $g' = 0$ op R; en concludeer dat $g(a) = \frac{\pi}{4}$, voor alle $a \in \mathrm{R}$.

(c) Bewijs dat $0 \le f(a) \le e^{-a^2}$, voor alle $a \in \mathrm{R}$; toon vervolgens aan dat geldt:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Opgave 5.4 Bereken

$$\int_0^{\pi/2} \log(1 + t\cos^2 x)\,dx$$

voor $t > -1$.
Aanwijzing: definieer $F(t) = \int_0^{\pi/2} \log(1 + t\cos^2 x)\,dx$ $(t > -1)$ en bereken $F'(t)$.

Opgave 5.5 Zij $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ continu. Veronderstel dat $x \mapsto f(x, y)$, $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ differentieerbaar is voor elke $y \in \mathrm{R}$ en dat $\partial f/\partial x : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ continu is. Zij

$$F(x) = \int_a^x f(x, y)\, dy.$$

(a) Bewijs dat F continu differentieerbaar is en dat

$$F'(x) = f(x, x) + \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Aanwijzing: de variabele x komt op twee plaatsen voor: in de integrand, en als bovengrens van de integraal. Aan het voorgegeven antwoord ziet u dat $F'(x)$ gevonden wordt als som van de afgeleiden naar elk van die x-en afzonderlijk. Schrijf, om de juistheid hiervan te bewijzen, $F = H \circ K$, waarin $H(t, s) = \int_a^t f(s, y)\, dy$ en $K(x) = (x, x)$ en pas de kettingregel toe.

(b) Bewijs dat

$$\int_a^c f(c, y)\, dy = \int_a^c f(x, x)\, dx + \int_a^c \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy\, dx.$$

Opgave 5.6 Zij $f(x, y) = e^{-xy} y$. Bewijs dat f continu is op R^2, dat voor iedere $y \geq 0$ de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty e^{-xy} y\, dx$$

bestaat, maar dat de functie

$$y \mapsto \int_0^\infty e^{-xy} y\, dx, \quad \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$

niet continu is.
Stelling 5.1.3 is dus niet zonder meer goed voor oneigenlijke integralen.

Hoofdstuk 6

Opgave 6.1

(a) Toon aan dat de functie $(x,y) \mapsto y/(x^2+y^2)$ continu is op $[0,1] \times [1,2]$.

(b) Controleer d.m.v. een direkte berekening dat

$$\int_1^2 \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^2+y^2}\,dy\,dx.$$

Opgave 6.2 Gegeven zijn $a, b, c, d \in \mathrm{R}$ met $0 \le a < b$ en $0 < c < d$.

(a) Toon aan dat de functie $f : (x,y) \mapsto 1/(x+y)$ continu is op $[a,b] \times [c,d]$.

(b) Controleer d.m.v. een rechtstreekse berekening dat

$$\int_a^b \int_c^d \frac{1}{x+y}\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b \frac{1}{x+y}\,dx\,dy.$$

Opgave 6.3 (Vectorwaardige integralen) Zij $I = [a,b]$ een gesloten en begrensd interval, en $f = (f_1, \ldots, f_p)$ een begrensde vectorwaardige functie $I \to \mathrm{R}^p$. We schrijven $\|f\|$ voor de functie $I \to \mathrm{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$.

De functie f heet Riemann-integreerbaar als iedere component f_j $(1 \le j \le p)$ Riemann-integreerbaar is. Is dit het geval dan definiëren we de bijbehorende integraal als de volgende vector in R^p :

$$\int_a^b f(x)\,dx := \left(\int_a^b f_1(x)\,dx, \ldots, \int_a^b f_p(x)\,dx \right).$$

(a) Toon aan: als f Riemann-integreerbaar is, dan is $\|f\|$ dat ook. Aanwijzing: gebruik Propositie A.10.6.3 uit Analyse A, die hieronder herhaald wordt.

In het vervolg veronderstellen we dat f Riemann-integreerbaar is.

(b) Toon aan: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een verdeling V van I zo dat:

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx - S(f, V, \Xi) \right\| < \varepsilon$$

voor elke keuze van strooipunten bij V. Hierbij is de (vectorwaardige) Riemann-som $S(f, V, \Xi) \in \mathrm{R}^p$ (met $V = (x_i)_{0 \le i \le m}$, $\Xi = (\xi_j)_{1 \le i \le m}$) gedefinieerd door:

$$S(f, V, \Xi) = \sum_{i=1}^{p} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

Hint: merk op dat $S(f, V, \Xi)_j = S(f_j, V, \Xi)$.

(c) Toon aan dat voor elke verdeling V van I en elke keuze Ξ van strooipunten bij V geldt:

$$||S(f,V,\Xi)|| \le S(||f||,V,\Xi).$$

(d) Toon aan dat de volgende 'driehoeksongelijkheid' voor vectorwaardige integralen geldt:

$$|| \int_a^b f(x)\, dx|| \le \int_a^b ||f(x)||\, dx.$$

Propositie A.10.6.3 *Stel $f, g : [a,b] \to \mathrm{R}$ zijn Riemann-integreerbare functies. Dan geldt:*

(a) *De produktfunctie fg is Riemann-integreerbaar over $[a,b]$.*
(b) *De functie $\min(f,g)$ is Riemann-integreerbaar over $[a,b]$.*
(c) *Voor iedere continue functie $\phi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ is $\phi \circ f$ Riemann-integreerbaar over $[a,b]$.*
(d) *De functie $|f|$ is Riemann-integreerbaar over $[a,b]$.*

Opgave 6.4 (De oppervlakte van een kromme is nul) We beschouwen een continue functie $\varphi : I = [0,1] \to \mathrm{R}$ met $\varphi(I) \subset J = [c,d]$. Zij $W = (y_j)_{0\le j\le n}$ een verdeling van $[c,d]$; we schrijven $J(j) = [y_{j-1}, y_j]$ voor het j-de deelinterval bij W, en $\mu(W)$ voor de minimale lengte van de deelintervallen $J(j)$.

(a) Toon aan dat er een verdeling $V = (x_i)_{0\le i\le m}$ van $[0,1]$ bestaat zo dat voor elke $1 \le i \le m$ geldt dat $\sup_{I(i)} \varphi - \inf_{I(i)} \varphi < \mu(W)$. Hierbij hebben we geschreven: $I(i) = [x_{i-1}, x_i]$. Hint: gebruik uniforme continuïteit.

Zij $1 \le i \le m$. Merk op dat wegens de tussenwaardestelling voor continue functies geldt dat $\varphi(I(i)) = [\inf_{I(i)} \varphi, \sup_{I(i)} \varphi]$. Het beeld $\varphi(I(i))$ is dus een interval met lengte strikt kleiner dan $\mu(W)$.

(a) Toon aan dat het aantal punten y_j met $y_j \in \varphi(I(i))$ ten hoogste gelijk is aan 1.
(b) Toon aan dat het aantal intervallen $J(j)$ met $J(j) \cap \varphi(I(i)) \ne \emptyset$ ten hoogste gelijk is aan 2.
(c) Beschouw de verzameling T_i van indices j met $\operatorname{graf} \varphi \cap [I(i) \times J(j)] \ne \emptyset$. Toon aan dat $\#T_i \le 2$.
(d) Toon aan dat

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j\in T_i} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \le 2m(W);$$

hierin is $m(W)$ de maas van de verdeling W (zie dictaat). Analyseer de betekenis van deze ongelijkheid ook met behulp van een schets.
(e) Welke 2-dimensionale oppervlakte zou u toe willen kennen aan $\operatorname{graf} \varphi$? Motiveer.

We beschouwen nu de functie $f : I \times J \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = 1$ als $(x,y) \in \operatorname{graf} \varphi$ en $f = 0$ buiten $\operatorname{graf} \varphi$.

(f) Toon aan dat
$$0 = \underline{S}(f,(V,W)) \leq \overline{S}(f,(V,W)) \leq 2m(W).$$

(g) Zou u de functie f Riemann-integreerbaar over $I \times J$ willen noemen? Motiveer.

Opgave 6.5 **(Inhoud vierzijdige piramide)** Bereken de inhoud van de vierzijdige piramide in R^3 met grondvlak $[-1,1]\times[-1,1]\times\{0\}$ en top $(0,0,1)$. Hint: beschouw de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = \min\{1-|x|, 1-|y|\}$.

Opgave 6.6 **(Inhoud driezijdige piramide)** Bereken de inhoud van de verzameling D in R^3 bestaande uit de punten (x,y,z) met:
$$x+y+z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0.$$
Hint: beschouw de dubbele integraal van een geschikte continue functie $f : [0,1]^2 \to \mathrm{R}$.

Opgave 6.7 **(Inhoud kegeltop)** Beschouw de de kegeltop in R^3 beschreven door de ongelijkheden:
$$\|(x,y)\| \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 - \|(x,y)\|.$$
Beschrijf de inhoud van deze kegeltop met behulp van een geschikte dubbele integraal. U hoeft de gevonden integraal niet uit te rekenen: in een later stadium zullen we een methode ontwikkelen die het berekenen van zo'n integraal gemakkelijker maakt.

Opgave 6.8 Geef een meetkundige interpretatie van de integraal
$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx.$$

Hoofdstuk 7

Opgave 7.1 **(Cilindercoördinaten)** Definieer $\Psi : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ door:

$$\Psi(r, \alpha, x_3) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, x_3).$$

(a) Bewijs dat Ψ wel surjectief, maar niet injectief is.

(b) Bepaal alle punten $(r, \alpha, x_3) \in \mathrm{R}^3$ waarvoor $\det D\Psi(r, \alpha, x_3) \neq 0$.

Zij $R > 0$ en $a, b \in \mathrm{R}, a < b$. We beschouwen de *cilinder* C in R^3 bestaande uit de punten $x \in \mathrm{R}^3$ met $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$ en $a \leq x_3 \leq b$.

(c) Bepaal een drie dimensionaal blok $B \subset \mathrm{R}^3$, zo dat $\Psi(B) = C$, en zo dat de beperking $\Psi|_B$ voldoet aan de voorwaarden van de substitutiestelling.

(d) Bepaal het beeld $\Psi(\partial B)$ van de rand $\partial B = \bar{B} \setminus B^{\mathrm{inw}}$ van het blok B.

(e) Merk op dat uit het voorgaande onderdeel volgt dat C Jordan-meetbaar is. Bepaal het volume van C.

Opmerking: Men noemt (r, α, x_3) de *cilindercoördinaten* van $x = \Psi(r, \alpha, x_3)$.

Opgave 7.2 **(Bolcoördinaten)** Definieer $\Psi : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ door:

$$\Psi(r, \alpha, \theta) = r(\cos\alpha\cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta).$$

(a) Toon aan dat:

$$\Psi(r, \alpha, \theta) = r \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal de beelden van de vlakken $r =$ constant, resp. α en $\theta =$ constant, en vervolgens van de lijnen $(\alpha, \theta) =$ constant, resp. (r, θ) en $(r, \alpha) =$ constant.

(c) Bewijs dat Ψ surjectief, maar niet injectief is.

(d) Bewijs:

$$\det D\Psi(r, \alpha, \theta) = r^2 \cos\theta,$$

en bepaal de verzameling van alle punten $(r, \alpha, \theta) \in \mathrm{R}^3$ waarvoor de gevonden Jacobiaan niet gelijk aan 0 is.

Zij $R > 0$. We beschouwen het blok $D = [0, R] \times [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(e) Toon aan dat het beeld $\Psi(D)$ gelijk is aan de gesloten bol $\bar{B}(0;R)$ in R^3 met middelpunt 0 en straal R. Bepaal $\Psi(\partial D)$ (met ∂D de rand van het blok D).

(f) Toon aan dat de bol $\bar{B}(0,R)$ Jordan-meetbaar is, en dat

$$\mathrm{vol}_3(\bar{B}(0;R)) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Opmerking: Men noemt (r,α,θ) de *bolcoördinaten* van $x = \Psi(r,\alpha,x_3)$.

Opgave 7.3 **(Inhoud kegel)** Zij D de gesloten eenheidsschijf in R^2. Zij $K \subset \mathrm{R}^3$ de verzameling bestaande uit de punten $x \in \mathrm{R}^3$ met $(x_1,x_2) \in D$, en $0 \leq x_3 \leq 1 - \|(x_1,x_2)\|$. Bereken het volume van K door een geschikte functie te integreren over D.

Opgave 7.4 Definieer de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ door

$$f(x) = e^{-\|x\|^2}.$$

Voor $R > 0$ definiëren we $V_R := [0,R] \times [0,R]$, en $S_R := \{x \in \mathrm{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0,\ \|x\| \leq R\}$.

(a) Toon aan dat:

$$\int_{V_R} f(x)\,dx = \left(\int_0^R e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

(b) Toon aan dat: $\int_{S_R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})$.

(c) Toon aan dat:

$$\int_{S_R} f(x)\,dx \leq \int_{V_R} f(x)\,dx \leq \int_{S_{R\sqrt{2}}} f(x)\,dx.$$

(d) Toon aan dat:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Opgave 7.5 **(Omwentelingsfiguur)** We beschouwen een 2-dimensionaal blok $B \subset \mathrm{R}^2$ en een C^1-afbeelding $\psi : B \to \mathrm{R}^2$ die voldoet aan de voorwaarden van de substitutiestelling. Voorts veronderstellen we dat $\psi(B^{\mathrm{inw}})$ in het halfvlak $x_2 > 0$ ligt. Merk op dat hieruit volgt dat $A := \psi(B)$ in het halfvlak $x_2 \geq 0$ ligt. (Waarom?)

Voor $\alpha \in \mathrm{R}$ schrijven we:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

voor de rotatie rond de x_1-as over een hoek α.

Zij L de verzameling die ontstaat door $A \times \{0\}$ rond de x_1-as te wentelen, d.w.z. L bestaat uit de punten $R(\alpha)(x_1,x_2,0)$, met $(x_1,x_2) \in A$, $\alpha \in \mathrm{R}$. Doel van deze opgave is het volume van L uit te drukken in een integraal over A.

Definieer de afbeelding $\Psi : B \times [0,2\pi] \to \mathrm{R}^3$ door

$$\Psi(y_1,y_2,\alpha) = R(\alpha)(\psi(y),0) = R(\alpha)(\psi_1(y),\psi_2(y),0).$$

(a) Toon aan dat de Jacobi-matrix van Ψ gegeven wordt door:

$$D\Psi(y,\alpha) = R(\alpha)\begin{pmatrix} D\psi(y) & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \psi_2(y) \end{pmatrix}.$$

(b) Toon aan dat de verzameling L Jordan-meetbaar is, en dat:

$$\mathrm{vol}_3(L) = 2\pi \int_A x_2 \, dx.$$

(c) Kunt u de bovenstaande formule ook langs intuïtieve weg begrijpen?

(d) We beschouwen nu de *torus* T die ontstaat door in het bovenstaande voor A de cirkelschijf met middelpunt $(0,b)$ en straal a te nemen (met $0 < a < b$). Toon aan dat:

$$\mathrm{vol}_3(T) = (2\pi b)\pi a^2.$$

Hint: substitueer geschikte coördinaten in de integraal over A.

(e) Zij nu A_+ de doorsnede van A met het vlakdeel $x_2 \geq b$. Zij T_+ het deel van T dat ontstaat door A_+ rond de x_1-as te wentelen (een ring met 'platte' binnenzijde). Toon aan dat

$$\mathrm{vol}_3(T_+) > \frac{1}{2}\mathrm{vol}_3(T).$$

Opgave 7.6 Zij D de eenheidsschijf in R^2. Bewijs dat $\int_D x_1^2 x_2^2 \, dx = \frac{\pi}{24}$.

Opgave 7.7 Zij B de bol met straal R en middelpunt 0 in R^3. Bereken:

$$\int_B x_1 x_2 x_3 ||x||^2 \, dx.$$

Aanwijzing: begin niet meteen te rekenen.

Opgave 7.8 Zij D de gesloten schijf met middelpunt 0 en straal a. Toon aan:

$$\int_D ||x|| \, dx = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

Opgave 7.9 Stel $0 < a < b$ en zij $S = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid a < ||x|| < b\}$. Bewijs:

$$\int_S ||x||^{-3} dx = 4\pi \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Opgave 7.10 Zij $a, b, c > 0$. Bereken het volume van de ellipsoïde in R^3 bestaande uit de punten x met:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1.$$

Antwoord: $\frac{4}{3}\pi abc$.

Opgave 7.11 Gegeven is een n-dimensionaal blok B en een C^1-afbeelding $\Psi : B \to \mathrm{R}^n$ die injectief en regulier is op B^{inw}. Schrijf $A = \Psi(B)$. Toon aan:

(a) Is $\Phi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ een C^1-afbeelding die injectief en regulier is op A, dan is iedere continue functie $f : \Phi(A) \to \mathrm{R}$ Riemann-integreerbaar over $\Phi(A)$, terwijl:

$$\int_{\Phi(A)} f(x)\, dx = \int_A f(\Phi(y))\, |\det D\Phi(y)|\, dy.$$

(b) Is $T : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ een bijectieve lineaire afbeelding, dan is iedere continue functie $f : T(A) \to \mathrm{R}$ Riemann-integreerbaar over $T(A)$, en er geldt:

$$\int_{T(A)} f(x)\, dx = |\det T| \int_A f(T(y))\, dy.$$

Hoofdstuk 8

Opgave 8.1 Zij $I = [a, b]$ met $a < b$. We beschouwen de kromme $\gamma : I \to \mathrm{R}^3$ gegeven door $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

(a) Maak een schets van het beeld im (γ) van γ.

(b) Bepaal de lengte van γ.

(c) Zij $c \in \mathrm{R}$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathrm{R}^3$. Bepaal de integraal van de functie $f(x) = c + \langle v, x \rangle$ langs γ.

Opgave 8.2 Beschouw de functie $f(x) = [e^x + e^{-x}]/2$. Schets de grafiek van f. Bepaal de lengte van het deel van graf f dat gelegen is tussen de lijnen $x_1 = 0$ en $x_1 = a$ in R^2, voor elke $a \in \mathrm{R}$.

Opgave 8.3 (Invariantie van de lengte onder isometrieën) Gegeven is een C^1-kromme $\gamma : I = [a, b] \to \mathrm{R}^n$.

(a) Zij $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ een orthogonale lineaire afbeelding. We beschouwen de kromme $L \circ \gamma : I \to \mathrm{R}^n$, $t \mapsto L(\gamma(t))$. Toon aan dat $L \circ \gamma$ een C^1-kromme is, en dat $l(L \circ \gamma) = l(\gamma)$.

(b) Zij $p \in \mathrm{R}^n$, en beschouw de translatie $T : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n, x \mapsto x + p$. Toon aan dat $T \circ \gamma$ een C^1-kromme is, en dat $l(T \circ \gamma) = l(\gamma)$.

Opgave 8.4 (Lijnstuk als kortste verbinding) In het vervolg is $I = [0, 1]$.

(a) Toon aan dat voor iedere continue functie $g : I \to \mathrm{R}$ met $g \geq 0$ op I geldt:

$$\int_0^1 g(t)\, dt = 0 \Rightarrow g = 0.$$

Hint: stel dat $g(t_0) \neq 0$. Toon eerst aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $g(t) > \frac{1}{2} g(t_0)$ voor alle $t \in I$ met $|t - t_0| < \delta$.

(b) Toon aan dat voor iedere C^1-functie $h : I \to \mathrm{R}$ geldt:

$$\int_0^1 |h'(t)|\, dt \geq h(1) - h(0).$$

Toon aan dat de bovenstaande formule geldt met $=$ i.p.v. $\leq$ dan en slechts dan als $h' \geq 0$ op I.

In het vervolg beschouwen we een C^1-kromme $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$.

(c) Zij $d > 0$. Toon aan: als $\gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = (d, 0, \ldots, 0)$, dan is de lengte $l(\gamma)$ van γ minstens d. Toon verder aan: als $l(\gamma) = d$ dan is er een monotoon stijgende C^1-functie $k : I \to \mathrm{R}$ zo dat $\gamma(t) = (k(t), 0, \ldots, 0)$ voor alle $t \in I$.
Hint: vergelijk $\|\gamma'(t)\|$ met $|\gamma_1'(t)|$, en gebruik de voorgaande onderdelen.

(d) Toon aan dat $l(\gamma) \geq \|\gamma(1) - \gamma(0)\|$. Hint: gebruik Opgave 8.3.

(e) Zij p, q een tweetal verschillende punten in R^n. Toon aan dat voor elke C^1-kromme γ : $[0, 1] \to \mathrm{R}$ met beginpunt p en eindpunt q geldt:

$$l(\gamma) \geq \|q - p\|.$$

Toon aan dat gelijkheid geldt dan en slechts dan als er een monotoon stijgende C^1-functie $\varphi : I \to I$ bestaat zo dat $\gamma(t) = p + \varphi(t)(q - p)$ voor alle $t \in I$. Toon aan dat in dat geval $\mathrm{im}\,(\gamma)$ het lijnstuk is dat p en q verbindt.

Opgave 8.5 Gegeven is een niet-lege samenhangende open deelverzameling U van R.

(a) Toon aan: als $a, b \in U$, en $a < b$, dan is $[a, b] \subset U$. Hint: gebruik een geschikte stelling.

(b) Toon aan dat U een open interval is.

Opgave 8.6 Bepaal een C^1-kromme $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{R}^2$ met beginpunt $(1, 1)$ en eindpunt 0, die $[0, 1]$ bijectief afbeeldt op de verzameling:

$$P = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

Bereken de integraal van het vectorveld $F(x, y) = (x, y)$ langs γ.

Opgave 8.7 Beschouw de kromme $\gamma : [0, \frac{1}{2}] \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door

$$\gamma(t) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos \pi t, \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos \pi t, \sin \pi t).$$

Toon aan dat γ een C^1-kromme is. Schets de verzameling $\mathrm{im}\,\gamma$ (hint: denk aan bolcoördinaten). Bepaal de integraal van het vectorveld $F(x) = (-x_2, x_1, x_3)$ langs γ.

Opgave 8.8 Gegeven is een niet-lege open deelverzameling $U \subset \mathrm{R}^n$. Toon aan dat de verzameling U samenhangend is dan en slechts dan als iedere continue funktie $f : U \to \mathrm{R}$ met $\mathrm{im}\, f \subset \{0, 1\}$ constant is.
Hint: toon aan dat voor een dergelijke continue functie de verzamelingen $U_0 = f^{-1}(0)$ en $U_1 = f^{-1}(1)$ open zijn.

Opgave 8.9 **(Newton potentiaal)** In deze opgave is $n \geq 3$. Op de open verzameling $U := \mathrm{R}^n \setminus \{0\}$ beschouwen we het vectorveld F gedefinieerd door

$$F(x) = \frac{x}{\|x\|^n} \qquad (x \in U).$$

(a) Toon aan dat F een C^1-vectorveld op U is dat op U aan de integreerbaarheidscondities $AF = 0$ voldoet.

(b) Toon aan dat de verzameling U samenhangend, maar niet stervormig is.

Men kan aantonen dat de verzameling U enkelvoudig samenhangend is (ga na dat uit dit feit volgt dat F op U een scalaire potentiaal heeft). Intuïtief vindt u het wellicht aannemelijk dat U enkelvoudig samenhangend is. Het is echter tamelijk lastig dit te bewijzen. Wij zullen daarom dit idee niet verder uitwerken.

Ons doel is een kandidaat te vinden voor een scalaire potentiaal, en tenslotte aan te tonen dat de gevonden functie ook daadwerkelijk een potentiaal is. Zij $S := \{x \in \mathrm{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ de eenheidssfeer in R^n.

(c) Zij γ een C^1-kromme met $\mathrm{im}\,\gamma \subset S$. Toon aan dat $\int_\gamma \langle\, F(x)\,,\, d_1x \,\rangle = 0$. Hint: differentieer de uitdrukking $\langle\, \gamma(t), \gamma(t) \,\rangle$ naar t.

(d) Zij $p \in S$, en $r > 0$. Geef een C^1-kromme $\sigma : [0,1] \to \mathrm{R}^n$ met beginpunt p en eindpunt rp, en zo dat $\mathrm{im}\,(\sigma)$ gelijk is aan het lijnstuk $L(p, rp)$ dat p en rp verbindt.
Bepaal $\int_\sigma \langle\, F(x)\,,\, d_1x \,\rangle$.

(e) Bepaal een functie $f : U \to \mathrm{R}$ waarvan u vermoedt dat $\mathrm{grad}\, f = F$; controleer dat dit laatste inderdaad geldt.

Opgave 8.10 Zij $I = [0,1]$. Gegeven is een C^1-vectorveld F op R^2, en een punt $a \in \mathrm{R}^2$. Voor $u \in \mathrm{R}^2$ definiëren we de C^∞-afbeelding $\Gamma_u : I^2 \to \mathrm{R}^2$ door:

$$\Gamma_u(x_1, x_2) = a + (x_1u_1, x_2u_2).$$

(a) Schets het beeld van Γ_u in R^2.

(b) Toon aan dat

$$\int_{\partial\Gamma_u} \langle\, F(x)\,,\, d_1x \,\rangle = \varphi(u_1, 0) + \psi(u_1, u_2) - \varphi(u_1, u_2) - \psi(0, u_2),$$

met

$$\varphi(u) = \int_0^{u_1} F_1(a + (x_1, u_2))\, dx_1, \qquad \psi(u) = \int_0^{u_2} F_2(a + (u_1, x_2))\, dx_2.$$

(c) Toon aan dat:

$$D_1D_2\varphi(u) = D_2F_1(a + u).$$

(d) Toon aan dat

$$D_1D_2\psi(u) = D_1F_2(a + u).$$

(e) Veronderstel dat gegeven is dat de integraal van F langs iedere gesloten C^1-kromme in R^2 gelijk is aan 0. Toon aan dat dan geldt: $D_2F_1 - D_1F_2 = 0$.

We veronderstellen nu dat G een C^1-vectorveld op een open verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$ is, en dat de integraal van G langs iedere gesloten C^1-kromme in U gelijk is aan nul.

(f) Toon aan dat G voldoet aan de integreerbaarheidscondities $AG = 0$.

Hoofdstuk 9

Opgave 9.1 Beschouw de afbeelding $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door

$$\Phi(\alpha, \theta) = (\cos\alpha\cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta).$$

(a) Bepaal het beeld $\mathrm{im}\,(\Phi)$ van Φ in R^3 (u hoeft uw antwoord niet te bewijzen).

(b) Bepaal de integraal

$$\int_\Phi x_3 \; d_2x.$$

Opgave 9.2 Zij $\Phi : [0, 1] \times [0, \pi] \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door $\Phi(t, \alpha) = ((1-t)\cos\alpha, (1-t)\sin\alpha, t)$.

(a) Schets $\mathrm{im}\,(\Phi)$.

(b) Bepaal $\mathrm{opp}(\Phi)$.

(c) Bepaal de integraal $\int_\Phi (x_1^2 + x_2^2) \; d_2x$.

Opgave 9.3 Gegeven is een rechthoek $B \subset \mathrm{R}^2$ en een C^1-afbeelding $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$. Toon aan dat voor iedere orthogonale lineaire afbeelding $L : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ geldt:

$$\mathrm{opp}(L \circ \Phi) = \mathrm{opp}\Phi.$$

Opgave 9.4 Zij $B = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, en zij $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door

$$\Phi(\alpha, \theta) = (\cos\alpha\cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta).$$

Zoals u weet is het beeld van Φ de eenheidssfeer in R^3. In het vervolg schrijven we $\sigma = (\alpha, \theta)$. Voor een gegeven $r \geq 0$ definiëren we de afbeelding $\Phi_r : B \to \mathrm{R}^3$ door $\Phi_r(\sigma) = r\Phi(\sigma)$ $(\sigma \in B)$.

(a) Bepaal $\mathrm{im}\,(\Phi_r)$ voor elke $r \geq 0$.

Zij $R > 0$. We definiëren de afbeelding $\Psi : [0, R] \times B \to \mathrm{R}^3$ door $\Psi(r, \sigma) = \Phi_r(\sigma) = r\Phi(\sigma)$.

(b) Toon aan dat

$$|\det D\Psi(r, \sigma)| = ||D_1\Phi_r(\sigma) \times D_2\Phi_r(\sigma)|| \qquad ((r, \sigma) \in [0, R] \times B).$$

Hint: bepaal de kolommen van de matrix van $D\Psi(r, \alpha)$ en gebruik de definiërende eigenschap van het uitwendig product. Gebruik verder het (uit het dictaat) bekende feit dat de vectoren $\Phi(\sigma)$ en $D_1\Phi_r(\sigma) \times D_2\Phi_r(\sigma)$ proportioneel zijn. Vermijd daarbij rekenwerk.

Voor $r \geq 0$ schrijven we $B_r = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| \leq r\}$.

(c) Gegeven is een continue functie $f : [0, R] \to \mathrm{R}$. Toon aan dat

$$\int_{B_R} f(\|x\|)\, dx = \int_0^R f(r)\, \mathrm{opp}(\Phi_r)\, dr.$$

Hint: pas op de integraal in het linkerlid een geschikte substitutie van variabelen toe.

(d) Toon met behulp van het voorgaande onderdeel aan dat

$$\frac{d}{dr}\, \mathrm{vol}_3(B_r) = \mathrm{opp}(\Phi_r).$$

Opmerking: uit de formule voor $\mathrm{vol}_3(B_r)$ volgt dus die voor $\mathrm{opp}(\Phi_r)$, en omgekeerd. Probeer de gevonden formule intuïtief te begrijpen door het linkerlid op te vatten als limiet van een differentiequotiënt.

Opgave 9.5 Gegeven zijn een blok $B \subset \mathrm{R}^2$ en een C^1-afbeelding $\Psi : B \to \mathrm{R}^2$ zo dat Ψ injectief en regulier is op B^{inw}. Schrijf $A = \Psi(B)$. Zij U een open deel van R^2 dat A bevat, en zij $\Phi : U \to \mathrm{R}^3$ een C^1-afbeelding.

Toon aan dat voor iedere continue functie $f : \Phi(A) \to \mathrm{R}$ geldt:

$$\int_{\Phi \circ \Psi} f(x)\, d_2x = \int_A f(\Phi(y))\, \|D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)\|\, dy.$$

Opmerking: de bovenstaande identiteit kan opgevat worden als de generalisatie van een identiteit uit het dictaat. Welke? Men zou $\int_\Phi f(x)\, d_2x$ nu kunnen definiëren als het rechterlid van de bovenstaande identiteit.

Opgave 9.6 Beschouw de afbeelding $\Phi : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door:

$$\Phi(z, \alpha) = ((2 - z)\cos\alpha, (2 - z)\sin\alpha, z).$$

Beschouw voorts de C^1-kromme $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$.

(a) Schets $\mathrm{im}\,(\Psi)$ en $\mathrm{im}\,(\gamma)$.

(b) Toon aan dat voor ieder C^1-vectorveld F op R^3 geldt:

$$\int_\Phi \langle\, \mathrm{rot}\, F, \nu\, \rangle(x)\, d_2x = -\int_\gamma \langle\, F(x)\, ,\, d_1x\, \rangle.$$

(c) Controleer de bovenstaande formule voor het vectorveld $F(x) = (-x_2, x_1, x_3)$.

(d) Idem, maar nu voor het vectorveld $F(x) = (-x_2^3, x_1^3, 0)$.

Opgave 9.7 Zij $\Psi : [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi] \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door:

$$\Psi(\alpha, \theta) = 2(\cos\alpha\cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta),$$

en zij $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^3$ de kromme gedefinieerd door:

$$\gamma(t) = 2(\cos t, \sin t, 0).$$

(a) Schets $\mathrm{im}\,(\Psi)$ en $\mathrm{im}\,(\gamma)$.

(b) Toon aan dat voor ieder C^1 vectorveld F op R^3 geldt:

$$\int_\Psi \langle\, \mathrm{rot}\, F, \nu \,\rangle(x)\; d_2x = \int_\gamma \langle\, F(x)\,,\, d_1x \,\rangle.$$

(c) Controleer de hierboven gegeven formule voor de vectorvelden uit de onderdelen (c) en (d) van de vorige opgave.

Opgave 9.8 Zij $0 < a < r_1 < r_2 < b$, en definieer de krommen $\gamma_j : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^2$ voor $j = 1, 2$ door:

$$\gamma_j(\alpha) = r_j(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

Zij $U = \{x \in \mathrm{R}^2 \mid a < \|x\| < b\}$.

(a) Schets $U, \mathrm{im}\,(\gamma_1)$ en $\mathrm{im}\,(\gamma_2)$.

(b) Toon aan dat voor ieder C^1-vectorveld $F = (F_1, F_2)$ op U met

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

geldt:

$$\int_{\gamma_1} \langle\, F(x)\,,\, d_1x \,\rangle = \int_{\gamma_2} \langle\, F(x)\,,\, d_1x \,\rangle.$$

Hint: bedenk een geschikte rechthoek $B \subset \mathrm{R}^2$ en een geschikte C^2-afbeelding $\Phi : B \to \mathrm{R}^2$ met als beeld de verzameling $\{x \in \mathrm{R}^2 \mid r_1 \le \|x\| \le r_2\}$. Pas vervolgens de Stelling van Green toe.

Opgave 9.9 Gegeven is een C^1-vectorveld F op R^2. Voor $t \in \mathrm{R}$ definiëren we de kromme $\gamma_t : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^3$ door $\gamma_t(\alpha) = t(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Voor $t \in \mathrm{R}$ definiëren we $I(t) \in \mathrm{R}$ door:

$$I(t) = \int_{\gamma_t} \langle\, F(x)\,,\, d_1x \,\rangle.$$

(a) Toon aan dat $I(t) = tI_1(t) + tI_2(t)$, met

$$\begin{aligned} I_1(t) &= -\int_0^{2\pi} F_1(t\cos\alpha, t\sin\alpha)\sin\alpha\; d\alpha, \\ I_2(t) &= \int_0^{2\pi} F_2(t\cos\alpha, t\sin\alpha)\cos\alpha\; d\alpha. \end{aligned}$$

(b) Toon aan dat I_1 een C^1-functie is, en dat $I_1'(0) = -\pi D_2F_1(0,0)$.

(c) Toon aan dat I_2 een C^1-functie is, en bepaal $I_2'(0)$.

(d) Toon aan dat
$$\lim_{t\to 0} \frac{I(t)}{t^2} = \pi[D_1F_2(0,0) - D_2F_1(0,0)].$$

In de rest van de opgave zal de gevonden formule nogmaals afgeleid worden, maar nu door gebruik te maken van de stelling van Green. Zij S_t de cirkelschijf in R^2 met middelpunt 0 en straal t (voor $t > 0$).

(e) Toon aan dat voor elke $t > 0$ geldt:
$$I(t) = \int_{S_t} [D_1F_2(x) - D_2F_1(x)]\, dx.$$

(f) Zij $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ een continue functie. Toon aan dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat
$$0 < t < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \int_{S_t} [f(x) - f(0)]\, dx \right| < \pi t^2 \varepsilon.$$
Toon voorts aan dat
$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-2} \int_{S_t} [f(x) - f(0)]\, dx = 0,$$
en dat
$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-2} \int_{S_t} f(x)\, dx = \pi f(0).$$

(g) Toon nogmaals aan dat de in (d) gevonden formule geldt, maar nu door gebruik te maken van de onderdelen (e) en (f).

Opgave 9.10 Zij $S = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ en zij $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x) = (2x_1, 0, 0)$. Bewijs op twee manieren dat:
$$\int_S \langle f, \nu \rangle(x)\, d_2x = \frac{8\pi}{3};$$
(a) door een directe berekening, (b) door gebruik te maken van de Stelling van Gauss.

Opgave 9.11 Beschouw de cilinder
$$U = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\ -1 < x_3 < 1\}.$$
De verzameling U is een begrensde open verzameling met omsluitende stuksgewijze C^1-rand ∂U, bestaande uit de C^1-stukken: $M = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ -1 \le x_3 \le 1\}$ (de mantel), $O = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_3 = -1\}$ (het ondervlak) en $B = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_3 = 1\}$ (het bovenvlak). Verifieer de stelling van Gauss voor U en het vectorveld F op R^3 gedefinieerd door:
$$F(x) = (x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_2).$$

Opgave 9.12 Zij $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ de begrensde open deelverzameling begrensd door:

de eenheidssfeer	$\{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$;
het cylinderoppervlak	$\{x \in \mathrm{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$;
de twee horizontale vlakken	$\{x \in \mathrm{R}^3 \mid x_3 = h_i\} \quad (i = 1, 2)$,

waarbij $-1 < h_1 < h_2 < 1$. De rand $\partial\Omega$ is dus de vereniging van een schil S_1 op de sfeer en een schil S_2 op het cilinderoppervlak.

(a) Schets S_1 en S_2.

(b) Toon aan dat de schillen S_1 en S_2 gelijke oppervlakte hebben. Hint: pas de divergentiestelling toe op het vectorveld F op R^3 gegeven door:

$$F(x) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, 0\right).$$

Hoofdstuk 10

Opgave 10.1 Schrijf in de vorm $a + bi$ met reële a en b:

$$(2 + i\sqrt{3})^2, \quad \frac{3 + 4i}{5 - i}.$$

Opgave 10.2 Bereken absolute waarde en argument van

$$(1 - i\sqrt{3})^2, \quad \frac{1}{1 + i}, \quad \frac{1 + i}{1 - i},$$

zonder deze getallen eerst in de vorm $a + bi$ te schrijven.

Opgave 10.3 Teken een punt z op de eenheidscirkel in het complexe vlak. Geef vervolgens de ligging aan van de punten $z^2, z^3, z^{-1}, \bar{z}, -z, iz$ en $i\bar{z}$. Ga in de figuur na dat $z + \frac{1}{z}$ reëel is en geef van deze bewering ook een rechtstreeks bewijs.

Opgave 10.4 Bewijs Lemma 10.1.4.

Opgave 10.5 Bewijs:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\bar{w}),$$
$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Geef van de laatste eigenschap een meetkundige interpretatie in termen van zijden en diagonalen van een parallellogram.

Opgave 10.6 Zij $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ met reële a_i.
Bewijs: Als $f(w) = 0$ dan is $f(\bar{w}) = 0$.

Opgave 10.7 Bereken alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor

(a) $z^4 = i$,

(b) $z^8 - 2z^4 = -1$,

(c) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$.

Opgave 10.8 Zij $z \in \mathrm{C}$ met $z \neq -1$. Bewijs:

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(\frac{z-1}{z+1}) < 0.$$

Interpreteer dit resultaat meetkundig.

Opgave 10.9 Zij T de complexe eenheidscirkel $\{z \in \mathrm{C} \mid |z| = 1\}$.

(a) Bepaal $\varphi(\mathrm{T}\backslash\{1\})$ als $\varphi(z) = \frac{1}{z-1}$.

(b) Bepaal $\varphi(\mathrm{T})$ als $\varphi(z) = \frac{z^2-z+1}{2z}$.

(c) Bepaal $\varphi(\mathrm{R})$ als $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

Bewijs ook dat de gevonden verzamelingen de juiste zijn.

Opgave 10.10 Geef formules die $\sin 6\varphi$ en $\cos 6\varphi$ uitdrukken in $\sin\varphi$ en $\cos\varphi$.

Opgave 10.11 Geef een formule voor

$$\frac{i^{4\alpha} - 1}{2ie^{\pi i\alpha}}$$

waaruit blijkt dat dit getal voor reële α reëel is.

Opgave 10.12

(a) Bereken $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}$ en bewijs hiermee dat

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{1}{2}nx\cos\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x} \quad \text{als } x \neq 2N\pi \qquad (N \in \mathrm{Z}).$$

(b) Wat vindt u voor $x = 2N\pi$?

(c) Vind zelf een analoge formule voor $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$.

Opgave 10.13 Schrijf de volgende getallen in de vorm $re^{i\varphi}$, met $r \geq 0, \varphi \in]-\pi,\pi]$: $1-i$, 527, -527, $\sqrt{3}-i$, $3i+4$.

Opgave 10.14 Bepaal reëel en imaginair deel van $e^{\pi i}$, $e^{2\pi i}$, $e^{-\pi i/4}$, $e^{1993\pi i}$, e^{i}.

Opgave 10.15 Gegeven is een continue funktie $f : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ met

$$\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = 0.$$

Toon aan dat de funktie f begrensd is, d.w.z. er bestaat een $M > 0$ zo dat $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in \mathrm{C}$.

Opgave 10.16 We bekijken de functie $r : \mathrm{C} \setminus \{0\} \to \mathrm{C}$ gegeven door $r(z) = (\frac{\bar{z}}{z})^2$.

(a) Laat zien dat $\lim\limits_{z\to 0,\, z\in\mathrm{R}} r(z) = 1$.

(b) Onderzoek $\lim\limits_{z\to 0,\, z\in i\mathrm{R}} r(z)$.

(c) Onderzoek $\lim\limits_{z\to 0} r(z)$.

Opgave 10.17

(a) Schrijf $1 + i$ in poolcoördinaten.

(b) Bepaal het reële en het imaginaire deel van $(1 + i)^{86}$.

(c) Bepaal het reële en het imaginaire deel van $(i - \sqrt{3})^{19}$.

(d) Geef alle $z \in \mathrm{C}$ die voldoen aan $z^3 = i$.

(e) Geef ook alle $z \in \mathrm{C}$ die voldoen aan $z^7 = 128$.

(f) Schets de oplossingsverzamelingen van de vergelijkingen in d) en e).

Opgave 10.18 Probeer voor elk van de volgende rijen zoveel mogelijk te zeggen over de verzameling van limietpunten.

$$\left(e^{\pi i n/3}\right)_{n\geq 1}, \quad ((1+i)^n)_{n\geq 1}, \quad \left(\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right)_{n\geq 1}, \quad \left(e^{in}\right)_{n\geq 1}.$$

Opgave 10.19 Bewijs dat $\lim\limits_{z\to 0} e^{-\frac{1}{z^2}}$ niet bestaat.

Opgave 10.20

(a) Bewijs dat de afbeeldingen $z \mapsto \mathrm{Re}\, z$, $z \mapsto \mathrm{Im}\, z$, $z \mapsto |z|$ in geen enkel punt z complex differentieerbaar zijn.

(b) Onderzoek de totale en de complexe differentieerbaarheid van de functies $z \mapsto |z|^2$ en $z \mapsto \bar{z}^2$.

Opgave 10.21

(a) Gegeven is een complex differentieerbare functie $f : C \to C$. Schrijf $f = f_1 + if_2$, met f_1, f_2 reëelwaardig. Toon aan dat voor alle $a \in C$ geldt:

$$\text{grad}\, f_1(a) \perp \text{grad}\, f_2(a).$$

Wat vermoedt u op grond van deze vergelijking voor de niveaulijnen van f_1 en f_2?

(b) Schets de niveaulijnen van f_1 en f_2 als $f(z) = z^2$. Controleer uw vermoeden voor deze f.

Opgave 10.22

(a) Bewijs dat $\sin' z = \cos z$ en $\cos' z = -\sin z$.

(b) Bewijs dat $\cosh' z = \sinh z$ en $\sinh' z = \cosh z$.

Opgave 10.23 Laat een tweetal funkties f : R æ C en g : C æ C gegeven zijn, en veronderstel dat f differentieerbaar is in a en dat g complex differentieerbaar is in $f(a)$. Toon aan dat de samenstelling $g \circ f$ differentieerbaar is in a en dat:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Opgave 10.24

(a) Bepaal constanten A en B zo dat $\frac{1}{x^2+1} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}$ (breuksplitsen).

(b) Bewijs met behulp van onderdeel (a) dat $\frac{1}{2i}(\log(x-i) - \log(x+i))$ een primitieve is van $\frac{1}{x^2+1}$ $(x \in R)$.

(c) Bewijs dat $\frac{1}{2}(\arg(x-i) - \arg(x+i))$ een primitieve is van $\frac{1}{x^2+1}$ $(x \in R)$.

(d) Bewijs dat $\arg(x+i) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ en $\arg(x-i) = -\arg(x+i)$ $(x \in R)$.

(e) Leid uit het voorgaande af dat $\arctan x$ een primitieve is van $\frac{1}{x^2+1}$.

Opgave 10.25 We gaan de vergelijking $\sin z = 2$ oplossen.

(a) Geef alle complexe getallen w waarvoor $w^2 - 4iw - 1 = 0$.

Aanwijzing: Waaraan moet $w - 2i$ voldoen?

(b) Geef alle complexe getallen z die voldoen aan $e^{iz} = i(\sqrt{3} + 2)$.

(c) Bekijk de definitie van de complexe sinusfunctie. Wat heeft de vergelijking $w^2 - 4iw - 1 = 0$ met de vergelijking $\sin z = 2$ te maken?

(d) Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $\sin z = 2$.

Opgave 10.26 Bepaal alle complexe z die voldoen aan:

(a) $e^z = 1 + i$,

(b) $\cosh z = i$.

Opgave 10.27 Bepaal $\log i$, $\log(1+i)$, $\log(1-i\sqrt{3})$, $\log e^{-2\pi i/3}$ en $\log e^{-4\pi i/3}$.

Opgave 10.28 Bepaal alle complexe z die voldoen aan:

(a) $z^i = i$,

(b) $i^z = i$.

Opgave 10.29 Bereken $(e^{5i})^i$.

Opgave 10.30 Bewijs:

(a) $|z^w| = z^{\mathrm{Re}\, w}$ als $z \in \mathrm{R}, z > 0$.

(b) $|z^w| = |z|^w$ als $w \in \mathrm{R}$.

Opgave 10.31 Gegeven is een interval $I \subset \mathrm{R}$, en een tweetal functies $f, g : I \to \mathrm{C}$.

(a) Toon aan: als f en g differentieerbaar zijn in $a \in I$, dan is $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ dat ook, en er geldt:

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(b) Toon aan: als f en g continu differentieerbaar zijn op $[a, b] \subset I$, dan geldt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx.$$

Opgave 10.32 Bereken de integraal:

$$\int_0^\pi e^{it}(t+i)^2\, dt.$$

Opmerking: u kunt partiële integratie gebruiken zoals u dat gewend bent bij integralen van reëelwaardige functies. Zie Opgave 10.31.

Opgave 10.33 Gegeven is een punt $\alpha \in C$ en een tweetal positieve reële getallen $h, k > 0$. Zij R de rechthoek in C met hoekpunten $\alpha, \alpha + h, \alpha + h + ik$ en $\alpha + ik$. Bereken de integraal

$$\int_{\partial R} \bar{z}\, dz$$

(a) door gebruik te maken van de definities;
(b) door gebruik te maken van de stelling van Green.

Opgave 10.34 Gegeven zijn functies $f : \mathrm{R}$ æ C en $g : \mathrm{C}$ æ C. Veronderstel dat f differentieerbaar is in $a \in \mathrm{R}$, en dat g totaal differentieerbaar is in $f(a)$.

(a) Toon aan dat $g \circ f : \mathrm{R}$ æ C differentieerbaar is in a en dat $(g \circ f)'(a) = Dg(f(a))f'(a)$.
(b) Laat bovendien gegeven zijn dat g complex differentieerbaar is in $f(a)$. Toon aan dat $g \circ f$ differentieerbaar is in a en dat

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Opgave 10.35

(a) Gegeven is een complex differentieerbare C^1-functie $f : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$. Toon aan dat voor iedere C^1-kromme $\gamma : [a, b] \to \mathrm{C}$ geldt:

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

(b) Bepaal de integraal

$$\int_\gamma (z^2 + 2z - 1)\, dz,$$

als $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{C}$ gegeven wordt door $\gamma(t) = (1 - t)e^t + it$.

(c) Toon aan dat voor iedere rechthoek R in C geldt:

$$\int_{\partial R} (pz + q)\, dz = 0,$$

zonder gebruik te maken van de stelling van Cauchy. Hierbij zijn p en q complexe constanten.

Opgave 10.36 Zij $U \subset \mathrm{C}$ open. Gegeven is een continue functie $g : [0, 1] \times U \to \mathrm{C}$ met de eigenschap dat voor iedere $t \in [0, 1]$ de functie $g_t : U \to \mathrm{C}$, $z \mapsto g(t, z)$ complex differentieerbaar is. De complexe afgeleide van deze functie noteren we met $\frac{\partial g}{\partial z}(t, z) := \frac{d}{dz} g_t(z)$. We veronderstellen bovendien dat $\frac{\partial g}{\partial z}$ continu is op $[0, 1] \times U$. Toon aan dat de functie $G : U \to \mathrm{C}$ gedefinieerd door

$$G(z) = \int_0^1 g(t, z)\, dt$$

complex differentieerbaar en C^1 is met als complexe afgeleide:

$$G'(z) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial z}(t, z)\, dt.$$

Hint: gebruik de Cauchy-Riemann-vergelijkingen.

Opgave 10.37 Gegeven is een complex differentieerbare C^1-functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Voor ieder punt $z \in \mathbb{C}$ definiëren we de kromme $\gamma_z : [0,1] \to \mathbb{C}$ door $\gamma_z(t) = tz$. We definiëren de functie $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw.$$

(a) Toon aan dat de functie F complex differentieerbaar en C^1 is. Hint: herschrijf de integraal voor F zo dat de vorige opgave toepasbaar wordt.

(b) Toon aan dat $F'(z) = f(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Opgave 10.38 Gegeven is een open deel $U \subset \mathbb{C}$ en een punt $\alpha \in \mathbb{C}$. Gegeven is voorts een functie $f : U$ æ $\mathbb{C}$ die complex differentieerbaar is in α. Schrijf $\rho(z) = f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha)$.

(a) Toon aan dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z - \alpha| < \delta$ geldt: $|\rho(z)| \leq \varepsilon |z - \alpha|$.

(b) Laten $\varepsilon > 0$ en $\delta > 0$ als boven zijn. Zij R een rechthoek in $\mathbb{C}$, met zijden met lengten h en k, die geheel in $B(\alpha;\delta)$ ligt. Toon aan dat

$$|\int_{\partial R} f(z)\, dz| \leq 4\varepsilon(h^2 + k^2).$$

Hint: leidt eerst een geschikte schatting van de integraal $\int_{\partial R(h)} \rho(z)\, dz$ af. Gebruik voorts onderdeel (c) uit Opgave 10.35.

Opgave 10.39 Zij U een open deel van C en $f : U \to$ C complex differentieerbaar. We veronderstellen *niet* dat f continu differentieerbaar is. De Stelling van Green kan dus niet gebruikt worden om die van Cauchy af te leiden.

Onder een rechthoek in C parallel aan de coordinaatassen verstaan we een rechthoek van de vorm $R = [a, b] \times [c, d]$. Voor een dergelijke rechthoek noteren we $l_x(R) = b - a$ en $l_y(R) = d - c$. Voor een dergelijke rechthoek R definiëren we het complexe getal $I(R)$ door

$$I(R) = \int_{\partial R} f(z)\, dz.$$

(a) Toon aan dat er voor iedere rechthoek R in U parallel aan de coordinaatassen een rechthoek $R' \subset R$ parallel aan de coordinaatassen bestaat, met $l_x(R') = l_x(R)/2$ en met $l_y(R') = l_y(R)/2$, zodanig dat

$$|I(R')| \geq \frac{1}{4}|I(R)|.$$

Hint: verdeel R op een voor de hand liggende manier in vier gelijke stukken.

In het vervolg veronderstellen we dat R een vaste rechthoek in C is met zijden parallel aan de coordinaatassen.

(b) Toon aan dat er een rij rechthoeken $(R_k)_{k\geq 0}$ bestaat, met zijden parallel aan de coordinaatassen, en met, voor alle $k \geq 0$,

(1) $R_0 = R$ en $R_{k+1} \subset R_k$;

(2) $l_x(R_k) = \frac{1}{2^k} l_x(R)$ en $l_y(R_k) = \frac{1}{2^k} l_y(R)$;

(3) $|I(R_k)| \geq \frac{1}{2^{2k}}|I(R)|$.

(c) Toon aan dat de doorsnede $\cap_{k=0}^{\infty} R_k$ niet leeg is en uit precies één punt $\alpha \in U$ bestaat.

(d) Toon aan dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $k \geq 0$ bestaat zo dat

$$|I(R_k)| \leq 4\varepsilon \frac{1}{2^{2k}}[l_x(R)^2 + l_y(R)^2].$$

Hint: gebruik het laatste onderdeel uit Opgave 10.38.

(e) Toon aan dat $I(R) = 0$.

Opgave 10.40 Notaties en veronderstellingen zijn precies als in de vorige opgave. We zullen *aantonen* dat f continu differentieerbaar op U moet zijn.

(a) Gegeven zijn twee rechthoeken R_1, R_2 parallel aan de coordinaatassen zo dat $\alpha \in R_1^{\text{inw}}$ en $R_1 \subset R_2 \subset U$. Toon aan dat:

$$\int_{R_1} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz = \int_{R_2} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz.$$

Hint: verdeel $R_2 \setminus R_1^{\text{inw}}$ in eindig vele rechthoeken en pas de vorige opgave toe. Licht uw redenering toe met een schets.

(b) Voor $h > 0$ definiëren we de rechthoek $R_h := [\alpha_1 - h, \alpha_1 + h] \times [\alpha_2 - h, \alpha_2 + h]$. Toon aan dat
$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{R_h} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz = 2\pi i f(\alpha).$$
Hint: schrijf $f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + \rho(z)$.

(c) Zij R een rechthoek in U parallel aan de coordinaatassen. Toon aan dat voor iedere $z \in R^{\text{inw}}$ geldt:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

(d) Toon aan dat f een C^1-functie op U is; hint: gebruik Opgave 10.36.

(e) Toon aan dat f willekeurig vaak differentieerbaar op U is.

Opgave 10.41 Gegeven is een open deel $U \subset \mathbb{C}$ en een complex differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{C}$. We veronderstellen dat $|f|$ constant is. Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het $\mathbb{R}^2$-inproduct op $\mathbb{C}$.

(a) Toon aan dat $\langle \frac{\partial f}{\partial x}(z), f(z) \rangle = 0$ voor $z \in U$. Hint: differentieer $|f|^2$.

(b) Toon aan dat $\langle \frac{\partial f}{\partial y}(z), f(z) \rangle = 0$ voor $z \in U$.

(c) Zij $z \in U$. Bewijs: als $f(z) \neq 0$ dan bestaat er een reëel getal λ zo dat $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(z)$.

(d) Toon aan dat voor alle $z \in U$ geldt $f(z) \neq 0 \Rightarrow f'(z) = 0$.

(e) Toon aan dat f lokaal constant is, d.w.z. voor ieder punt $\alpha \in U$ bestaat een $\delta > 0$ zo dat f constant is op de schijf $B(\alpha, \delta)$.

(f) Geef een voorbeeld van een nergens lokaal constante differentieerbare functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ waarvoor $|g|$ constant is.

Opgave 10.42 In het vervolg veronderstellen we dat U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ is en $f : U \to \mathbb{C}$ een complex differentieerbare functie (de functie f is dan automatisch C^1).

(a) Zij $\alpha \in U$ en zij $r > 0$ zo dat de gesloten schijf $\bar{B}(\alpha; r)$ in U ligt. Toon aan dat
$$f(\alpha) = \int_0^1 f(\alpha + tre^{2\pi i t})\, dt.$$

(b) Laten $\alpha \in U$ en $r > 0$ als in onderdeel (a) zijn. Toon aan: als $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in \partial B(\alpha, r)$, dan is $|f(\alpha)| \leq M$. Toon verder aan: als f niet constant is op $\partial B(\alpha, r)$, dan is $|f(\alpha)| < M$ (hint: gebruik de vorige opgave).

(c) Toon aan: neemt $|f|$ een maximale waarde aan in een punt $\alpha \in U$, dan is f constant op een omgeving van α.

Opgave 10.43 Voor $r > 1$ beschouwen we de open verzameling $G_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r, \operatorname{Im} z > 0\}$. Voorts definiëren we de kromme $\sigma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ door $\sigma_r(t) = re^{it}$.

(a) Toon aan dat voor alle $r > 1$ geldt:

$$\int_{\partial G_r} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \pi.$$

Hint: pas de stelling van Cauchy toe op de functie $g(z) = 1/(z+i)$.

(b) Toon aan dat voor alle $r > 1$ geldt:

$$\int_{\partial G_r} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \int_{-r}^{r} \frac{dt}{1+t^2} + R(r),$$

met $R(r) = \int_{\sigma_r} \frac{1}{1+z^2}\, dz$.

(c) Toon aan dat voor alle $r > 1$ geldt:

$$|R(r)| \leq \frac{\pi r}{r^2 - 1}.$$

(d) Gebruik de voorgaande onderdelen om de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

te berekenen. Vergelijk het verkregen antwoord met het antwoord dat u krijgt door primitiveren.

Opgave 10.44 Zij $\eta > 0$. Voor $r > 0$ beschouwen we de open rechthoek R_r met hoekpunten $-r, r, r + i\eta, -r + i\eta$.

(a) Met behulp van welke stelling volgt de onderstaande bewering?

$$\int_{\partial R_r} e^{-z^2}\, dz = 0.$$

(b) Zij V_r het deel van de rand van R_r dat ligt op een der lijnen $\operatorname{Re} z = \pm r$. Toon aan dat:

$$\left|\int_{V_r} e^{-z^2}\, dz\right| \leq 2\eta e^{\eta^2 - r^2}.$$

(c) Zij $\gamma_r : [-r, r] \to \mathbb{C}$ de kromme gegeven door $\gamma_r(t) = t + i\eta$. Toon aan dat

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} e^{-z^2}\, dz = \sqrt{2\pi}.$$

(d) Toon aan dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-2it\eta}\, dt = \sqrt{2\pi} e^{-\eta^2}.$$

(e) Toon aan dat voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(at)\, dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{a^2}{4}}.$$

Opgave 10.45 Gegeven is een veeltermfunctie $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ van de graad $n \geq 1$.

(a) Toon aan dat er constanten $C > 0$ en $R > 0$ bestaan zo dat voor alle $r \geq R$ geldt:

$$|\int_{\partial B(0;r)} \frac{1}{p(z)}\, dz| \leq C r^{1-n}.$$

(b) Veronderstel dat $n \geq 2$. Toon aan dat er een constante $R > 0$ bestaat zo dat voor alle $r > R$ geldt:

$$\int_{\partial B(0;r)} \frac{1}{p(z)}\, dz = 0.$$

(c) Zij $p(z) = az + b$. Toon aan dat er een $R > 0$ bestaat zo dat voor $r \geq R$ geldt:

$$\int_{\partial B(0;r)} \frac{1}{p(z)}\, dz = \frac{2\pi i}{a}.$$

Opgave 10.46 Gegeven zijn n verschillende complexe getallen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ($n \geq 1$). We beschouwen de complexe veeltermfunctie

$$p(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j).$$

(a) Toon aan dat voor iedere $1 \leq k \leq n$ geldt:

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (\alpha_k - \alpha_j) = p'(\alpha_k).$$

Gegeven is voorts een open begrensde deelverzameling $G \subset \mathbb{C}$ met een stuksgewijze C^1 rand $\partial G \subset \mathbb{C}$ die geen der α_j bevat.

(b) Toon aan dat

$$\int_{\partial G} \frac{1}{p(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \alpha_k \in G}} \frac{1}{p'(\alpha_k)}$$

Hint: kies $\delta > 0$ zo dat voor iedere k met $\alpha_k \in G$ geldt $B(\alpha_k; 2\delta) \subset G$, en pas de stelling van Cauchy toe op de verzameling

$$G_0 = G \setminus \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \alpha_k \in G}} \bar{B}(\alpha_k; \delta).$$

Opgave 10.47 Zij $k \geq 1$. We beschouwen de veeltermfunctie $p(z) = 1 + z^{2k}$. Voor $r > 1$ definiëren we de open verzameling G_r door $G_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r,\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

(c) Toon aan dat de veelterm p precies k enkelvoudige nulpunten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ heeft die in G_r gelegen zijn.

(d) Toon aan dat voor $r > 1$ geldt:

$$\int_{\partial G_r} \frac{1}{p(z)}\, dz = -\frac{2\pi i}{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j.$$

Hint: gebruik Opgave 10.46.

(e) Toon aan dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + z^{2k}}\, dz = \frac{\pi}{k \sin(\frac{\pi}{2k})}.$$