Differentieerbare variëteiten
Aantekeningen bij het college

E.P. van den Ban

Najaar 1998

Contents

1 Hausdorff eigenschap van een atlas

Laat X een verzameling zijn, en $\mathcal{A}$ een atlas op X. In het dictaat wordt de atlas $\mathcal{A}$ Hausdorff genoemd indien voor elk tweetal kaarten κ en λ van $\mathcal{A}$ er geen rij $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $X_\kappa \cap X_\lambda$ bestaat met de eigenschap dat $\lim_{j\to\infty} \kappa(x_j)$ bestaat en tot $V_\kappa \setminus V_{\kappa,\lambda}$ behoort, terwijl ook $\lim_{j\to\infty} \lambda(x_j)$ bestaat en tot $V_\lambda \setminus V_{\lambda,\kappa}$ behoort.

Anderzijds wordt in het dictaat de $\mathcal{A}$-topologie op X als volgt gedefinieerd. Een verzameling $U \subset X$ heet open als voor elke $\kappa \in \mathcal{A}$ geldt: $\kappa(X_\kappa \cap U)$ is open in V_κ.

Doel van deze paragraaf is de volgende stelling te bewijzen.

Propositie 1.1 *De atlas $\mathcal{A}$ is Hausdorff dan en slechts dan als de $\mathcal{A}$-topologie op X Hausdorff is.*

Het volgende lemma dient als voorbereiding op het bewijs. In het vervolg veronderstellen we steeds dat X voorzien is van de $\mathcal{A}$-topologie.

Lemma 1.2 *Zij $\kappa \in \mathcal{A}$. Dan is X_κ open en κ is een homeomorfisme van X_κ op V_κ.*

Bewijs. Zij κ een kaart. Dan is, voor iedere $\lambda \in \mathcal{A}$, de verzameling $\lambda(X_\lambda \cap X_\kappa) = V_{\lambda,\kappa}$ per definitie open in V_λ. Derhalve is X_κ open in de $\mathcal{A}$-topologie.

De kaart κ is per definitie bijectief. Zij $\Omega \subset V_\kappa$ open en schrijf $U = \kappa^{-1}(\Omega)$. Voor iedere $\lambda \in \mathcal{A}$ geldt dat $\lambda(X_\lambda \cap U) = \lambda(X_\lambda \cap X_\kappa \cap U) = \lambda \circ \kappa^{-1}(V_{\kappa,\lambda} \cap \Omega)$. De laatste verzameling is open in $V_{\lambda,\kappa}$, omdat de verkaarting $\lambda \circ \kappa^{-1}$ een homeomorfisme is. Er volgt dat $\lambda(X_\lambda \cap U)$ open in V_λ is. Derhalve is $U = \kappa^{-1}(\Omega)$ open in X. Aangezien dit voor iedere Ω geldt is κ continu.

Laat nu $U \subset X_\kappa$ open zijn. Dan is $\kappa(U) = \kappa(X_\kappa \cap U)$ open in V_κ volgens de definitie van de $\mathcal{A}$ topologie. Hieruit volgt dat κ^{-1} continu is. $\square$

Bewijs van Propositie 1.1. Laat de atlas $\mathcal{A}$ Hausdorff zijn. Laten voorts a_1, a_2 twee verschillende punten in X zijn. Kies kaarten κ_j met $a_j \in X_j := X_{\kappa_j}$, voor $j = 1, 2$. We beschouwen voor $j = 1, 2$ en $k \geq 1$ het beeld $U_j(k)$ onder κ_j^{-1} van de bol $V_j \cap B(\kappa_j(a_j), \frac{1}{k}))$. Wegens het bovenstaande lemma is de verzameling $U_j(k)$ open in X, voor $j = 1, 2$ en $k \geq 1$. We zullen aantonen dat voor zekere $k \geq 1$ geldt dat $U_1(k) \cap U_2(k) = \emptyset$. Stel dat dit niet het geval is. Dan is er voor iedere k een $x_k \in U_1(k) \cap U_2(k)$. Er geldt dat $x_k \in X_1 \cap X_2$. Bovendien geldt dat $\kappa_j(x_k) \to \kappa_j(a_j)$ voor $k \to \infty$. Uit $\kappa_1(a_1) \in V_{1,2} := V_{\kappa_1,\kappa_2}$ zou volgen dat $\kappa_2(a_1) = [\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}][\kappa_1(a_1)] = \lim_{k\to\infty} [\kappa_2 \circ \kappa_1^{-1}]\kappa_1(x_k) = \lim_{k\to\infty} \kappa_2(x_k) = \kappa_2(a_2)$, in tegenspraak met $a_1 \neq a_2$. Er moet dus gelden $\kappa_1(a_1) \notin V_{1,2}$ en evenzo $\kappa_2(a_2) \notin V_{2,1}$. Hieruit volgt dat de atlas $\mathcal{A}$ niet Hausdorff is, tegenspraak. We concluderen nu dat $U_1(k) \cap U_2(k) = \emptyset$ voor zekere k, zodat het paar a_1, a_2 aan de Hausdorff scheidings eis voldoet. Derhalve is X een Hausdorff ruimte.

Veronderstel nu omgekeerd dat X een Hausdorff ruimte is. We zullen aantonen dat $\mathcal{A}$ aan de Hausdorff eis voldoet. Veronderstel daartoe dat $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{A}$, en laat een rij punten x_k in $X_1 \cap X_2$ gegeven zijn zo voor elke $j = 1, 2$ de rij $\kappa_j(x_k)$ een limiet $v_j \in V_j$ heeft. Schrijf $a_j = \kappa_j^{-1}(v_j)$. Omdat κ_1 en κ_2 homeomorfismen zijn geldt $\lim_{k\to\infty} x_k = a_j$ in X_j, dus in X, voor $j = 1, 2$. Omdat X Hausdorff is, kan een rij ten hoogste één limiet hebben. Derhalve geldt $a_1 = a_2$, waaruit volgt dat $v_1 \in V_{1,2}$. Hieruit volgt dat $\mathcal{A}$ aan de Hausdorff eis voldoet. $\square$

2 Immersies, submersies en raakruimten

In het diktaat is onderbelicht gebleven hoe raakruimten zich gedragen onder inbeddingen en submersies. Het doel van deze aantekeningen is hierin meer duidelijkheid te verschaffen.

Tevens herformuleren we de bewijzen van de immersie- en de submersiestelling, waardoor deze – hopelijk – transparanter worden.

Het volgende lemma zal daarbij nuttig blijken.

Lemma 2.1 *Laat X een n-dimensionale C^k-variëteit zijn. Zij $a \in X$, en $L : T_aX \to \mathrm{R}^p$ een lineaire afbeelding. Dan bestaat er een C^k-afbeelding $f : X \to \mathrm{R}^p$ met $Df(a) = L$.*

Bewijs. Schrijf $L = (L_1, \ldots, L_p)$. Dan is $L_j \in T_a^*X$, dus er bestaat een $f_j \in C^k(X)$ met $df_j(a) = L_j$, voor $1 \leq j \leq p$. Schrijf $f = (f_1, \ldots, f_p)$, dan is $f \in C^k(X, \mathrm{R}^p)$ en $Df(a) = L$.
$\square$

De in het diktaat geformuleerde immersiestelling (Lemma 3.3.2) is een direkt gevolg van de onderstaande versie. Merk op dat het gebruik van de kwantoren (voor alle κ is er een λ) ook duidelijker wordt.

Lemma 2.2 (Immersiestelling). *Laten U en V open deelverzamelingen zijn van R^n resp. R^p, en zij $f : U \to V$ een C^k afbeelding ($k \geq 1$). Zij $a \in U$, en veronderstel dat de totale afgeleide $Df(a) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ injectief is. Dan bestaat er een C^1 afbeelding $\varphi : \mathrm{R}^p \supset\!\!\to \mathrm{R}^P$, lokaal diffeomorf te $f(a)$, zo dat $\varphi \circ f$ in een omgeving van a gelijk is aan de inclusie afbeelding $\iota : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ op de eerste n coordinaten.*

Bewijs. Schrijf $b = f(a)$. Uit de hypothese volgt dat $n \leq p$ en dat er een lineair isomorfisme $L : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^p$ bestaat zo dat $L \circ Df(a) = \iota$. Hierbij bestaat een C^1-afbeelding $\psi : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^p$ met $D\psi(b) = L$. Met de kettingregel volgt nu $D(\psi \circ f)(a) = \iota$. Schrijf $\psi \circ f = (g_1, g_2)$, volgens de ontbinding $\mathrm{R}^p = \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^{p-n}$. Dan is $Dg_1(a) = I$, dus g_1 is een lokaal diffeomorfisme te a. Zij g_1^{-1} een C^1-inverse van g_1, gedefinieerd op een voldoend kleine omgeving van $g_1(a)$. Dan heeft de afbeelding $h : \mathrm{R}^p \supset\!\!\to \mathrm{R}^p$ gedefinieerd door

$$h(u, v) = (g_1^{-1}(u), v - g_2(g_1^{-1}(u)),$$

op een voldoend kleine omgeving van $g(a)$, een inverteerbare totale afgeleide in $g(a)$, en is dus een lokaal diffeomorfisme te $g(a)$. Bovendien geldt:

$$h \circ \psi \circ f(x) = h(g_1(x), g_2(x)) = (x, 0).$$

De afbeelding $\varphi = h \circ \psi$ is derhalve het gezochte lokale diffeomorfisme. $\square$

Het volgende lemma geeft een nuttige karakterisering van de raakruimte van een ingebedde variëteit.

Lemma 2.3 *Laten X en Y C^k variëteiten zijn ($k \geq 1$), en $f : X \to Y$ een C^k inbedding met als beeld de C^k deelvariëteit $Z := f(X)$ van Y. Dan geldt voor iedere $a \in X$ dat $T_af : T_aX \to T_{f(a)}Y$ een injectieve lineaire afbeelding is met als beeld $T_{f(a)}Z$.*

Bewijs. We noteren de inclusie afbeelding $Z \to Y$ met ι en brengen in herinnering dat we, voor $b \in Z$, de injectieve raakafbeelding $T_b\iota : T_bZ \to T_bY$ gebruiken om T_bZ

te identificeren met de lineaire deelruimte $\mathrm{im}(T_b\iota)$ van T_bY. M.a.w., een vector $v \in T_bZ$ identificeren we met zijn beeld $T_b\iota(v)$ in T_bY.

Uit de definitie van inbedding volgt dat f een C^k diffeomorfisme is van X op Z; zij g de inverse van dit diffeomorfisme. Dan geldt:

$$g \circ f = I_X, \qquad f \circ g = \iota.$$

Zij $a \in X$, en schrijf $b = f(a)$. Dan geeft differentiatie van de bovenstaande composities en toepassing van de kettingregel, dat

$$T_bg \circ T_af = I_{T_aX}; \qquad T_af \circ T_bg = T_b\iota.$$

Aangezien I_{T_aX} bijectief is, volgt uit de eerste identiteit dat T_af injectief en T_bg surjectief is. Combineren we dit laatste met de tweede identiteit, dan vinden we dat T_af hetzelfde beeld heeft als $T_b\iota$. Gebruiken we de bovengenoemde identificatie, dan vinden we dat $\mathrm{im}(T_af) = \mathrm{im}(T_b\iota) = T_{f(a)}Z$. □

Opmerking 2.4 Het bovenstaande resultaat is ook lokaal van toepassing indien slechts gegeven is dat f een immersie is in een punt $a \in X$. In dat geval is er volgens Gevolg 3.3.3 een open omgeving U van a in X, zo dat $f|_U$ een inbedding is; derhalve is $f(U)$ een C^k deelvariëteit; de raakruimte aan deze deelvariëteit in het punt $f(a)$ wordt gegeven door: $T_{f(a)}[f(U)] = \mathrm{im}(T_af)$.

De submersiestelling uit het diktaat (Lemma 3.4.1) is een direct gevolg van de volgende variant. Merk op dat het gebruik van de kwantoren (voor alle λ is er een κ) ook duidelijker wordt.

Stelling 2.5 *Laten U en V open deelverzamelingen zijn van R^n resp. R^p, en zij $f : U \to V$ een C^k afbeelding ($k \geq 1$). Zij $a \in U$, en veronderstel dat de totale afgeleide $Df(a) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ surjectief is. Dan bestaat er een C^1 afbeelding $\varphi : \mathrm{R}^n \supset\!\!\to \mathrm{R}^n$, lokaal diffeomorf te a zo dat $f \circ \varphi^{-1}$ in een omgeving van $\varphi(a)$ gelijk is aan de projectie afbeelding $\pi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ op de eerste p coordinaten.*

Bewijs. Uit de hypothese volgt dat $n \geq p$ en dat er een lineair isomorfisme $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ bestaat zo dat $Df(a) \circ L^{-1} = \pi$. Hierbij bestaat een C^k-afbeelding $\psi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ zo dat $D\psi(a) = L$. De afbeelding ψ is een lokaal diffeomorfisme. Schrijf $b = \psi(a)$ en zij ψ^{-1} een C^k-inverse van ψ gedefinieerd in een omgeving van b. Dan is $D(\psi^{-1})(b) = L^{-1}$, en met de kettingregel volgt dat de afbeelding $g = f \circ \psi^{-1}$ een totale afgeleide $Dg(b) = \pi$ heeft. Schrijven we in het bijzonder $Dg(b) = (D_1g(b), D_2g(b))$ volgens de ontbinding $\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^p \times \mathrm{R}^{n-p}$, dan zien we dat $D_1g(b) = I$. Definieer de afbeelding $h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ door $h(u,v) = (g(u,v), v)$. Dan is h een C^k afbeelding terwijl $Dh(b)$ bijectief is. Wegens de inverse functie stelling is h een lokaal diffeomorfisme te b. Zij h^{-1} een C^k-inverse, gedefinieerd op een omgeving van $h(b)$. Dan is

$$f \circ \psi^{-1} \circ h^{-1}(u,v) = g(h^{-1}(u,v)) = h(h^{-1}(u,v))_1 = (u,v)_1 = u.$$

Hieruit volgt dat $\varphi = h \circ \psi$ voldoet aan alle vereisten. □

Op submersies is het volgende resultaat van toepassing.

Lemma 2.6 *Laten X en Y C^k variëteiten zijn en $f : X \to Y$ een C^k submersie ($k \geq 1$). Zij $b \in Y$. De vezel $f^{-1}(b)$ is een C^k deelvariëteit van X. In een punt $a \in f^{-1}(b)$ wordt de raakruimte aan deze deelvariëteit gegeven door*

$$T_a(f^{-1}(b)) = \ker(T_a f).$$

Bewijs. Dat $Z := f^{-1}(b)$ een C^k-deelvariëteit is van X volgt uit Gevolg 3.4.2. Volgens hetzelfde gevolg is de dimensie van deze deelvariëteit gelijk aan $n - p$. Zij ι de inclusie afbeelding van Z in X. Dan is $f \circ \iota$ de constante afbeelding $x \mapsto b$. Hieruit volgt dat $0 = T_a(f \circ \iota) = T_a f \circ T_a \iota$, dus $T_a f = 0$ op $\mathrm{im}(\iota) \simeq T_a Z$. We concluderen dat

$$\ker T_a f \supset T_a Z. \tag{1}$$

Uit het gegeven dat f een submersie is volgt dat $T_a f$ surjectief is van $T_a X$ naar $T_b Y$. Hieruit volgt:

$$\dim(\ker T_a f) = \dim T_a X - \dim T_b Y = n - p = \dim T_a Z.$$

Beide ruimten in (1) hebben dezelfde dimensie; de inclusie moet derhalve een gelijkheid zijn. □

Opmerking 2.7 Ook het bovenstaande lemma kan lokaal toegepast worden als slechts gegeven is dat $f : X \to Y$ een submersie is in het punt $a \in X$. Uit Gevolg 3.4.2 volgt dan het bestaan van een open omgeving $U \ni a$ in X, zo dat $f|_U$ een submersie is. Er geldt $(f|_U)^{-1}(b) = f^{-1}(b) \cap U$. Uit het bovenstaande lemma volgt dat $f^{-1}(b) \cap U$ een C^k-deelvariëteit van dimensie $n - p$ is; de raakruimte in een punt $a \in f^{-1}(b) \cap U$ wordt gegeven door $T_a(f^{-1}(b) \cap U) = \ker(T_a f)$.

We eindigen deze paragraaf met een nuttig lemma, dat de raakafbeelding van de beperking van een functie tot een deelvariëteit beschrijft.

Lemma 2.8 *Laat Z een C^k-deelvariëteit zijn van de variëteit X en zij f een C^k-afbeelding van X naar een variëteit Y ($k \geq 1$). Dan is $f|_Z$ een C^k afbeelding van Z naar Y; de raakafbeelding in een punt $a \in Z$ wordt (na geschikte identificaties) gegeven door:*

$$T_a(f|_Z) = T_a f|_{T_a Z}.$$

Bewijs. We gebruiken dat de beperking geschreven kan worden als een samenstelling; zij ι de inclusie-afbeelding van Z in X, dan is $f|_Z = f \circ \iota$. Deze samenstelling van C^k-afbeeldingen is weer C^k. Differentiatie en toepassing van de kettingregel levert:

$$T_a(f|_Z) = T_a f \circ T_a(\iota).$$

Afgesproken is dat we $T_a Z$ identificeren met een deelruimte van $T_a X$ via $T_a(\iota)$. Door deze identificatie wordt $T_a(\iota)$ de inclusie afbeelding $j : T_a Z \to T_a X$, dus

$$T_a(f|_Z) = T_a f \circ j = T_a f|_{T_a Z}.$$

□

3 Vezelbundels en vectorbundels

In plaats van de definitie van vezelbundel in Opmerking 3.4.1 is ook de volgende definitie gangbaar:

Definitie 3.1 Laten Y, Z C^k-variëteiten zijn. Een **vezelbundel** met basis Y en vezel Z is een C^k-afbeelding π (de 'projectie') van een C^k-variëteit X (de 'bundel') naar Y met de volgende eigenschap:

v') *voor ieder punt $b \in Y$ bestaat een open omgeving $V \ni b$ in Y, zo dat π een C^k lokale trivialisering met vezel Z over V toelaat.*

Merk op dat de conditie v') equivalent is met conditie v) in het dictaat. Als in het dictaat merken we op dat de projectie π surjectief en submersief is. Voorts is iedere vezel $\pi^{-1}(b)$ $(b \in Y)$ C^k-diffeomorf met Z. Tenslotte is X de disjuncte vereniging van de vezels $\pi^{-1}(b)$, vandaar de naam bundel.

Een veel voorkomend type vezelbundel is de vectorbundel. Hierbij heeft iedere vezel de structuur van een vectorruimte.

Definitie 3.2 Zij X een C^k-varieëteit, en F een eindig dimensionale vectorruimte (over $\mathrm{K} = \mathrm{R}$ of C). Onder een **vectorbundel** met vezel F op X verstaan we een C^k-afbeelding π ('de projectie') van een C^k-variëteit E ('de bundel') naar X ('de basis') zodanig dat

(1) iedere vezel $E_x := \pi^{-1}(x)$, $(x \in X)$ is voorzien van de structuur van een vectorruimte over K;

(2) voor iedere $a \in X$ bestaat een open omgeving U van a in X en een C^k lokale trivialisering $\tau : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ zo dat voor iedere $x \in U$ de afbeelding $\tau_x = \tau | E_x$ van E_x naar $\{x\} \times F$ lineair is.

De vectorbundel heet **triviaal** als er een trivialisering van π als in (2) bestaat met $U = X$. De dimensie van F (over K) wordt ook de **rang** van de vectorbundel (over K) genoemd.

Opmerking 3.3 Merk op dat een vectorbundel met vezel F in het bijzonder een vezelbundel met vezel F is.
In de bovenstaande definitie is stilzwijgend verondersteld dat $\{x\} \times F$ voorzien is van de structuur van vectorruimte die de afbeeling $F \to \{x\} \times F$, $v \mapsto (x, v)$ tot een lineair isomorfisme maakt.

Zij X een C^k-variëteit, $k \geq 1$. We merken op dat de in §4.1 gedefinieerde **raakbundel** TX een C^{k-1}-vectorbundel op X is. Immers, de vezels zijn precies de raakruimten en die bezitten een lineaire structuur. Is $\kappa : X_\kappa \to V_\kappa$ een kaart van X, dan wordt door

$$\tau : \pi^{-1}(X_\kappa) \to X_\kappa \times \mathrm{R}^n, \quad (x, v) \mapsto (x, D\kappa(x)v)$$

een lokale C^{k-1} trivialisering als in (2) gedefinieerd. Voorts valt de in §4.2 gedefineerde notie van trivialiteit samen met de notie van trivialiteit van TX *als vectorbundel.*

Definitie 3.4 Zij $\pi : E \to X$ een C^k-vectorbundel over X. Onder een (C^k-) snede van E verstaan we een (C^k-) afbeelding $s : X \to E$ met

$$\pi \circ s = I_X;$$

(anders gezegd, met $s(x) \in E_x$ voor iedere $x \in X$).

Merk op dat in deze terminologie een vectorveld op X precies een snede van de raakbundel aan X is.

Wij hebben ervoor gekozen vectorbundels in te voeren om de weg te effenen voor de definitie van tensoren op een variëteit. Dit zullen snedes zijn van special vectorbundels, de zogenaamde tensorbundels.

4 Vezelbundels en submersies

In deze paragraaf veronderstellen we dat alle voorkomende variëteiten C^∞ zijn. Het volgende resultaat stelt ons in staat vezelbundels met compacte vezel te herkennen.

Stelling 4.1 *Laten Y, X variëteiten zijn en $\pi : Y \to X$ een C^∞-afbeelding. Veronderstel voorts dat X samenhangend is. Dan zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig.*

(a) *$\pi : Y \to X$ is een C^∞-vezelbundel met compacte vezel.*

(b) *π is een propere submersie.*

Bewijs. We bewijzen eerst de gemakkelijkste implicatie, namelijk '$(a) \Rightarrow (b)$'. Veronderstel (a). We veronderstellen eerst dat de vezelbundel triviaal is. Dan is er een trivialisering $\tau : Y \to X \times F$, met F een compacte variëteit. Zij $p : X \times F \to X$ de projectie afbeelding. Dan is, voor iedere $(a, f) \in X \times F$, de ruimte $T_{(a,f)}(X \times F)$ te identificeren met $T_aX \oplus T_fF$. Onder deze identificatie correspondeert $T_{(a,f)}p$ met de projectie afbeelding $T_aX \oplus T_fF \to T_aX$; de laatste is surjectief, p is derhalve een submersie. Omdat $\pi = p \circ \tau$, met τ een diffeomorfisme, volgt hieruit dat π een submersie is. Is $K \subset X$ compact, dan is $p^{-1}(K) = K \times F$; de laatste verzameling is het product van twee compacta, dus zelf weer compact. Er volgt dat $\pi^{-1}(K) = \tau^{-1}(K \times F)$ compact is.

We behandelen nu het algemene geval. Aangezien een vezelbundel lokaal triviaal is, volgt uit het bovenstaande dat de projectie π een submersie is. Om de properheid van π aan te tonen veronderstellen we dat $K \subset X$ compact is. Voor iedere $k \in K$ bestaat er een open omgeving U_k van k in X waarover π te trivialiseren is; binnen die open omgeving bestaat er een open omgeving V_k van k met een afsluiting $\bar{V}_k$ die compact is en in U_k ligt. De $V_k, k \in K$ vormen een open overdekking van K. Uit de compactheid van K volgt het bestaan van een eindig deel $\{k_1, \ldots, k_n\} \subset K$ zo dat $K = \cup_{1 \le j \le n} V_{k_j}$. Schrijf $K_j = K \cap \bar{V}_{k_j}$. Dan is K_j compact, en $K = \cup_{1 \le j \le n} K_j$. Omdat K_j binnen de trivialiserende omgeving U_{k_j} ligt geldt dat $\pi^{-1}(K_j)$ compact is. Het volledig origineel $\pi^{-1}(K)$ is de eindige vereniging van dergelijke compacta, dus compact.

In het vervolg concentreren we ons op het bewijs van de omgekeerde implicatie '$(b) \Rightarrow (a)$'. Daartoe treffen we enige voorbereidingen door middel van lemma's en definities. Stromingen van vectorvelden zullen voor ons van nut zijn wegens het volgende resultaat.

Lemma 4.2 *Laat X een variëteit van dimensie n zijn, Z een deelvariëteit van dimensie $k \leq n$ en $a \in Z$ een punt. Zij $\xi_1, \ldots, \xi_{n-k}$ een stel C^∞-vectorvelden op X zo dat*

$$\mathrm{R}\xi_1(a) + \cdots + \mathrm{R}\xi_{n-k}(a) + T_a Z = T_a X. \tag{2}$$

Dan bestaat er een open omgeving U van 0 in R^{n-k} en een open omgeving V van a in Z zo dat de afbeelding

$$\Phi : U \times V \to X, (t_1, \ldots, t_n, z) \mapsto e^{t_1\xi_1} \circ \cdots \circ e^{t_n\xi_n} z$$

een C^∞-diffeomorfisme definieert op een open omgeving van a in X.

Bewijs. De afbeelding Φ is gedefinieerd op $U \times V$ voor voldoend kleine omgevingen U en V (ga na). We berekenen eerst de raakafbeelding van Φ in het punt $(0, \ldots, 0, z)$. Uit dimensieoverwegingen volgt dat de vector som in (2) direkt is. De partiële afgeleide van Φ naar de variabele t_j wordt gegeven door

$$\partial_j \Phi(0, a) = \frac{d}{dt_j} e^{t_j\xi_j}(a) = \xi_j(a).$$

De partiële raakafbeelding van Φ naar de variabele z wordt in het punt $(0, a)$ gegeven door

$$T_{Z,(0,a)}\Phi = T_a(z \mapsto \Phi(0, z)) = I_{T_a Z}.$$

De raakafbeelding $T_{(0,a)}\Phi : \mathrm{R}^{n-k} \times T_a Z \to T_a X$ wordt derhalve gegeven door

$$T_{(0,a)}\Phi(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_{n-k}, \bar{z}) = \sum_{j=1}^{n-k} \bar{t}_j \xi_j(a) + \bar{z}.$$

Uit de direktheid van de som (2) volgt dat deze raakafbeelding bijectief is. Met de inverse functiestelling volgt nu dat U en V zo gekozen kunnen worden dat Φ een diffeomorfisme is van $U \times V$ op een open deel van X. □

Zij $f : Y \to X$ een C^∞-afbeelding van variëteiten, en laten ξ, η vectorvelden op X, respectievelijk Y zijn. De vectorvelden ξ en η heten **geconjugeerd** via f, of f-geconjugeerd, als voor alle $y \in Y$ geldt:

$$\xi(f(y)) = T_y f(\eta(y)).$$

Zie ook de definitie na het bewijs van Lemma 4.6.1 in het dictaat. Zijn ξ en η geconjugeerd, dan zijn ook hun stromingen via f met elkaar verbonden.

Lemma 4.3 *Zij $f : Y \to X$ een C^∞-afbeelding van variëteiten, en laten ξ, η C^1 vectorvelden op X, respectievelijk Y zijn, geconjugeerd via f. Dan geldt voor elke $t \in \mathrm{R}$ dat $f(Y^t) \subset X^t$. Bovendien geldt:*

$$f \circ e^{t\eta} = e^{t\xi} \circ f \qquad \text{op} \qquad Y^t.$$

Bewijs. Zij $y \in Y$, dan wordt door $c : s \to e^{s\eta}y$ een integraalkromme van η met startpunt y gedefinieerd. Uit Lemma 4.6.1 (a) uit het dictaat volgt nu dat $f \circ c$ een integraalkromme bij ξ met startpunt $f(y)$ is. Hieruit leiden we af dat $t \in I_\eta(y) \Rightarrow t \in I_\xi(f(y)$, dus $f(Y^t) \subset X^t$. Tevens zien we dat voor $s \in I_\eta(y)$ geldt $f \circ c(s) = e^{s\xi} f(y)$, waaruit we het gewenste verband tussen de stromingen aflezen. □

In het bewijs van het onderstaande lemma zullen we de techniek van partities van 1 nodig hebben. Een collectie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van een topologische ruimte X heet **lokaal eindig** indien voor elke $x \in X$ een omgeving U bestaat zo dat de collectie

$$\mathcal{A}_U := \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap U \neq \emptyset\}$$

eindig is.

Lemma 4.4 *Zij X een lokaal compacte Hausdorff ruimte, $\mathcal{A}$ een collectie van deelverzamelingen van X. Dan zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig.*

(a) *De collectie $\mathcal{A}$ is lokaal eindig.*

(b) *Voor iedere compacte verzameling $K \subset X$ geldt dat de collectie $\mathcal{A}_K$ eindig is.*

Bewijs. '$(a) \Rightarrow (b)$': stel (a) en zij $K \subset X$ compact. Voor iedere $k \in K$ bestaat een open omgeving U_k van k waarvoor $\mathcal{A}_{U_k}$ eindig is. Wegens compactheid is er een eindig stel $k_1, \dots, k_n$ zo dat de U_{k_i} de verzameling K overdekken. Nu is $\mathcal{A}_K = \cup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{A}_{U_{k_i}}$, dus eindig.

'$(b) \Rightarrow (a)$': stel (b) en zij $x \in X$. Dan heeft x een compacte omgeving U. De collectie $\mathcal{A}_U$ is eindig. □

Zij X een topologische ruimte. Een open overdekking $\mathcal{V}$ van X heet een **verfijning** van een open overdekking $\mathcal{U}$ van X als er voor iedere verzameling $V \in \mathcal{V}$ een verzameling $U \subset \mathcal{U}$ bestaat zo dat $V \subset U$.

Een topologische Hausdorffruimte X heet **paracompact** indien iedere open overdekking van X een lokaal eindige verfijning bezit. Men kan laten zien dat een variëteit paracompact is dan en slechts dan als elk van zijn samenhangscomponenten een aftelbare vereniging van compacte verzamelingen is (dictaat, Opmerking 5.6.4).

Is X een variëteit en $f \in C(X)$ een continue functie, dan definiëren we de **drager** $\operatorname{supp} f$ van f als de afsluiting van de collectie van punten $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Met $C_c^\infty(X)$ noteren we de ruimte van C^∞-functies met compacte drager op X.

Definitie 4.5 Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van de variëteit X. Onder een **partitie van 1 op X ondergeschikt aan de open overdekking** $\mathcal{U}$ verstaan we een collectie compact gedragen C^∞-functies $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ met de volgende eigenschappen.

(a) Voor elke $i \in \mathcal{I}$ is er een $U_i \in \mathcal{U}$ met $\operatorname{supp}\psi_i \subset U_i$.

(b) Voor elke $i \in \mathcal{I}$ geldt $\psi_i \geq 0$.

(c) De verzamelingen $\operatorname{supp}\psi_i,\ i \in \mathcal{I}$, vormen een lokaal eindige collectie van deelverzamelingen van X.

(d) Voor iedere $x \in X$ geldt:
$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \psi_i(x) = 1.$$

Opmerking 4.6 We merken op dat conditie (c) garandeert dat voor iedere compacte verzameling $K \subset X$ slechts eindig vele ψ_i ongelijk aan nul zijn op K. De som in (d) is derhalve in essentie eindig.

Uit condititie (b) en (d) volgt dat $0 \leq \psi_i \leq 1$ voor elke $i \in \mathcal{I}$.

Voor $i \in \mathcal{I}$ definiëren we de open verzameling $V_i := \{x \in X \mid \psi_i(x) \neq 0\}$. Dan volgt uit (d) dat de collectie $\mathcal{V} := \{V_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ een open overdekking is van X. Wegens (c) is deze open overdekking lokaal eindig, en wegens (a) is $\mathcal{V}$ een verfijning van $\mathcal{U}$. De overdekking $\mathcal{V}$ is dus een lokaal eindige verfijning van $\mathcal{U}$.

Voor paracompacte variëteiten geldt de volgende stelling betreffende partities van 1.

Stelling 4.7 *Zij X een paracompacte variëteit en zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Dan bestaat er een partitie van 1 op X, ondergeschikt aan de overdekking $\mathcal{U}$.*

Voor een bewijs van deze stelling verwijzen we naar het dictaat en naar de literatuur (zie dictaat, Opm. 5.6.4).

Partities van 1 worden gebruikt om lokaal geconstrueerde objecten aan elkaar te plakken tot globale. Voorbeelden van dit principe heeft u reeds gezien bij Analyse C. Een andere verhelderende toepassing van het principe wordt gegeven in het bewijs van het volgende lemma.

Lemma 4.8 *Laten X en Y variëteiten zijn, met Y paracompact. Zij $\pi : Y \to X$ een C^∞-submersie en zij ξ een C^∞-vectorveld op X. Dan bestaat er een C^∞-vectorveld η op Y dat π-geconjugeerd is met ξ.*

Bewijs. Zij $n = \dim X$, $p = \dim Y$. We beginnen met een lokale constructie. Met een partitie van 1 zullen we de lokale constructies daarna aaneensmeden tot een globale.

Zij $b \in Y$. Kies een kaart κ van $a := \pi(b)$. Dan is er wegens de submersiestelling een open omgeving $U = U_b$ van b en een C^∞-diffeomorfisme φ van U op een open deel van R^p, zo dat $\kappa\circ\pi\circ\varphi^{-1}$ op $\varphi(U)$ gelijk is aan de projectie $p : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^n$ op de eerste n coordinaten.

Het vectorveld $\xi_\kappa = \kappa_*\xi$ is van de vorm $\xi_\kappa(x) = (x, \xi'(x))$, met $\xi' : V_\kappa \to \mathrm{R}^n$ een C^∞-afbeelding. Definieer het vectorveld v op $\varphi(U)$ door $v(z) = (z\,,\,(\xi'(p(z)), 0))$. Aangezien

$T_z p : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^n$ de projectie op de eerste n coordinaten is, is $T_z p(v(z)) = (p(z), \xi'(z)) = \xi_\kappa(p(z))$. Dus, v en ξ_κ zijn p-geconjugeerd. Aangezien φ en κ C^∞-diffeomorfismen zijn volgt hieruit dat de C^∞-vectorvelden $\eta_b := \varphi_* v$ en $\xi|_{\pi(U_b)}$ π-geconjugeerd zijn.

De verzamelingen U_b vormen een open overdekking van Y. Er bestaat derhalve een ondergeschikte partitie van 1, zeg $\{\psi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Het vectorveld $\psi_i \eta_{b_i}$ is op U_{b_i} een compact gedragen C^∞-vectorveld; door het als 0 voort te zetten buiten U_{b_i} vatten we het op als C^∞-vectorveld op Y. We definiëren het vectorveld η op Y door

$$\eta(y) = \sum_i \psi_i(y)\eta_i(y).$$

Deze som is lokaal eindig en definieert derhalve een C^∞-vectorveld op Y. Zij $y \in Y$. Dan volgt uit de lineariteit van de raakafbeelding en het lokaal eindig zijn van de som dat

$$T_y\pi(\eta(y)) = \sum_i \psi_i(y) T_y\pi(\eta_i(y)).$$

Er geldt dat $T_y\pi(\eta_i(y)) = \xi(\pi(y))$ voor alle $y \in U_{b_i}$; voor $y \notin U_{b_i}$ is $\psi_i(y)$ gelijk aan nul. Derhalve is, voor elke $y \in Y$,

$$T_y\pi(\eta(y)) = \sum_i \psi_i(y)\xi(\pi(y)) = [\sum_i \psi_i(y)]\xi(\pi(y)) = \xi(\pi(y)).$$

Het vectorveld η is derhalve π-geconjugeerd aan ξ. $\square$

Voltooiïng van het bewijs van Stelling 4.1: Volgens Stelling 3.4.3 uit het dictaat is π surjectief. Zij $a \in X$. Volgens de zojuist genoemde stelling is de vezel $Z = \pi^{-1}(a)$ een compacte deelvariëteit van dimensie $p - n$. We zullen eerst aantonen dat er een open omgeving Ω van a is waarover π een triviale vezelbundel definieert. Hierbij mogen we veronderstellen dat X een aftelbare vereniging is van compacte deelverzamelingen (zo nodig vervangen we X door een geschikte open omgeving van a). Wegens de properheid van π is dan ook Y een aftelbare vereniging van compacta, dus paracompact.

Er bestaan C^∞-vectorvelden $\xi_1, \dots, \xi_n$ op X zo dat $\xi_1(a), \dots, \xi_n(a)$ een basis van T_aX vormen (gebruik bijvoorbeeld een kaart rond a om dit in te zien).

Er bestaan vervolgens, wegens Lemma 4.8, C^∞-vectorvelden $\eta_1, \dots, \eta_n$ op Y met de eigenschap dat η_j π-geconjugeerd is aan ξ_j.

We beschouwen de afbeelding

$$\Phi : (t_1, \dots, t_n) \mapsto e^{t\xi_1} \circ \cdots \circ e^{t\xi_n} a.$$

Wegens Lemma 4.2, toegepast met $Z = \{a\}$, is deze afbeelding diffeomorf van een open omgeving U van 0 in R^n op een open omgeving van a in X.

We beschouwen voorts de afbeelding $\Psi : \mathrm{R}^n \times Z \to Y$ gegeven door

$$\Psi(t_1, \dots, t_n, z) = e^{t_1\eta_1} \circ \cdots \circ e^{t_n\eta_n} z.$$

Deze afbeelding is gedefinieerd op een voldoend kleine omgeving V_0 van $\{0\} \times Z$ in $\mathrm{R}^n \times Z$. Door herhaald toepassen van Lemma 4.3 zien we dat op V_0 het volgende geldt:

$$\pi(\Psi(t, z)) = e^{t_1\xi_1}\pi(e^{t_2\eta_2}\circ \cdot \circ e^{t_n\eta_n} z) = \ldots = e^{t\xi_1}\circ \cdots \circ e^{t\xi_n}\pi(z) = \Phi(t).$$

Hieruit blijkt dat Ψ injectief is op de omgeving $V_1 := V_0 \cap (U \times Z)$ van $\{0\} \times Z$. Voor iedere $c \in Z$ bestaat er wegens Lemma 4.2 een open omgeving V_c' van 0 in R^n en een open omgeving V_c'' van c in Z zo dat $V_c' \times V_c'' \subset V_1$ en zo dat Ψ de omgeving $V_c' \times V_c''$ diffeomorf afbeeldt naar een open deel van Y. De open verzamelingen V_c'', $c \in Z$, overdekken Z. Uit de compactheid van Z volgt het bestaan van een eindige collectie $c_1, \ldots, c_r$ in Z zo dat de verzamelingen V_{c_i}'', $1 \leq i \leq r$, de variëteit Z reeds overdekken.

Kies een $\delta > 0$ zo dat $B(0; \delta) \subset V_{c_i}'$ voor elke i. Dan geldt

$$B(0; \delta) \times Z = B(0; \delta) \times \cup_{1 \leq i \leq r} V_{c_i}'' \subset \cup_{1 \leq i \leq r} V_{c_i}' \times V_{c_i}''.$$

Derhalve is $V := B(0; \delta) \times Z$ een open omgeving van $\{0\} \times Z$ waarop Ψ een lokaal diffeomorfisme is. Aangezien $V \subset V_1$, is Ψ tevens injectief, dus een diffeomorfisme van V op een open deel van Y. Bovendien geldt voor $(t, z) \in V$ dat $\pi(\Psi(t, z)) = \Phi(t)$; met andere woorden $\pi \circ \Psi = \Phi \circ p$ op V. De afbeelding Φ beeldt $B(0; \delta)$ diffeomorf af op een open omgeving Ω van a in X. We verkrijgen nu het volgende commutatieve diagram van C^∞-afbeeldingen

$$\begin{array}{cccc} & B(0;\delta) \times Z & \xrightarrow{\Psi} & Y \\ p & \downarrow & & \downarrow \; \pi \\ & B(0;\delta) & \xrightarrow{\Phi} & \Omega \end{array} \quad ;$$

hierin is p de projectie afbeelding. Aangezien Φ en Ψ diffeomorfismen zijn leiden we af dat $\mathrm{im}(\Psi) = \pi^{-1}(\Omega)$. Hieraan zien we dat $\pi|_{\pi^{-1}(\Omega)}$ een triviale vezelbundel met vezel Z is.

Tenslotte moeten we nog aantonen dat voor ieder tweetal $a_1, a_2 \in X$ de vezels $\pi^{-1}(a_1)$ en $\pi^{-1}(a_2)$ diffeomorf zijn. Hiertoe gebruiken we de samenhang van X.

We definiëren de relatie $\sim$ op X door:

$$x_1 \sim x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{-1}(x_1) \quad \text{en} \quad \pi_{-1}(x_2) \quad \text{zijn diffeomorfe variëteiten.}$$

Dan is $\sim$ een equivalentie relatie. De equivalentie klassen vormen een partitie van X; d.w.z., het zijn deelverzamelingen van X die X als disjunkte vereniging hebben. We noteren de collectie van equivalentieklassen met $X/\sim$.

Zij $C \in X/\sim$; is $a \in C$ dan volgt uit het voorgaande dat er een open omgeving Ω van a bestaat waarboven π triviaal is. De vezels $\pi^{-1}(x)$ zijn dus diffeomorf met $\pi^{-1}(a)$ voor alle $x \in \Omega$. Hieruit blijkt dat $\Omega \subset [a] = C$. Iedere equivalentieklasse $C \in X/\sim$ is derhalve open. Anderzijds is C het complement van de vereniging V der equivalentieklassen $D \in X/\sim$ met $D \neq C$. De verzameling V is een vereniging van open verzamelingen, dus open; het complement C is daarom ook gesloten. Ieder element van $X/\sim$ is dus niet leeg en open en gesloten, en moet dus de gehele ruimte X zijn. Hieruit volgt dat er precies één equivalentieklasse is, namelijk X. Dus $a_1 \sim a_2$ voor alle $a_1, a_2 \in X$. $\square$

5 Vectorvelden en differentiaaloperatoren

Laat $V \subset \mathrm{R}^n$ een open deelverzameling zijn. Is $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{N}^n$, dan schrijven we $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ en

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n};$$

hierin staat ∂_j voor partiële differentiatie naar de j-de variabele. Onder een lineaire partiële differentiaaloperator met C^∞-coëfficiënten op V verstaan we een operator $P : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ van de vorm

$$P : f \mapsto \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha \partial^\alpha f.$$

Hierin is $p \in \mathrm{N}$; voorts zijn c_α (de coëfficiënten van P) funkties in $C^\infty(V)$. Merk op dat de bovenstaande expressie uniek is.

De kleinst mogelijke keuze van p zo dat de bovenstaande expressie geldt heet de **orde** van P.

In het vervolg veronderstellen we steeds dat X een C^∞-variëteit is van dimensie n. Onder een lineaire partiële **differentiaaloperator** met C^∞ coëfficënten van orde $\leq p$ op X verstaan we een operator $P : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ die in lokale coördinaten van het bovenstaande type is, d.w.z., voor iedere kaart κ van X bestaan er C^∞-funkties $c_\alpha^\kappa : V_\kappa \to \mathrm{R}$, $\alpha \in \mathrm{N}^n$, $|\alpha| \leq p$, zo dat, voor alle $f \in C^\infty(X)$,

$$\kappa_*(Pf) = \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha \partial^\alpha(\kappa_* f). \tag{3}$$

De collectie $\mathcal{D}_p(X)$ van dergelijke differentiaaloperatoren op X is een lineaire deelruimte van $\mathrm{End}(C^\infty(X))$, de ruimte van alle lineaire afbeeldingen van $C^\infty(X)$ naar zichzelf. We noteren de vereniging van de ruimten $\mathcal{D}_p(X)$, voor $p \in \mathrm{N}$, met $\mathcal{D}(X)$.

Laat $\varphi : X \to Y$ een diffeomorfisme van X op een C^∞-variëteit Y zijn. We brengen in herinnering dat door $\varphi_* : f \mapsto f \circ \varphi^{-1}$ een lineaire bijectie van $C^\infty(X)$ op $C^\infty(Y)$ gedefinieerd wordt. Men gaat nu gemakkelijk na dat door $P \mapsto \varphi_* \circ P \circ \varphi_*^{-1}$ een lineaire bijectie van $\mathcal{D}_p(X)$ op $\mathcal{D}_p(Y)$ gedefinieerd wordt. Deze bijectie noteren we weer met φ_*; dus $\varphi_*(P) = \varphi_* \circ P \circ \varphi_*^{-1}$.

Merk op dat de vergelijking (3) nu ook kort herschreven kan worden als

$$\kappa_*(P|_{X_\kappa}) = \sum_{|\alpha| \leq p} c_\alpha \partial^\alpha.$$

De collectie van C^∞ vectorvelden op X noteren we in het vervolg met $\mathcal{V}(X)$. Is $v \in \mathcal{V}$, dan definiëren we de operator $\mathrm{d}_v : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ door

$$\mathrm{d}_v f(x) = df(x)[v(x)], \qquad (x \in X);$$

we brengen hierbij in herinnering dat $df(x) = T_x f$. We onderzoeken hoe de operator d_v transformeert onder een diffeomorfisme φ van X op een variëteit Y.

Lemma 5.1 *Het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(X) & \xrightarrow{\mathrm{d}_v} & C^\infty(X) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ C^\infty(Y) & \xrightarrow{\mathrm{d}_{\varphi_* v}} & C^\infty(Y) \end{array}$$

Bewijs. Zij $f \in C^\infty(X)$. Dan geldt, voor $y \in Y$, wegens de kettingregel dat

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\varphi_* v}(\varphi_* f)(y) &= T_y[f \circ \varphi^{-1}](\varphi_* v(y)) \\ &= [T_{\varphi^{-1}(y)} f \circ T_y \varphi^{-1}](T_{\varphi^{-1}(y)} \varphi v(\varphi^{-1}(y))) \\ &= T_{\varphi^{-1}(y)} f(v(\varphi^{-1}(y))) \\ &= \mathrm{d}_v f(\varphi^{-1}(y)) = \varphi_*[\mathrm{d}_v f](y). \end{aligned}$$

□

Is X een open deel V van R^n, dan correspondeert het vectorveld v met een gladde afbeelding $v : V \to \mathrm{R}^n$. Is $f \in C^\infty(\mathrm{R}^n)$, dan wordt $\mathrm{d}_v f$ gegeven door

$$\mathrm{d}_v f(x) = Df(x)v(x) = \sum_{i=1}^{n} v^i(x) \partial_i f(x), \tag{4}$$

m.a.w., $\mathrm{d}_v f(x)$ is de richtingsafgeleide van f in x in de richting $v(x)$. We zien dat $\mathrm{d}_v \in \mathcal{D}^1(V)$.

In de algemene situatie dat v een vectorveld op een variëteit X is, ziet men gemakkelijk in dat d_v ook te beperken is tot een kaartomgeving X_κ en dan een lineaire afbeelding van $C^\infty(X_\kappa)$ naar zichzelf definieert. Bovendien volgt uit het bovenstaande lemma, toegepast op het diffeomorfisme $\kappa : X_\kappa \to V_\kappa$ dat

$$\kappa_* \circ \mathrm{d}_v \circ \kappa_*^{-1} = \mathrm{d}_{\kappa_* v}.$$

De operator in het laatste lid behoort tot $\mathcal{D}_1(V_\kappa)$. Uit deze gedaante in lokale kaarten leiden we nu af dat $\mathrm{d}_v \in \mathcal{D}_1$.

Is $P \in \mathcal{D}_1(X)$, dan definiëren we de constante term c_P van P als de funktie $c_P := P(1_X)$. Hierin is 1_X de constante funktie 1 op X. Verder definiëren we

$$\mathcal{D}_1^+(X) = \{P \in \mathcal{D}_1(X) \mid c_P = 0\}.$$

Lemma 5.2 *De afbeelding $v \mapsto \mathrm{d}_v$ is een lineair isomorfisme van $\mathcal{V}(X)$ op $\mathcal{D}_1^+(X)$.*

Bewijs. In het bovenstaande zagen we dat $v \mapsto \mathrm{d}_v$ de ruimte $\mathcal{V}(x)$ afbeeldt in $\mathcal{D}_1(X)$. De lineariteit van de afbeelding volgt direkt uit de definitie van d_v. Voorts is $T_x(1_X) = 0$ voor alle $x \in X$, dus $\mathrm{d}_v(1_X) = 0$, dus $\mathrm{d}_v \in \mathcal{D}_1^+(X)$ voor alle $v \in \mathcal{V}(X)$.

Is $\mathrm{d}_v = 0$, dan is $\mathrm{d}_{\kappa_* v} = 0$ voor elke kaart κ, en uit de gedaante (4) blijkt dan dat $\kappa_* v = 0$, dus $v = 0$. Hieruit volgt de injectiviteit van de lineaire afbeelding $v \mapsto \mathrm{d}_v$.

De surjectiviteit van de afbeelding tonen we als volgt aan. Zij $P \in \mathcal{D}_1^+(X)$. Dan geldt voor iedere kaart κ van X dat

$$\kappa_*(P) = \sum_{j=1}^n c_j^\kappa \partial_j,$$

voor uniek bepaalde C^∞-funkties $c_j^\kappa : V_\kappa \to \mathrm{R}$. Zij v_κ het vectorveld op V_κ met componenten $v_\kappa^j = c_j^\kappa$. Dan is dus

$$\kappa_*(P) = d_{v_\kappa}.$$

Is λ een tweede kaart van X, dan is

$$\lambda_*(P) = (\tau \circ \kappa)_*(P) = \tau_*[\kappa_*(P)]$$

met $\tau = \lambda \circ \kappa^{-1}$ de coordinatentransitie. Er volgt nu dat

$$d_{v_\lambda} = \tau_*(d_{v_\kappa}) = d_{\tau_*(v_\kappa)}.$$

Met de reeds bewezen injectiviteit van $w \mapsto \mathrm{d}_w$ volgt hieruit dat

$$v_\lambda = (\lambda \circ \kappa^{-1})_* v_\kappa \quad \text{op} \quad V_{\kappa,\lambda}$$

voor alle lokale kaarten κ en λ met $X_\lambda \cap X_\kappa \neq 0$. Hieruit concluderen we dat er precies één vectorveld $v \in \mathcal{V}(X)$ bestaat zo dat $\kappa_* v = v_\kappa$ voor elke kaart κ. Nu volgt dat

$$\kappa_*(P) = \mathrm{d}_{v_\kappa} = \mathrm{d}_{\kappa_* v} = \kappa_*(\mathrm{d}_v),$$

dus $P = \mathrm{d}_v$ op X_κ. We concluderen dat $P = \mathrm{d}_v$. □

Definitie 5.3 Onder een reële **Lie algebra** verstaan we een reële lineaire ruimte L met daarbij een bilineaire afbeelding $(X, Y) \mapsto [X, Y], L \times L \to L$ die voldoet aan

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ voor alle $X, Y \in L$ (anti-symmetrie);

(b) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi-identiteit).

Onder een **deel Lie algebra** van L verstaan we een lineaire deelruimte $L_0 \subset L$ zo dat $[X, Y] \in L_0$ voor alle $X, Y \in L_0$.

Voorbeeld 5.4 De ruimte $\mathcal{V}(X)$ van gladde vectorvelden op X, voorzien van de Lie haakjes van vectorvelden, is een Lie algebra.

Voorbeeld 5.5 Zij V een reële lineaire ruimte, dan noteren we met $\mathrm{End}(V)$ de lineaire ruimte van lineaire afbeeldingen $V \to V$. Voor $A, B \in \mathrm{End}(V)$ definiëren we de commutatorhaakjes $[A, B] := A \circ B - B \circ A$. Men gaat gemakkelijk na dat $(A, B) \mapsto [A, B]$ een bilineaire afbeelding $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ is die voldoet aan de eisen (a) en (b) van de bovenstaande definitie. Aldus is $\mathrm{End}(V)$ een Lie algebra.

Voorbeeld 5.6 De ruimte $\mathrm{End}(C^\infty(X))$, voorzien van de commutatorhaakjes, is een Lie algebra. Door te kijken naar lokale expressies ziet men gemakkelijk in dat voor elk tweetal $P \in \mathcal{D}_p(X)$ en $Q \in \mathcal{D}_q(X)$ geldt dat de operator $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$ tot $\mathcal{D}_{p+q-1}(X)$ behoort. Hieruit volgt dat $\mathcal{D}(X)$ een deel Liealgebra van $\mathrm{End}(C^\infty(X))$ is. In het bijzonder zien we verder, door $p = q = 1$ te nemen, dat $\mathcal{D}_1$ een deel Lie algebra van $\mathrm{End}(C^\infty(X))$ is. Hebben $P, Q \in \mathcal{D}_1^+(X)$ beide een constante term 0, dan heeft ook $[P, Q]$ een constante term 0. Hieruit blijkt dat ook $\mathcal{D}_1^+(X)$ een deel Lie algebra is.

Lemma 5.7 *Zij $v, w \in \mathcal{V}(X)$, dan is* $[\mathrm{d}_v, \mathrm{d}_w] = -\mathrm{d}_{[v,w]}$.

Bewijs. Het is voldoende de uitspraak te bewijzen op het domein van een kaart κ. De te bewijzen formule transformeert onder κ_* naar de overeenkomstige formule voor de vectorvelden $\kappa_* v$ en $\kappa_* w$ op de open verzameling $V \subset \mathrm{R}^n$.

Hieraan zien we dat het voldoende is het resultaat te bewijzen in de situatie dat X een open deel is van R^n. In dit geval corresponderen de vectorvelden v en w met gladde afbeeldingen $X \to \mathrm{R}^n$. Het vectorveld $[v, w]$ wordt nu gegeven door

$$[v, w](x) = Dv(x)w(x) - Dw(x)v(x).$$

De j-de component hiervan wordt gegeven door

$$[v, w]^j = \sum_{i=1}^n [w^i \partial_i v^j - v_i \partial_i w^j].$$

Anderzijds geldt, voor $f \in C^\infty(X)$, dat

$$\begin{aligned}
[\mathrm{d}_v, \mathrm{d}_w] f &= \mathrm{d}_v(\mathrm{d}_w f) - \mathrm{d}_w(\mathrm{d}_v f) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v^i \partial_i (w^j \partial_j f) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w^j \partial_j (v^i \partial_i f) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [v^i \partial_i (w^j) \partial_j f + v^i w^j \partial_i \partial_j f] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [w^j \partial_j (v^i) \partial_i f + v^i w^j \partial_j \partial_i f] \\
&= \sum_{j=1}^n [\sum_{i=1}^n v^i \partial_i (w^j)] \partial_j f - \sum_{j=1}^n [\sum_{i=1}^n w^i \partial_i (v^j)] \partial_j f \\
&= \mathrm{d}_u f,
\end{aligned}$$

waarin $u : X \to \mathrm{R}^n$ het vectorveld is met componenten

$$u^j = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i (w^j) - \sum_{i=1}^n w^i \partial_i (v^j) = -[v, w]^j.$$

Derhalve is $u = -[v, w]$. $\square$

Opmerking 5.8 Laten L_1, L_2 twee Lie algebras zijn. Onder een Lie algebra homomorfisme van L_1 naar L_2 verstaan we een lineaire afbeelding $\varphi : L_1 \to L_2$ met $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ voor alle $X, Y \in L_1$. Een bijectief homomorfisme van Lie algebras heet een isomorfisme van Lie algebras.

Equivalent met de bewering in het bovenstaande lemma is nu de uitspraak dat de afbeelding $v \mapsto d_{-v}$ een isomorfisme van de Lie algebra $\mathcal{V}(X)$ op de Lie algebra $\mathcal{D}_1^+(X)$ definieert.

In verband met het bovenstaande identificeert men dikwijls $\mathcal{V}(X)$ met $\mathcal{D}_1^+(X)$. Is $v \in \mathcal{V}(X)$ en $f \in C^\infty(X)$, dan noteert men overeenkomstig deze identificatie:

$$vf := \mathrm{d}_v f$$

Zij $\kappa = (x^1, \ldots, x^n)$ een kaart van X. Dan definiëren we, voor $1 \leq j \leq n$, de eerste orde differentiaal operator $\frac{\partial}{\partial x^j}$ op X_κ door

$$\kappa_*(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \partial_j, \tag{5}$$

waarbij ∂_j staat voor de partiële afgeleide naar de j-de coordinaat. We noteren de corresponderende vectorvelden op X_κ eveneens met $\frac{\partial}{\partial x^j}$. Is $p \in X$, dan noteren we met $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ de waarde van het vectorveld in p; dit is een vector in de raakruimte T_pX. Is $f \in C^\infty(X)$, dan geldt met de genoemde identificatie dat

$$\frac{\partial}{\partial x^j} f(p) = df(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p .$$

Merk op dat uit (5) volgt dat $\kappa_*(\frac{\partial}{\partial x^j}) = e_j$, het vectorveld dat constant gelijk is aan de j-de standaard basisvector. In een punt $p \in X$ betekent dit dat

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = (D\kappa)_p^{-1} e_j. \tag{6}$$

Aangezien $e_1, \ldots, e_n$ een basis van R^n is en $(D\kappa)_p : T_pX \to \mathrm{R}^n$ een lineair isomorfisme, concluderen we dat de vectoren (6), voor $j = 1, \ldots, n$, een basis van T_pX vormen.

De coordinaatfunkties $x^1, \ldots, x^n$ zijn C^∞-funkties op X_κ. Voor $p \in X$ is $dx^j(p) = Dx^j(p) = T_p x^j$ een lineaire afbeelding van T_pX naar R, dus een element van de coraakruimte T_p^*X in p. Merk op dat $\kappa_*(x^j) = x^j \circ \kappa^{-1} = e^j|_{V_\kappa}$, de funktie die aan een punt $v \in V_\kappa$ zijn j-de coordinaat toekent. Er geldt dat

$$\begin{aligned} dx^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p &= dx^i(p)(D\kappa)_p^{-1} e_j = d(x^i \circ \kappa^{-1})(\kappa(p)) e_j \\ &= d(e^i|_{V_\kappa})(p) e_j = e^i(e_j) = \delta^i_j. \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat elementen $dx^i(p)$, voor $i = 1, \ldots, n$, de basis van $T_p^*(X)$ vormen die duaal is aan de basis (6) van T_pX.

6 Georiënteerde variëteiten

In deze paragraaf voeren we het begrip georiënteerde variëteit in op een manier die iets afwijkt van die in het dictaat, maar uiteraard een equivalent begrip oplevert.

In het vervolg zijn V, W lineaire ruimten over R met dezelfde dimensie n. De collectie van geordende bases van V noteren we met $\mathcal{B}(V)$. De elementen van $\mathcal{B}(V)$ zijn dus de geordende n-tallen $(e_1, \ldots, e_n)$, met $e_1, \ldots, e_n$ een basis van V. We zeggen dat twee bases $(e_i), (f_i)$ van V dezelfde oriëntatie hebben als de lineaire afbeelding $T : V \to V$ gedefinieerd door $Te_i = f_i$, $1 \le i \le n$, een positieve determinant heeft. We zullen deze relatie tussen de beide elementen van $\mathcal{B}(V)$ noteren met $(e_i) \sim (f_i)$.

Men gaat gemakkelijk na dat de relatie $\sim$ een equivalentie relatie op $\mathcal{B}(V)$ definieert. De bijbehorende collectie $\mathcal{B}(V)/\sim$ van equivalentieklassen bestaat uit twee elementen. Elk daarvan noemen we een **oriëntatie** op V.

Onder een georiënteerde lineaire ruimte verstaan we het een lineaire ruimte V voorzien van een oriëntatie $c_V \in \mathcal{B}(V)$. Laten V, W voorzien zijn van oriëntaties c_V respectievelijk c_W. Een lineair isomorfisme $T : V \to W$ induceert een bijectie van $\mathcal{B}(V)$ op $\mathcal{B}(W)$; men ziet gemakkelijk in dat $T(c_V)$ een oriëntatie op W definieert. We noemen T positief georiënteerd, of oriëntatiebehoudend, als $Tc_V = c_W$. Is dit laatste niet het geval, dan noemen we T negatief georiënteerd, of oriëntatie omkerend.

Laat nu X een variëteit van dimensie n zijn. Onder een **oriëntatie op** X verstaan we een familie c van oriëntaties c_x op T_xX, voor $x \in X$ die continu afhankelijk is van x in de volgende zin. Voor iedere $a \in X$ bestaat kaart κ rond a zo dat voor iedere $x \in X_\kappa$ de lineaire afbeelding $D\kappa(x) : T_xX \to \mathrm{R}^n$ positief georiënteerd is ten aanzien van de oriëntatie c_x op X en de standaard oriëntatie op R^n (dwz. de oriëntatie waartoe de standaard basis behoort). Een variëit X heet oriënteerbaar indien er een oriëntatie c op X bestaat. Niet alle variëteiten zijn oriënteerbaar.

Opgave. Toon aan dat de Möbiusband niet oriënteerbaar is in de hier boven beschreven zin.

Laten X, Y georiënteerde variëteiten zijn. Een locaal diffeomorfisme $\varphi : X \to Y$ heet positief georiënteerd of oriëntatie behoudend als het lineaire isomorfisme $T_x\varphi : T_xX \to T_{\varphi(x)}Y$ oriëntatiebehoudend is voor alle $x \in X$.

Is c een oriëntatie op X, en U een open deel van X, dan induceert c op voor de hand liggende wijze een oréntatie c_U op U : dit is de unieke oriëntatie die de inclusieafbeelding $U \to X$ positief georiënteerd maakt. Tenzij anders vermeld veronderstellen we in het vervolg steeds dat open deelverzamelingen van R^n voorzien zijn van de oriëntatie geïnduceerd door de standaardoriëntatie.

Laten U, V open delen van R^n zijn. Dan is een diffeomorfisme $\varphi : U \to V$ volgens de bovenstaande definitie positief georiënteerd dan en slechts dan als $\det D\varphi(x) > 0$ voor alle $x \in U$.

Onder een georiënteerde atlas op een variëteit X verstaan we een atlas $\mathcal{A}$ zo dat voor alle $\kappa, \lambda \in \mathcal{A}$ de verkaarting $\kappa \circ \lambda^{-1}$ positief georiënteerd is.

Het volgende lemma drukt uit dat het hier geïntroduceerde begrip oriënteerbare variëteit equivalent is met het in het dictaat geïntroduceerde.

Lemma 6.1 *Laat X een variëteit zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *er bestaat een oriëntatie op X;*

(b) *er bestaat een georiënteerde atlas voor X.*

Bewijs. Veronderstel dat (b) geldt. Zij $\mathcal{A}$ een georiënteerde atlas. We noteren de standaardbasis in R^n met $\mathbf{e}$. Laat $a \in X$ zijn. Is κ, λ een tweetal kaarten rond a, dan voert hebben de bases $D\kappa(a)^{-1}\mathbf{e}$ en $D\lambda(a)^{-1}\mathbf{e}$ dezelfde oriëntatie. De bijbehorende klasse noteren we met c_a. Men gaat nu gemakkelijk na dat $c : x \mapsto c_x$ een oriëntatie op X definieert.

Veronderstel (a), en kies een oriëntatie c op X. Volgens de definitie van oriëntatie bestaat er voor iedere $a \in X$ een kaart κ rond a zo dat $D\kappa(x)^{-1}\mathbf{e}$ tot c_x behoort, voor iedere $x \in X_\kappa$. Een dergelijke kaart noemen we positief georiënteerd. De collectie van alle positief georiënteerde kaarten op X vormen een atlas $\mathcal{A}$ van X. Men gaat gemakkelijk na dat deze atlas georiënteerd is.

7 Tensoren

7.1 Lineaire ruimten en hun duale

In dit hoofdstuk veronderstellen we dat k een lichaam is. Voor de toepassingen zullen we alleen $k = \mathrm{R}$ en $k = \mathrm{C}$ nodig hebben.

Is E een lineaire ruimte over k, dan noteren we met E^* de ruimte van lineaire afbeeldingen $E \to k$. De lineaire ruimte E^* heet de **lineaire duale** van E.

Laat F een tweede lineaire ruimte over k zijn, dan schrijven we $\mathrm{Hom}(E, F)$ voor de ruimte van lineaire afbeeldingen $A : E \to F$. Zij $A \in \mathrm{Hom}(E, F)$, dan induceert A de afbeelding $A^* : F^* \to E^*$, gedefinieerd door

$$A^*\eta = \eta \circ A \qquad (\eta \in F^*).$$

Deze afbeelding is weer lineair en behoort dus tot $\mathrm{Hom}(F^*, E^*)$. Hij heet de getransponeerde van A. Merk op dat de getransponeerde van de identiteit $I_E : E \to E$, $x \mapsto x$ gegeven wordt door

$$(I_E)^* = I_{E^*}. \tag{7}$$

Is $B : F \to G$ een tweede lineaire afbeelding, dan is

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*. \tag{8}$$

Opmerking 7.1 Wegens de eigenschappen (7) en (8) heet de toevoeging $E \rightsquigarrow E^*$ wel een functor. De functor $E \rightsquigarrow E^*$ heet contravariant, omdat hij afbeeldingspijlen omkeert: aan een homomorfisme $A : E \to F$ wordt een homomorfisme $A^* : E^* \leftarrow F^*$ toegevoegd. De (triviale) functor $E \rightsquigarrow E$, die aan een lineaire ruimte E zichzelf toevoegt, behoudt de richting van pijlen en heet daarom covariant. Verderop zullen we de covariante functor $E \rightsquigarrow E^{**}$ die aan een ruimte zijn dubbelduale toevoegt bestuderen. Voor de precieze definitie van een functor verwijzen we naar de paragraaf over categoriën-theorie in [Lang1, Ch. I, §7][1].

Is $A : E \to F$ een lineair isomorfisme, dan volgt uit de functoriële eigenschappen dat $(A^{-1})^* \circ A^* = [A \circ A^{-1}]^* = I_{F^*}$, terwijl $A^* \circ (A^{-1})^* = [A^{-1} \circ A]^* = I_{E^*}$, dus $A^* : F^* \to E^*$ is ook een lineair isomorfisme en de inverse wordt gegeven door:

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

We veronderstellen nu dat E eindig dimensionaal is. Zij $d = \dim E$ en zij $e_1, \dots, e_d$ een basis van E. We definiëren de lineaire functionalen $e^1, \dots, e^d \in E^*$ door

$$e^i(e_j) = \delta^i_j. \tag{9}$$

Hierin is δ^i_j het Kronecker symbool: het is gelijk aan 1 als $i = j$, en gelijk aan 0 als $i \neq j$.

Lemma 7.2 *Is E eindig dimensionaal, en is $e_1, \dots, e_d$ een basis van E, dan is $e^1, \dots, e^d$ een basis van E^*. In het bijzonder heeft de ruimte E^* dezelfde dimensie als E.*

Bewijs. De collectie $e^1, \dots, e^d$ is lineair onafhankelijk. Immers is $\sum_{i=1}^d \lambda_i e^i = 0$, dan volgt uit evalueren op e_j dat $\lambda_j = 0$, voor alle $1 \leq j \leq n$.

De collectie $e^1, \dots, e^d$ spant E^* op. Immers is $\xi \in E^*$, dan is

$$\xi = \sum_{i=1}^d \xi(e_i)\, e^i.$$

Men ziet dit gemakkelijk in door beide leden in elk der basisvectoren e_j te evalueren. We concluderen dat de collectie $e^1, \dots, e^d$ een basis van E^* is. Hieruit blijkt dat $\dim(E^*) = d = \dim E$. $\square$

De in het bovenstaande gedefinieerde basis $e^1, \dots, e^d$ van E^* staat bekend als de basis van E^* die **duaal** is aan de basis $e_1, \dots, e_d$ van E.

Opmerking 7.3 Is $\xi \in E$, dan noteren we met $\operatorname{mat} \xi$ de matrix van ξ ten opzichte van de basis $\{e_i\}$ van E. Merk op dat deze matrix een rijvector met lengte d is. Merk op dat e^i het element van E^* is met matrix $(\delta^i_1, \dots, \delta^i_d)$.

In het vervolg hanteren we de conventie dat R^d bestaat uit kolomvectoren. De reden hiervoor is dat een lineaire afbeelding $A : \mathrm{R}^d \to \mathrm{R}^p$ gegeven wordt door de matrixvermenigvuldiging met $\operatorname{mat} A$, de matrix van A ten aanzien van de standaardbases. Met andere

[1] S. Lang; Algebra, Addison-Wesley, 1965

woorden $Ax = \operatorname{mat} A \cdot x$ voor alle $x \in \mathrm{R}^d$. Op deze wijze identificeren we $L(R^d, R^p)$ met de $p \times d$ matrices met reële coëfficiënten. In het bijzonder identificeren we $(\mathrm{R}^d)^*$ met de $1 \times d$ matrices, d.w.z. met de rijvectoren met lengte d.

Opmerking 7.4 Is de lineaire ruimte E reëel en voorzien van een positief definiet inprodukt $\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$, dan kunnen we een afbeelding $\mathbf{i} : E \to E^*$ definiëren door $\mathbf{i}\,(v)(w) = \langle v\ ,\ w \rangle$, voor $v, w \in E$. Men ziet direkt dat $\mathbf{i}$ lineair is en een triviale kern heeft; de afbeelding is derhalve een lineair isomorfisme. Men gaat gemakkelijk na dat een basis $\{e_j\}$ orthonormaal is ten aanzien van het gegeven inprodukt dan en slechts dan als $\{\mathbf{i}\,(e_j)\}$ de duale basis van E^* is. Vaak identificeert men de ruimte E met zijn duale E^* door middel van de afbeelding $\mathbf{i}$; men dient zich daarbij te realizeren dat de identificatie afhankelijk is van de keuze van het inprodukt.

Opmerking 7.5 In de analyse treden rijvectoren en kolomvectoren bijvoorbeeld als volgt op. Is $c : I \to \mathrm{R}^n$ een differentieerbare kromme, dan is, voor iedere $t \in I$, de snelheidsvector $c'(t)$ een kolomvector in R^n. Is een scalaire funktie $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ differentieerbaar in het punt a, dan is de afgeleide $df(a) = Df(a)$ een element van $(R^n)^*$, dus een rijmatrix.

Laat $\operatorname{grad} f(a)$ de unieke vector in R^n zijn met $\mathbf{i}\,(\operatorname{grad} f(a)) = Df(a)$; hierin is $\mathbf{i}$ als in de voorgaande opmerking gedefinieerd ten aanzien van het standaardinprodukt. Dan is $\operatorname{grad} f(a)$ de kolomvector in R^n met componenten $\partial_i f(a)$, $1 \leq i \leq n$. Om typografische redenen noteren we de gradient toch vaak als rijvector. Strikt genomen zou het beter zijn om de notatie $(v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{T}}$ voor de kolomvector met componenten $v_1, \ldots, v_n$ te gebruiken; hierbij staat T voor transpositie.

Door een tweede keer te dualiseren verkrijgen we de dubbelduale $E^{**} := (E^*)^*$ van de lineaire ruimte E. Er is een natuurlijke lineaire afbeelding $\iota : E \to E^{**}$; is $x \in E$, dan wordt $\iota(x)$ gegeven door

$$\iota(x)(\xi) = \xi(x) \qquad (\xi \in E^*).$$

Is $\iota(x) = 0$, dan is $\xi(x) = 0$ voor alle $\xi \in E^*$, waaruit we afleiden dat $x = 0$. Hieruit volgt dat ι een injectieve lineaire afbeelding is. We noemen ι wel de kanonieke inbedding van E in de dubbelduale E^{**}.

Lemma 7.6 *Zij E een eindig dimensionale lineaire ruimte over het lichaam k. Dan is de canonieke inbedding $\iota : E \to E^{**}$ een lineair isomorfisme.*

Bewijs. De lineaire afbeelding ι is injectief. Aangezien $\dim(E^{**}) = \dim E^* = \dim E$, is ι tevens surjectief. $\square$

In het vervolg zullen we de dubbelduale E^{**} van een eindig dimensionale lineaire ruimte E via het isomorfisme ι identificeren met E.

Veronderstel dat E eindig dimensionaal is met basis $e_1, \ldots, e_d$. Zij $e^1, \ldots, e^d$ de duale basis van E^*. De hierbij behorende duale basis van E^{**} correspondeert onder de genoemde identificatie precies met de oorspronkelijke basis $e_1, \ldots, e_d$. Immers: $\iota(e_i)(e^j) = e^j(e_i) = \delta_i^j$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$.

Laat F een tweede eindig dimensionale lineaire ruimte zijn, met basis $f_1, \ldots, f_p$. Zij $f^1, \ldots, f^p$ de bijbehorende duale basis van F^*. De matrix van een lineaire afbeelding $A : E \to F$ ten opzichte van de gekozen bases heeft elementen $A_j^i \in k$ die bepaald zijn door de formule $A(e_j) = \sum_i A_j^i f_i$. Door hierop f^i te laten werken zien we dat

$$A_j^i = f^i(Ae_j). \tag{10}$$

De matrix van A ten aanzien van de genoemde bases noteren we met $\mathrm{mat}\, A$, diens gespiegelde met $(\mathrm{mat}\, A)^{\mathrm{T}}$.

Lemma 7.7 $\mathrm{mat}\,(A^*) = (\mathrm{mat}\, A)^{\mathrm{T}}$

Bewijs. Er geldt dat

$$A_j^i = f^i(A(e_j)) = [A^*(f^i)](e_j) = e_j(A^*(f^i)) = (A^*)_i^j.$$

□

7.2 Het tensorprodukt van lineaire ruimten

Voor k-lineaire ruimten $E_1, \ldots, E_n$ en F noteren we met

$$L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

de lineaire ruimte van $n-$multilineaire afbeeldingen $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ ($n-$multilineariteit betekent dat f in elk van zijn n variabelen lineair is).

Merk op dat in het bijzonder voor een lineaire ruimte E geldt dat $E^* = L^1(E; k)$. Is E eindig dimensionaal, dan volgt uit de identificatie $E^{**} = E$ dat $E = L^1(E^*; k)$.

Definitie 7.8 Laten $E_1, \ldots, E_n$ eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn ($n \geq 1$).

(a) We definiëren $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n := L^n(E_1^*, \ldots, E_n^*; k)$.

(b) Voor $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ definiëren we het element $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ van $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ door

$$[x_1 \otimes \cdots \otimes x_n](\xi_1, \ldots, \xi_n) := \xi_1(x_1) \cdots \xi_n(x_n). \tag{11}$$

Opmerking 7.9 Zij $\iota_k : E_k \to E_k^{**}$ de natuurlijke inbedding, voor $1 \leq k \leq n$. Dan kan het rechterlid van (11) herschreven worden als $\prod_{k=1}^n \iota_k(x_k)(\xi_k)$. In het bijzonder is de bovenstaande definitie voor $n = 1$ compatibel met de identificatie $L^1(E_1^*; k) = E_1$.

Opmerking 7.10 Men verifieert gemakkelijk dat de afbeelding $\nu : E_1 \times \cdots \times E_n \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ gegeven door $\nu(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ multilineair is. Met andere woorden, het tensorprodukt voldoet aan de volgende rekenregel, voor $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$, en voor $x'_j \in E_j, \lambda \in k$:

$$\begin{aligned} & x_1 \otimes \cdots \otimes (x_j + \lambda x'_j) \otimes \cdots \otimes x_n = \\ & \qquad = \ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_n) \ + \ \lambda\,(x_1 \otimes \cdots \otimes x'_j \otimes \cdots \otimes x_n) \end{aligned}$$

In het vervolg veronderstellen we steeds dat $E_1, \ldots, E_n$ eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn.

Lemma 7.11 *Laat voor iedere $1 \leq k \leq n$ een basis $e_{k,1} \ldots e_{k,d_k}$ van E_k gegeven zijn. Zij $\mathcal{I}$ de collectie van rijtjes $i = (i(1), \ldots, i(n))$ met $i(k) \in \{1, \ldots, d_k\}$, voor alle $1 \leq k \leq n$. Dan is de collectie*

$$\{e_{1,i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{n,i(n)} \mid i \in \mathcal{I}\}$$

een basis van $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.

Bewijs. Voor $1 \leq k \leq n$ noteren we de duale basis van E_k^* met $e_k^1, \ldots, e_k^{d_k}$. Voor $i \in \mathcal{I}$ noteren we met $e_\cdot^i$ het rijtje vectoren $(e_1^{i(1)}, \ldots, e_n^{i(d_k)})$. Zij $t \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, dan volgt uit de multilineariteit van t dat $t = 0$ dan en slechts dan als $t(e_\cdot^i) = 0$ voor alle $i \in \mathcal{I}$.

Voor $i \in \mathcal{I}$ noteren we met $(\otimes e)_i$ de vector $e_{1,i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{n,i(n)}$ uit $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Is ook $j \in \mathcal{I}$, dan is $(\otimes e)_i(e_\cdot^j)$ gelijk aan 1 als $i = j$, en gelijk aan 0 als $i \neq j$. Laat nu voor iedere $i \in \mathcal{I}$ een scalar $\lambda^i \in k$ gegeven zijn en veronderstel dat $\sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda^i (\otimes e)_i = 0$. Door evalueren van beide leden in het rijtje $e_\cdot^j$ volgt dat $\lambda^j = 0$ voor alle $j \in \mathcal{I}$. De vectoren $(\otimes e)_i$, $i \in \mathcal{I}$ zijn dus lineair onafhankelijk.

Zij tenslotte $t \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Schrijf $t^i = t(e_\cdot^i)$, voor $i \in \mathcal{I}$. Dan geldt

$$t = \sum_{i \in \mathcal{I}} t^i (\otimes e)_i.$$

Dit blijkt door beide leden van deze gelijkheid op elk rijtje vectoren $e_\cdot^j$, $j \in \mathcal{I}$, te evalueren. Hieruit volgt dat de vectoren $(\otimes e)_i$, $i \in \mathcal{I}$, de ruimte $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ opspannen. □

Stelling 7.12 *Zij $E_1, \ldots, E_n$ een stel eindig dimensionale lineaire ruimten. Dan voldoet de multilineaire afbeelding $\nu : E_1 \times \cdots \times E_n \to E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ aan de volgende* **universele eigenschap**.

Voor iedere lineaire ruimte F en iedere multilineaire afbeelding $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ bestaat er precies één lineaire afbeelding $\bar{f} : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \to F$ zo dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_n & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle \nu} \downarrow & \nearrow {\scriptstyle \bar{f}} & \\ E_1 \otimes \cdots \otimes E_n & & \end{array}$$

Bewijs. In het vervolg gebruiken we de notaties uit Lemma 7.11 en haar bewijs. Dan is $\{(\otimes e)_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ een basis van $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Zij $f \in L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$. Dan is er precies één lineaire afbeelding $\bar{f} : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \to F$ met $\bar{f}((\otimes e)_i) = f(e_{1,i(1)}, \ldots, e_{n,i(n)})$ voor alle $i \in \mathcal{I}$. Men gaat nu gemakkelijk na dat $\bar{f} \circ \nu = f$ op elk rijtje $(e_{1,i(1)}, \ldots, e_{n,e(n)})$, $i \in \mathcal{I}$. Wegens de multilineariteit van beide leden volgt hieruit dat $\bar{f} \circ \nu = f$. De uniciteit van $\bar{f}$ is een direkt gevolg van Lemma 7.11. $\square$

Opmerking 7.13 Door $\varphi \mapsto \varphi \circ \nu$ wordt een lineaire afbeelding

$$\mathrm{Hom}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n; F) \longrightarrow L^n(E_1, \ldots, E_n; F)$$

gedefinieerd. Het existentiegedeelte van de universele eigenschap zegt precies dat de bovenstaande afbeelding surjectief is. Het uniciteitsgedeelte drukt uit dat de bovenstaande afbeelding injectief is. De bovenstaande natuurlijke afbeelding is derhalve een lineair isomorfisme.

Voorbeeld 7.14 Is X een verzameling, dan noteren we met $\mathcal{F}(X)$ de lineaire ruimte van alle funkties $X \to k$. Is $a \in X$ dan schrijven we e_a voor het element van $\mathcal{F}(X)$ dat gegeven wordt door $e_a(x) = 0$ als $x \neq a$ en $e_a(a) = 1$. Is X eindig dan vormen de e_a, $a \in X$, een basis van $\mathcal{F}(X)$. De duale basis wordt gegeven door e^a, $a \in X$, met $e^a : f \mapsto f(a)$.

Laat Y een tweede eindige verzameling zijn. We zullen aantonen dat het tensorprodukt $\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$ op natuurlijke wijze isomorf is met $\mathcal{F}(X \times Y)$. Daartoe beschouwen we de bilineaire afbeelding $\varphi : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X \times Y)$ die gegeven wordt door $\varphi(f, g)(x, y) = f(x)g(y)$. Wegens de universele eigenschap factoriseert de afbeelding φ naar een lineaire afbeelding

$$\bar{\varphi} : \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X \times Y).$$

Deze afbeelding voert de basis $\{e_a \otimes e_b \mid a \in X, b \in Y\}$ over in de basis $\{e_{(a,b)} \mid (a, b) \in X \times Y\}$ van $\mathcal{F}(X \times Y)$ en is dus een lineair isomorfisme.

In het vervolg identificeren we $\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$ met $\mathcal{F}(X \times Y)$ via het natuurlijke isomorfisme $\bar{\varphi}$. In het bijzonder noteren we, voor $f \in \mathcal{F}(X)$ en $g \in \mathcal{F}(Y)$, de funktie $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ met $f \otimes g$.

De bovenstaande situatie treedt bijvoorbeeld op bij de combinatie van twee quantummechanische systemen A en B met eindig vele quantumtoestanden. Laten de quantumtoestanden van A gelabeld zijn door de verzameling X en die van B door Y. Dan zijn $\mathcal{F}(X)$ en $\mathcal{F}(Y)$ de toestandsruimten van A en B. De toestandsruimte van het gecombineerde systeem is $\mathcal{F}(X \times Y) = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)$.

De universele eigenschap in Stelling 7.12 motiveert ons tot de volgende definitie.

Definitie 7.15 Onder een **tensorprodukt** van de lineaire ruimten $E_1, \ldots, E_n$ verstaan we een lineaire ruimte G, met daarbij een afbeelding $g \in L^n(E_1, \ldots, E_n; G)$ zo dat de volgende universele eigenschap geldt: *Voor iedere lineaire ruimte F en iedere multilineaire* *afbeelding $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ bestaat er precies één lineaire afbeelding $\bar{f} : G \to F$ zo dat het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & F \\ G \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Opmerking 7.16 Na deze definitie kunnen we Stelling 7.12 als volgt herformuleren: *Het paar $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, \nu$ is een tensorprodukt van de lineaire ruimten $E_1, \ldots, E_n$.*

Het volgende lemma brengt tot uitdrukking dat alle tensor produkten van $E_1, \ldots, E_n$ op natuurlijke wijze isomorf zijn met $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. In het vervolg zullen we daarom spreken over het tensorprodukt $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.

Lemma 7.17 *Laten G, g en G', g' twee tensorprodukten van $E_1, \ldots, E_n$ zijn. Dan bestaat er een unieke lineaire afbeelding $h : G \to G'$ zo dat het volgende diagram commuteert:*

$$\begin{tikzcd} & G' \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G \arrow[uu] \end{tikzcd} . \tag{12}$$

De afbeelding h is een lineair isomorfisme.

Bewijs. Het bestaan en de uniciteit van h volgen uit de universele eigenschap van G, g (er geldt dat $h = \bar{g}'$). Uit de universele eigenschap van G', g' volgt verder het bestaan van een unieke lineaire afbeelding $h' : G' \to G$ zo dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{tikzcd} & G \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G' \arrow[uu] \end{tikzcd} . \tag{13}$$

Uit de commutativiteit van de diagrammen (12) en (13) blijkt dat het volgende diagram commutatief is als voor de verticale afbeelding de compositie $h' \circ h$ genomen wordt; anderzijds is het ook commutatief als de identiteit I_G genomen wordt:

$$\begin{tikzcd} & G \\ E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G \arrow[uu] \end{tikzcd} .$$

Het uniciteitsgedeelte van de universele eigenschap leert ons nu dat $h' \circ h = I_G$. Op soortgelijke wijze concluderen we dat $h \circ h' = I_{G'}$. Dus h is een isomorfisme. □

We merken op dat Definitie 7.15 en Lemma 7.17 ook geldig zijn in het geval de ruimten $E_1, \ldots, E_n$ niet noodzakelijkerwijs eindig dimensionaal zijn. In dat geval is $L^n(E_1, \ldots, E_n; k)$ echter geen tensorprodukt meer. Daarom hebben we voor de bovenstaande definitie door middel van de universele eigenschap gekozen. Het aantonen van het bestaan van een tensorprodukt is nu een probleem dat op een andere manier opgelost kan worden. Het bovenstaande lemma garandeert de uniciteit op lineaire isomorfie na.

Deze aanpak werkt ook in de algemenere context van het tensorprodukt van modulen $E_1, \ldots, E_n$ over een commutatieve ring met eenheid. Voor details verwijzen we de lezer naar [Lang1, Ch. XVI].

We eindigen deze paragraaf met een nuttig lemma.

Lemma 7.18 *Zij $E_1, \ldots, E_n$ een stel eindig dimensionale lineaire ruimten over k. Dan is er een natuurlijk isomorfisme*

$$(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)^* \simeq E_1^* \otimes \cdots \otimes E_n^*.$$

Bewijs. Er geldt dat $(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)^* = \mathrm{Hom}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, k) \simeq L^n(E_1, \ldots, E_n; k)$, zie Opmerking 7.13. Wegens Lemma 7.6 is de laatste ruimte op natuurlijke wijze isomorf met $L^n(E_1^{**}, \ldots, E_n^{**}; k) = E_1^* \otimes \cdots \otimes E_n^*$. $\square$

7.3 Tensoren en componenten

In het vervolg veronderstellen we dat E een eindig dimensionale lineaire ruimte over k is, met basis $e_1, \ldots, e_d$. De duale basis van E^* noteren we met $e^1, \ldots, e^d$. Is $x \in E$, dan schrijven we

$$x = \sum_{i=1}^{d} x^i e_i;$$

de coefficiënten hierin worden gegeven door $x^i = e^i(x)$. Is $\xi \in E^*$, dan schrijven we

$$\xi = \sum_{i=1}^{d} \xi_i e^i;$$

de coëfficiënten worden nu gegeven door $\xi_i = \xi(e_i)$.

We behandelen nu een nuttig voorbeeld van een tensorprodukt. Zij F een tweede eindig dimensionale lineaire ruimte over k, met basis $f_1, \ldots, f_p$. We gebruiken de notatie $\mathrm{Hom}(E, F)$ voor de ruimte van lineaire afbeeldingen $E \to F$.

Lemma 7.19 *Er is een unieke lineaire afbeelding $\varphi : F \otimes E^* \to \mathrm{Hom}(E, F)$ waarbij voor $\xi \in E^*, y \in F$ het element $\varphi(y \otimes \xi) \in \mathrm{Hom}(E, F)$ gegeven wordt door*

$$\varphi(y \otimes \xi) : E \to F,\ x \mapsto \xi(x) y.$$

De lineaire afbeelding φ is een isomorfisme.

Bewijs. Zij $f \in L^2(F, E^*; \mathrm{Hom}(E,F))$ gedefinieerd door $f(y,\xi) : x \mapsto \xi(x)y, E \to F$ voor $\xi \in E^*, y \in F$. Wegens de universele eigenschap van het tensorprodukt factoriseert de afbeelding naar een unieke lineaire afbeelding $\bar{f} : F \otimes E^* \to \mathrm{Hom}(E,F)$. Dit is de unieke afbeelding φ.

Voor $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq d$ definiëren we de lineaire afbeelding $L^i_j : E \to F$ door $L^j_i = \varphi(f_i \otimes e^j)$. Dus L^j_i wordt gegeven door

$$L^j_i(x) = x^j f_i.$$

Is $A : E \to F$ een lineaire afbeelding dan is zijn matrix gelijk aan $(A^i_j)_{i,j}$, waarbij $A^i_j = A(e_j)^i$. Men gaat nu gemakkelijk na dat

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq p}} A^i_j L^j_i.$$

Immers de i-de component van zowel het linkerlid als het rechterlid geëvalueerd in e_j is gelijk aan A^i_j. Hieruit blijkt dat de L^j_i een basis van $\mathrm{Hom}(E,F)$ vormen. De afbeelding φ voert een basis in een basis over en is dus een lineair isomorfisme. $\square$

In het vervolg zullen we het isomorfisme φ uit het bovenstaande lemma als identificerende afbeelding gebruiken. Na deze identificatie is $F \otimes E^* = \mathrm{Hom}(E,F)$. Het element $f_i \otimes e^j$ van $F \otimes E^*$ identificeren we met de afbeelding $L^j_i \in \mathrm{Hom}(E,F)$ uit het bovenstaande bewijs. Voor een lineaire afbeelding $A \in \mathrm{Hom}(E,F)$ verkrijgen we zo de tensornotatie

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq d}} A^i_j \, f_i \otimes e^j,$$

met $(A^i_j)_{i,j}$ de matrix van A ten aanzien van de bases $e_1, \ldots, e_d$ van E en $f_1, \ldots, f_p$ van F. De matrix van A verschijnt hier dus als collectie componenten van de tensor $A \in F \otimes E^*$ ten aanzien van de basis $f_i \otimes e^j$ van $F \otimes E^*$.

We gebruiken de notatie $\mathrm{End}(E) = \mathrm{Hom}(E,E)$ voor de ruimte van lineaire endomorfismen van E. Met de bovenstaande identificatie, toegepast op $F = E$, zien we dat

$$E \otimes E^* = \mathrm{End}(E). \tag{14}$$

De natuurlijke bilineaire afbeelding $c : E \times E^* \to k$ gegeven door $c(x,\xi) = \xi(x)$ factoriseert wegens de universele eigenschap van het tensorprodukt naar een unieke lineaire afbeelding $C : E \otimes E^* \to k$. Deze lineaire afbeelding wordt **contractie** genoemd.

Lemma 7.20 *Via de identificatie (14) correspondeert de contractie $C : E \otimes E^* \to k$ met het spoor* $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(E) \to k,\ A \mapsto \mathrm{tr}\,(A)$.

Bewijs. Ten aanzien van de basis $e_1, \ldots, e_d$ van E schrijven we $A = \sum_{1 \leq i,j \leq d} A^i_j e_i \otimes e^j$. Dan is

$$C(A) = \sum_{1 \leq i,j \leq d} A^i_j C(e_i \otimes e^j) = \sum_{1 \leq i,j \leq d} A^i_j \delta^j_i = \sum_{1 \leq i \leq d} A^i_i = \mathrm{tr}\,(A).$$

$\square$

Het volgende lemma staat om voor de hand liggende redenen bekend als de associativiteit van het tensorprodukt.

Lemma 7.21 *Laten E, F, G eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn. Er is een natuurlijk isomorfisme*

$$(E \otimes F) \otimes G \simeq E \otimes F \otimes G;$$

het wordt gegeven door $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$. Analoog is er een natuurlijk isomorfisme $E \otimes (F \otimes G) \simeq E \otimes F \otimes G$.

Bewijs. Definieer de afbeelding $f : E \times F \times G \to (E \otimes F) \otimes G$ door $f(x, y, z) = (x \otimes y) \otimes z$. De afbeelding f is multi-lineair en factoriseert derhalve naar een lineaire afbeelding $\bar{f} : E \otimes F \otimes G \to (E \otimes F) \otimes G$. Merk op dat $\bar{f}(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$. Laten $(e_i), (f_j)$ en (g_k) bases van, respectievelijk, E, F en G zijn. Dan voert $\bar{f}$ de basis $e_i \otimes f_j \otimes g_k$ van $E \otimes F \otimes G$ over in de basis $(e_i \otimes f_j) \otimes g_k$ van $(E \otimes F) \otimes G$. Hieruit volgt dat $\bar{f}$ een lineair isomorfisme is. De inverse van $\bar{f}$ voldoet aan de eisen van het bovenstaande lemma. Het laatste deel van het lemma wordt op soortgelijke wijze bewezen. □

Opmerking 7.22 In het vervolg zullen we volgens de hierboven beschreven natuurlijke isomorfismen identificeren. Met andere woorden, we maken geen onderscheid meer tussen $E \otimes F \otimes G$, $(E \otimes F) \otimes G$ of $E \otimes (F \otimes G)$.

Voorbeeld 7.23 In dit voorbeeld laten we zien dat de samenstelling van twee lineaire afbeeldingen door middel van een contractie beschreven kan worden. Dit leidt op natuurlijke wijze tot de bekende formule voor de vermenigvuldiging van matrices.

Laten E, F, G eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn, en $A : E \to F$ en $B : F \to G$ lineaire afbeeldingen. We vatten A als op als tensor in $F \otimes E^*$ en B als tensor in $G \otimes F^*$. De tensor $B \otimes A$ is dus bevat in $G \otimes F^* \otimes F \otimes E$ (hier gebruiken we de associativiteit van het tensorprodukt).

De multilineaire afbeelding $G \times F^* \times F \times E^* \to G \otimes E$, $(g, f^*, f, e^*) \mapsto f^*(f)\, g \otimes e^*$ factoriseert naar een unieke lineaire afbeelding $C_2^3 : G \otimes F^* \otimes F \otimes E \to G \otimes E$ die we om voor de hand liggende redenen de contractie naar de 2-de en 3-de component noemen. We zullen aantonen dat

$$B{\circ}A = C_2^3(B \otimes A). \tag{15}$$

De afbeeldingen $\varphi : (B, A) \mapsto B{\circ}A$ en $\psi : (A, B) \mapsto C_2^3(B \otimes A)$ zijn beide bilineair als afbeeldingen van $G \otimes F^* \times F \otimes E^*$ naar $G \otimes E^*$. Het is derhalve voldoende de gelijkheid van φ en ψ te controleren op elementen van de vorm $A = f \otimes e^*$ en $B = g \otimes f^*$. Welnu, voor elementen van die vorm geldt, als $e \in E$,

$$\varphi(B, A)(e) = [g \otimes f^*](e^*(e)f) = e^*(e)f^*(f)g = f^*(f)[g \otimes e^*](e) = \psi(A, B)(e).$$

Hiermee is (15) aangetoond.

Uit de formule leiden we verder nog af dat het volgende geldt voor de componenten ten aanzien van bases van E, F, G en de corresponderende duale bases van E^*, F^*. Er geldt:

$$(B \circ A)_i^k = [C_2^3(A \otimes B)]_i^k = \sum_j (B \otimes A)_{ji}^{kj} = \sum_j B_j^k A_i^j.$$

Dit is de bekende formule die uitdrukt dat de matrix van de samenstelling $B \circ A$ verkregen wordt door vermenigvuldiging van de matrices van A en B.

In het vervolg gebruiken we, voor $r \geq 1$, de notatie

$$\otimes^r E := \overbrace{E \otimes \cdots \otimes E}^{r}$$

voor het r-voudige tensorprodukt van E met zichzelf. Met $\otimes^1 E$ bedoelen we de ruimte $L^1(E^*; k) = E^{**}$, zie Definitie 7.8. Wegens Lemma 7.6 is deze ruimte op natuurlijke wijze isomorf met E; dus $\otimes^1 E = E$. Tenslotte spreken we af dat $\otimes^0 E := k$. De ruimte $\otimes^r E$ heet de ruimte van contravariante tensoren van graad r op E. Deze traditionele terminologie is helaas tegengesteld aan die welke men op grond van de categorieëntheorie zou verwachten. Verderop zullen we zien dat door $E \rightsquigarrow \otimes^r E$ een covariante functor gedefinieerd wordt.

Is $s \in \mathrm{N}$, dan heet $\otimes^s E^*$ de ruimte van covariante tensoren van de graad s op E. Verderop zullen we namelijk zien dat door $E \rightsquigarrow \otimes^s E^*$ een contravariante functor gedefinieerd wordt.

Voor $r, s \in \mathrm{N}$ definiëren we de ruimte

$$\mathcal{T}_s^r E := \otimes^r E \otimes \otimes^s E^* = \overbrace{E \otimes \cdots \otimes E}^{r} \otimes \overbrace{E^* \otimes \cdots \otimes E^*}^{s};$$

de elementen van deze ruimte heten: (gemengde) tensoren op E van contravariantiegraad r en covariantiegraad s.

Merk op dat uit de definities volgt dat

$$\mathcal{T}_s^r E = L^{r+s}(\overbrace{E^*, \ldots, E^*}^{r}, \overbrace{E, \ldots, E}^{s}; k) \tag{16}$$

We merken tenslotte op dat uit (14) volgt dat $\mathcal{T}_1^1 E = \mathrm{End}(E)$.

Uit Lemma 7.11 volgt dat een basis van $\mathcal{T}_s^r := \mathcal{T}_s^r E$ gegeven wordt door de vectoren

$$e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(r)} \otimes e^{j(1)} \otimes \cdots \otimes e^{j(s)},$$

met $i \in \mathcal{I}_r$ en $j \in \mathcal{I}_s$. Hierbij hebben we de notatie $\mathcal{I}_r := \{1, \ldots, d\}^r$ gebruikt. Het is de gewoonte om de volgende componentnotatie voor de elementen van $\mathcal{T}_s^r$ te gebruiken:

$$T = \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}_r \\ j \in \mathcal{I}_s}} T_{j(1) \ldots j(s)}^{i(1) \ldots i(r)} e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(r)} \otimes e^{j(1)} \otimes \cdots \otimes e^{j(s)}.$$

Door evalueren op geschikte rijen duale basisvectoren ziet men gemakkelijk in dat de componenten in deze uitdrukking gegeven worden door

$$T_{j(1) \ldots j(s)}^{i(1) \ldots i(r)} = T(e^{i(1)}, \ldots, e^{i(r)}, e_{j(1)}, \ldots, e_{j(s)}).$$

Definitie 7.24 Zij $1 \le k \le r$ en $1 \le l \le s$. Dan definiëren we de **contractie** C_l^k als de lineaire afbeelding $\mathcal{T}_s^r \to \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}$ gegeven door

$$C_l^k : x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \xi^s \mapsto \xi^l(x_k)\, x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_k \otimes \cdots \otimes x_r \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\xi}^l \otimes \cdots \otimes \xi^s.$$

Hierbij geeft het symbool $\hat{}$ over een element aan dat het betreffende element weggelaten wordt.

Bedenk dat de afbeelding C_l^k goed gedefinieerd is op grond van de universele eigenschap van het tensorprodukt. Immers, C_l^k is de afbeelding die ontstaat door factorisatie van de multi-lineaire afbeelding

$$(x_1, \ldots x_r, \xi^1, \ldots \xi^s) \mapsto \xi^l(x_k)\, x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_k \otimes \cdots \otimes x_r \otimes \xi^1 \otimes \cdots \otimes \hat{\xi}^l \otimes \cdots \otimes \xi^s.$$

De contractie C_l^k is niets anders dan de eerder gedefinieerde contractie C toegepast op de k-de contravariante en de l-de covariante component van het tensorprodukt. Met behulp van Lemma 7.20 leiden we nu af dat de contractie op de tensorcomponenten werkt als het spoor ten aanzien van de k-de contravariante en de l-de covariante component. Is $T \in \mathcal{T}_s^r$, dan worden de componenten van $C_l^k(T)$ in termen van die van T gegeven door:

$$C_l^k(T)^{i(1),\ldots,\widehat{i(k)}\ldots i(r)}_{j(1),\ldots,\widehat{j(l)}\ldots j(s)} = \sum_{\nu=1}^{d} T^{i(1),\ldots,i(k-1),\nu,i(k+1)\ldots i(r)}_{j(1),\ldots,j(l-1),\nu,j(l+1),\ldots j(s)}.$$

7.4 Transformatie van tensoren onder afbeeldingen

We veronderstellen dat E en F twee eindig dimensionale lineaire ruimten over k zijn. We beschrijven hoe een lineaire afbeelding $A : E \to F$ een lineaire afbeelding op tensoren induceert.

Zij $r \in \mathbb{N}$. De afbeelding $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto Ax_1 \otimes \cdots \otimes Ax_r$, $E \times \cdots \times E \to \otimes^r F$ is multilineair, en induceert wegens de universele eigenschap een lineaire afbeelding $\otimes^r E \to \otimes^r F$ die we noteren met $\otimes^r A$. Er geldt:

$$\otimes^r A\,(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = Ax_1 \otimes \cdots \otimes Ax_r.$$

Wegens (11) betekent dit dat

$$[\otimes^r A]S = S \circ (\overbrace{A^* \times \cdots \times A^*}^{r}).$$

Merk op dat $\otimes^r I_E$ gelijk is aan de identiteit op $\otimes^r E$. Is G een derde eindig dimensionale lineaire ruimte, en $B : F \to G$ een lineaire afbeelding, dan is

$$\otimes^r (B \circ A) = \otimes^r B \circ \otimes^r A.$$

Op grond van deze twee eigenschappen heet de toevoeging $E \rightsquigarrow \otimes^r E$ een covariante functor.

Lemma 7.25 *Is $A : E \to F$ een lineair isomorfisme, dan is ook $\otimes^r A : \otimes^r E \to \otimes^r F$ een lineair isomorfisme.*

Bewijs. Wegens de functoriële eigenschappen geldt dat

$$\otimes^r(A^{-1})\circ \otimes^r A = \otimes^r(A^{-1}\circ A) = \otimes^r(I_E) = I_{\otimes^r E}.$$

In omgekeerde volgorde geeft de compositie de identiteit op $\otimes^r F$. Hieruit volgt dat $\otimes^r A$ een lineair isomorfisme is met inverse $\otimes^r A^{-1}$. □

Tenslotte beschrijven we de afbeelding $\otimes^r A$ in componenten. Laat $e_1, \dots, e_p$ een basis van E zijn, en $f_1, \dots, f_q$ een basis van F. Laten $\{e^i\}$ en $\{f^j\}$ de corresponderende duale bases zijn van E^* respectievelijk F^*. Is $T \in \otimes^r E$, dan worden de componenten van $S = [\otimes^r A](T)$ gegeven door

$$\begin{aligned} S^{i(1)\dots i(r)} &= S(f^{i(1)}, \dots, f^{i(r)}) \\ &= T(A^* f^{i(1)}, \dots, A^* f^{i(r)}) \end{aligned}$$

Wegens Lemma 7.7 worden de matrixcoefficënten van A^* gegeven worden door

$$(A^*)^i_j = A^j_i.$$

Passen we dit toe op het bovenstaande, dan vinden we

$$\begin{aligned} S^{i(1)\dots i(r)} &= T(\sum_{k=1}^{d} A^{i(1)}_k e^k, \dots, \sum_{k=1}^{d} A^{i(r)}_k e^k) \\ &= \sum_{k\in\mathcal{I}_r} A^{i(1)}_{k(1)} \cdots, A^{i(r)}_{k(r)}\, T(e^{k(1)}, \dots, e^{k(r)}). \\ &= \sum_{k\in\mathcal{I}_r} A^{i(1)}_{k(1)} \cdots, A^{i(r)}_{k(r)}\, T^{k(1)\dots k(r)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Zij $s \in \mathrm{N}$. Een lineaire afbeelding $A : E \to F$ induceert de lineaire afbeelding $A^* : F^* \to E^*$. De afbeelding A^* induceert een lineaire afbeelding $\otimes^s A^* : \otimes^s F^* \to \otimes^s E^*$. Wegens (11) betekent dit dat

$$[\otimes^r A^*]S = S \circ (\overbrace{A \times \cdots \times A}^{r}).$$

Er geldt dat $\otimes^s I_E^* = I_{\otimes^s E^*}$. Is ook $B : F \to G$ een lineaire afbeelding, dan is

$$\otimes^s(B\circ A)^* = \otimes^s A^* \circ \otimes^s B^*.$$

Op grond van deze eigenschappen heet $E \rightsquigarrow \otimes^s E^*$ een contravariante functor (nogmaals: de elementen in de tensorruimte die men verkrijgt heten covariant).

Is $T \in \otimes^s F^*$, dan behoort de tensor $S = [\otimes^s A^*](T)$ tot $\otimes^s E^*$. Door het bovenstaande te combineren met (17) vinden we dat de componenten van S gegeven worden door de formule:

$$S_{j(1)\dots j(s)} = \sum_{l\in\mathcal{I}_s} A^{l(1)}_{j(1)} \cdots A^{l(s)}_{j(s)}\, T_{l(1)\dots l(s)} \tag{18}$$

Tenslotte bestuderen we hoe gemengde tensoren transformeren onder lineaire afbeeldingen. Vanwege het gemengd co- en contravariante karakter kunnen we dit alleen doen voor lineaire isomorfismen. Zij A een lineair isomorfisme van E op F, met inverse $A^{-1} : F \to E$. Dan is $A^* : F^* \to E^*$ een lineair isomorfisme van F^* op E^*, met inverse $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Met Lemma 7.25 zien we nu dat door een lineair isomorfisme $A : E \to F$ het isomorfisme

$$A_* := [\otimes^r A] \otimes [\otimes^s A^{-1*}] : \mathcal{T}^r_s E \to \mathcal{T}^r_s F.$$

geïnduceerd wordt. Zij $T \in \mathcal{T}^r_s E$, dan zien we door combineren van (17) en (18) dat de componenten van de tensor A_*T gegeven worden door:

$$[A_*T]^{i(1)\dots i(r)}_{j(1)\dots j(s)} = \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}_r \\ j \in \mathcal{I}_s}} A^{i(1)}_{k(1)} \cdots A^{i(r)}_{k(r)} [A^{-1}]^{l(1)}_{j(1)} \cdots [A^{-1}]^{l(s)}_{j(s)} \, T^{k(1)\dots k(r)}_{l(1)\dots l(s)}. \tag{19}$$

7.5 Tensorbundels en tensorvelden

In deze paragraaf wordt van lineaire ruimten steeds verondersteld dat ze gedefinieerd zijn over het grondlichaam $k = \mathrm{R}$.

Laat M een gladde variëteit zijn (met glad bedoelen we in deze paragraaf steeds C^∞). Is $\pi : \mathcal{V} \to M$ een gladde vectorbundel, dan schrijven we $\mathcal{V}_p$ voor de vezel $\pi^{-1}(p)$ boven een punt $p \in M$. Is bovendien $\Omega \subset M$ een open deelverzameling, dan schrijven we $\mathcal{V}_\Omega$ voor het volledige origineel $\pi^{-1}(\Omega)$; dit is de disjuncte vereniging van de vezels $\mathcal{V}|_p, p \in \Omega$. We schrijven $\Gamma(\Omega, \mathcal{V})$ voor de (lineaire) ruimte van gladde snedes $\Omega \to \mathcal{V}$. De ruimte $\Gamma(M, \mathcal{V})$ noteren we kort met $\Gamma(\mathcal{V})$.

Onder een **frame** van $\mathcal{V}$ op een open verzameling $\Omega \subset M$ verstaan we een geordend m-tal snedes $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ in $\Gamma(\Omega, \mathcal{V})$ zo dat de collectie $\sigma_1(p), \dots, \sigma_m(p)$ een basis van de vezel $\mathcal{V}_p$ is, voor elke $p \in \Omega$. Het volgende resultaat is een onmiddellijk gevolg van de definitie van een vectorbundel.

Lemma 7.26 *Zij $\pi : \mathcal{V} \to M$ een gladde vectorbundel van rang r. Zij $\Omega \subset M$ open. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(a) *De vectorbundel $\mathcal{V}$ is triviaal over Ω.*

(b) *De vectorbundel $\mathcal{V}$ heeft een frame $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ over Ω.*

Bewijs. '$(a) \Rightarrow (b)$': Laat $\mathcal{V}$ triviaal zijn over Ω. Dan is er een trivialisatie $\tau : \mathcal{V}_\Omega \to \Omega \times V$, met V een lineaire ruimte van dimensie r. Kies een basis $e_1, \dots, e_r$ van V, en definieer $\bar{\sigma}_j : \Omega \to \Omega \times V$ door $\bar{\sigma}_j(p) = (p, e_j)$. Dan wordt door $\sigma_j := \tau^{-1} \circ \bar{\sigma}_j$ een frame van $\mathcal{V}$ over Ω gedefinieerd.

'$(b) \Rightarrow (a)$': laat $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ een frame van $\mathcal{V}$ over Ω zijn. Dan wordt door

$$\rho : (p, a) \mapsto (p, a_1\sigma_1(p) + \cdots + a_r\sigma_r(p))$$

een diffeomorfisme $\Omega \times \mathrm{R}^r \to \mathcal{V}_\Omega$ gedefinieerd dat lineair is op de vezels. De inverse $\sigma = \rho^{-1}$ is een trivialisatie van $\mathcal{V}$ over Ω. □

Zij $\mathcal{V}$ een gegeven vectorbundel over M en zij $r, s \geq 0$. Dan kunnen we op een natuurlijke manier een vectorbundel $\mathcal{T}_s^r\mathcal{V}$ definiëren waarvan de vezel in een punt $p \in M$ gelijk is aan het tensorprodukt $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{V}_p)$ (zie (16). Als verzameling is $\mathcal{T}_s^r\mathcal{V}$ gelijk aan de disjuncte vereniging van de lineaire ruimten $\mathcal{T}_s^r(\mathcal{V}_p)$:

$$\mathcal{T}_s^r\mathcal{V} = \{(p,t) \mid p \in M, \ t \in \mathcal{T}_s^r\mathcal{V}_p\}.$$

In het bijzonder is $\mathcal{T}_1^0\mathcal{V}$ gelijk aan de duale bundel $\mathcal{V}^*$.

Is $\tau : \mathcal{V}_\Omega \to \Omega \times V, (p,v) \mapsto (p, \tau_p(v))$ een trivialisering van de vectorbundel $\mathcal{V}$ over een open deelverzameling Ω, dan definiëren we de afbeelding $\mathcal{T}_s^r\tau : (\mathcal{T}_s^r\mathcal{V})_\Omega \to \Omega \times \mathcal{T}_s^r V$ door

$$\mathcal{T}_s^r\tau(p,t) = (p, (\tau_p)_*(t)).$$

Men gaat gemakkelijk na dat $\mathcal{T}_s^r\mathcal{V}$ een unieke structuur van vectorbundel heeft waarvoor de $\mathcal{T}_s^r\tau$ lokale trivialiseringen zijn. Voor details verwijzen we de lezer naar [Lang2, § 3.4].[2]

Is $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ een frame van $\mathcal{V}$ over een open deelverzameling $\Omega \subset M$, dan definiëren we de snedes $\sigma^1, \ldots, \sigma^r$ van de duale bundel $\mathcal{V}^*$ door

$$\sigma^i(p)(\sigma_j(p)) = \delta^i_j \qquad (p \in \Omega, \ 1 \leq i, j \leq r).$$

Hieruit blijkt dat $\{\sigma^i(p) \mid 1 \leq i \leq r\}$ de basis van $\mathcal{V}_p^*$, duaal aan de basis $\{\sigma_i(p) \mid 1 \leq i \leq r\}$ van $\mathcal{V}_p$ is. In het bijzonder is $(\sigma^1, \ldots, \sigma^r)$ een frame van de duale bundel $\mathcal{V}^*$ over Ω. We noemen dit frame het duale frame van $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

Is $i \in \mathcal{I}_r$ en $j \in \mathcal{I}_s$, dan definiëren we de snede $\sigma_i^j \in \Gamma(\Omega, \mathcal{T}_s^r\mathcal{V})$ door

$$\sigma_i^j(p) = \sigma_{i(1)}(p) \otimes \cdots \otimes \sigma_{i(r)}(p) \otimes \sigma^{j(1)}(p) \otimes \cdots \otimes \sigma^{j(s)}(p). \tag{20}$$

Uit Lemma 7.11 volgt nu dat de elementen (20) een basis van $\mathcal{T}_s^r\mathcal{V}_p$ vormen, voor elke $p \in \Omega$. De elementen σ_i^j, $i \in \mathcal{I}_r, j \in \mathcal{I}_s$, vormen derhalve een frame van de bundel $\mathcal{T}_s^r\mathcal{V}$ over Ω.

Een willekeurig element $T \in \Gamma(\Omega, \mathcal{T}_s^r\mathcal{V})$ heeft nu een unieke ontbinding van de vorm

$$T = \sum_{i,j} T^{i(1)..i(r)}_{j(1)..j(s)} \, \sigma_{i(1)} \otimes \cdots \otimes \sigma_{i(r)} \otimes \sigma^{j(1)} \otimes \cdots \otimes \sigma^{j(s)},$$

met componenten $T^{i(1)..i(r)}_{j(1)..j(s)} \in C^\infty(\Omega)$.

De bovenstaande definities zijn in het bijzonder van toepassing met $\mathcal{V} = TM$, de raakbundel van M. De bundel $\mathcal{T}_s^r TM$ wordt de tensorbundel van type (r,s) op M genoemd. Haar snedes worden tensorvelden, of kortweg tensoren, van type (r,s) op M genoemd.

We besluiten deze paragraaf met een beschrijving van tensoren door middel van componenten zoals dat in de fysica gebruikelijk is.

Is $x = (x^1, \ldots, x^n) : \Omega_x \to \mathrm{R}^n$ een lokale coordinatisering van M, dan vormen de vectorvelden $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $1 \leq i \leq n$, een frame van de raakbundel TM gedefinieerd op Ω_x. Voorts

[2] S. Lang. Differential manifolds. Addisson-Wesley, 1972

vormen de eenvormen dx^i, $1 \leq i \leq n$, een frame van de coraakbundel T^*M, eveneens op Ω_x. Tenslotte geldt

$$dx^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \delta^i_j,$$

dus het frame $(dx^i \mid 1 \leq i \leq n)$ is duaal ten aanzien van $(\frac{\partial}{\partial x^i} \mid 1 \leq i \leq n)$. Iedere tensor $T \in \Gamma(\mathcal{T}^r_s TM)$ heeft daarom op Ω_x een unieke expressie van de vorm:

$$T = \sum_{i,j} {}_xT^{i(1)\dots i(r)}_{j(1)\dots j(s)} \frac{\partial}{\partial x^{i(1)}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i(r)}} \otimes dx^{j(1)} \otimes \cdots \otimes dx^{j(s)}, \tag{21}$$

met coëfficiënten ${}_xT^{i(1)\dots i(r)}_{j(1)\dots j(s)}$ die tot $C^\infty(\Omega_x)$ behoren. Is $y = (y^1, \dots, y^n) : \Omega_y \to \mathrm{R}^n$ een tweede lokale coordinatisering van M, dan heeft T op Ω_y een componentvoorstelling met componenten ${}_yT^{k(1)\dots k(r)}_{l(1)\dots l(s)}$. Hieronder bespreken we het verband tussen de componenten van T ten aanzien van x en ten aanzien van y op de doorsnede van de coordinaatomgevingen Ω_x en Ω_y. Zij $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de standaardbasis van R^n en zij $\{e^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de duale basis van $(\mathrm{R}^n)^*$. Zij p in het vervolg een punt in de doorsnede van Ω_x en Ω_y. Dan is de afbeelding $P := (Dx)_p : T_pM \to \mathrm{R}^n$ een lineair isomorfisme, dat de basis $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ overvoert in de standaardbasis e_i. De afbeelding $P_* = P^{*-1}$ voert overeenkomstig de duale basis $dx^i(p)$ over in e^i. De tensor $T(p)$ wordt door P_* overgevoerd in

$${}_xT(p) := \sum_{i,j} {}_xT^{i(1)\dots i(r)}_{j(1)\dots j(s)}(p)\; e_{i(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i(r)} \otimes e^{j(1)} \otimes \cdots \otimes e^{j(s)}.$$

Zij $Q = (Dy)_p$. Dan hebben we, analoog aan het bovenstaande, met ${}_yT(p) = Q_*(T(p))$, dat

$${}_yT(p) = \sum_{k,l} {}_yT^{k(1)\dots k(r)}_{l(1)\dots l(s)}(p)\; e_{k(1)} \otimes \cdots \otimes e_{k(r)} \otimes e^{l(1)} \otimes \cdots \otimes e^{l(s)}.$$

Anderzijds is

$${}_yT(p) = A_*[{}_xT(p)], \tag{22}$$

waarbij $A = Q \circ P^{-1} = (Dy)_p \circ (Dx)_p^{-1} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$. De componenten van A ten aanzien van de standaardbasis van R^n worden gegeven door

$$A^i_j = e^i(Ae_j) = [Q^*(e^i)](P^{-1}e_j) = (dy^i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p). \tag{23}$$

Op soortgelijke wijze ziet men dat de componenten van de inverse matrix A^{-1} gegeven worden door:

$$[A^{-1}]^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(p). \tag{24}$$

Combineren we (22), (23) en (24) met (19) dan vinden we de volgende transformatieformule op $\Omega_x \cap \Omega_y$:

$${}_yT^{i(1)\dots i(r)}_{j(1)\dots j(s)} = \sum_{k,l} \frac{\partial y^{i(1)}}{\partial x^{k(1)}} \cdots \frac{\partial y^{i(r)}}{\partial x^{k(r)}} \frac{\partial x^{l(1)}}{\partial y^{j(1)}} \cdots \frac{\partial x^{l(s)}}{\partial y^{j(s)}}\; {}_xT^{k(1)\dots k(r)}_{l(1)\dots l(s)}. \tag{25}$$

Laat omgekeerd $\mathcal{A}$ een atlas van M zijn, en veronderstel dat voor elke $x \in \mathcal{A}$ een stel C^∞-funkties ${}_xT^{i(1)\ldots i(r)}_{j(1)\ldots j(s)} \in C^\infty(\Omega_x)$ gegeven is, voor $i \in \mathcal{O}_r$ en $j \in \mathcal{I}_s$, zo dat voor alle $x, y \in \mathcal{A}$ de transformatieformules (25) gelden op de doorsnede van Ω_x en Ω_y. Dan is er een unieke $T \in \Gamma(\mathcal{T}^r_s TM)$ zo dat in elke coordinatisering $x \in \mathcal{A}$ de formule (21) geldt. Dit is de manier waarop tensoren in de fysica meestal beschreven worden.