Dictaat Functies en Reeksen

E.P. van den Ban

Herzien, Juli 2019

Voorwoord

Dit dictaat is ontstaan uit een aanpassing van het dictaat Functies en Reeksen van Prof.dr. J.J. Duistermaat, versie juni 2005. Dat dictaat was op zijn beurt ontstaan uit eerdere teksten van Dr. J.D. Stegeman, Dr. J.A.C. Kolk en mijzelf.

De wijziging bestaat er op de eerste plaats uit dat er een selectie is gemaakt uit de behandelde onderwerpen, namelijk differentiëren in meer variabelen, verwisselingsstellingen en convergentie van oneigenlijke integralen, convergentie van rijen en reeksen van functies, machtreeksen en complexe differentieerbaarheid, en tenslotte Fourier-reeksen. Daarbij is op sommige plaatsen gekozen voor andere gezichtspunten. Bij de behandeling van totale differentiatie is meer nadruk komen te liggen op het aspect van lineaire benadering. In de theorie van oneigenlijke integralen is meer nadruk komen te liggen op het principe van majorantie. Op andere plaatsen, zoals de behandeling van de Dirichletkern in de theorie van de Fourier-reeksen is gekozen voor een meer geleidelijke ontwikkeling van de theorie.

De structuur van het nieuwe dictaat is gebaseerd op de opbouw van de cursus waarmee in de jaren 2011 - 2013 ervaring is opgedaan.

Graag bedank ik Heinz Hanßmann voor een suggestie en een discussie, die geleid hebben tot het toevoegen van Stelling 5.48, Gevolg 5.49 en Lemma 5.50.

Notatie

Net als in het dictaat ‘Inleiding Analyse’ gebruiken we in dit dictaat de volgende notatie, die afwijkt van de notatie bij de cursus ‘Wat is Wiskunde.’

(a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$; wij beschouwen dus ook 0 als natuurlijk getal. Daarnaast schrijven we $\mathbb{N}^*$ of $\mathbb{Z}_+$ voor $\mathbb{N} \backslash \{0\}$.

(b) Als A en B verzamelingen zijn, dan betekent $A \subset B$ dat ieder element van A ook tot B behoort. Bij ‘Wat is Wiskunde’ was de notatie $A \subseteq B$ gebruikelijk. Verder gebruiken wij de notatie $A \subsetneq B$ voor de uitspraak $A \subset B$ en $A \neq B$. Bij ‘Wat is Wiskunde’ was hiervoor de notatie $A \subset B$ gebruikelijk.

(c) Intervallen worden als volgt genoteerd, voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:

$$[\,a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad]\,a, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Verder gebruiken we bijvoorbeeld de notatie: $[a, \infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$.

Tenslotte gebruiken we nog de notatie $a := b$ voor de uitspraak ‘a is per definitie gelijk aan b.’

Inhoudsopgave

1 Partiële en totale afgeleiden

1.1 Partiële differentieerbaarheid

In het vervolg is X een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. We zeggen dat X een omgeving is van een punt ξ, indien ξ tot het inwendige $\mathrm{inw}(X)$ van X behoort. Dit laatste betekent dat er een $\delta > 0$ bestaat zodat de open bol $B(\xi;\delta)$ met middelpunt ξ en straal δ bevat is in X.

Veronderstel dat $\xi \in \mathrm{inw}(X)$ en laat $f : X \to \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie zijn. Zij $1 \leq j \leq n$. Fixeren we de coördinaten met rangnummer ongelijk j, en laten we de j-de coördinaat nog vrij bewegen, dan krijgen we de reëelwaardige functie

$$\phi\colon t \mapsto f\,(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{j-1},\,t,\,\xi_{j+1},\,\ldots,\,\xi_n) \tag{1.1}$$

van één reële variabele t. Deze functie is gedefinieerd op de verzameling

$$I_j(\xi) := \{t \in \mathbb{R} \mid (\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{j-1},\,t,\,\xi_{j+1},\,\ldots,\,\xi_n) \in X\},$$

Hierbij is gemakkelijk na te gaan dat $I_j(\xi)$ een omgeving is van het punt ξ_j in $\mathbb{R}$. Immers, er is een $\delta > 0$ zodanig dat $B(\xi;\delta) \subset X$. Voor $t \in \,]\,\xi_j - \delta, \xi_j + \delta\,[$ geldt nu dat $(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{j-1},\,t,\,\xi_{j+1},\,\ldots,\,\xi_n) \in B(\xi;\delta)$, en we zien dat $]\,\xi_j - \delta, \xi_j + \delta\,[\, \subset I_j(\xi)$.

Definitie 1.1 De functie f heet *partieel differentieerbaar naar de j-de variabele* $(1 \leq j \leq n)$, *in het punt* $\xi \in \mathrm{inw}(X)$, als de functie (1.1) differentieerbaar is in het punt $t = \xi_j$. Is dit het geval, dan wordt de afgeleide van de functie (1.1) in het punt $t = \xi_j$ de *partiële afgeleide van f naar de j-de variabele in het punt* ξ genoemd en genoteerd met $D_jf(\xi)$. ⊘

Is f in het punt $\xi \in \mathrm{inw}(X)$ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele, dan geldt volgens de bovenstaande definitie dus

$$D_jf(\xi) = \phi'(\xi_j) = \left.\frac{d}{dt}f(\xi_1,\ldots,\xi_{j-1},t,\xi_{j+1},\ldots,\xi_n)\right|_{t=\xi_j}.$$

Is X open, dan zegt men dat f op X *partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele* als f partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele in ieder punt van X. In dat geval kunnen we partiële afgeleide $D_jf(\xi)$ beschouwen als een functie van $\xi \in X$. Deze functie heet de *partiële afgeleide van f naar de j-de variabele* en wordt genoteerd met:

$$D_jf : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto D_jf(x).$$

In de literatuur komt men ook de notatie ∂_jf voor D_jf tegen. De klassieke notatie voor de partiële afgeleide $D_jf(x)$ van f naar de j-de variabele is

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \tag{1.2}$$

waarin we de notatie $x = (x_1,\,\ldots,\,x_{j-1},\,x_j,\,x_{j+1},\,\ldots,\,x_n)$ hebben gebruikt en waarbij alle coördinaten als variabelen worden opgevat. (Deze variabelen mogen met willekeurige andere letters genoteerd worden, zoals bijvoorbeeld $(x,\,y)$ voor de coördinaten in het vlak.)

Opmerking 1.2 Men schrijft in plaats van (1.2) ook wel $\partial f(x)/\partial x_j$, of

$$\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)$$

als de formule voor $f(x)$ te groot is om boven een breukstreep te zetten. Het gebruik om partiële afgeleiden met het symbool ∂ aan te duiden is omstreeks 1840 door Jacobi ingevoerd. In het Engels wordt dit symbool, de 'kromme d', uitgesproken als 'partial' of 'del'.

Als men, voor een gegeven $\xi \in X$, de partiële afgeleide in het punt ξ aan wil geven, dan betekent dit dat we van de functie in (1.2) de waarde in het punt $x = \xi$ dienen te nemen, dus

$$D_j f(\xi) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|_{x=\xi}.$$

Het is ook gebruikelijk (en verleidelijk) om de functie $D_j f$ aan te duiden als $\partial f / \partial x_j$. Dit leidt dan tot de notatie

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)$$

voor de partiële afgeleide van f in het punt ξ. Deze notatie is echter verwarrend omdat het symbool x_j niet onder de coördinaten van ξ voorkomt. Bijvoorbeeld, als $f(y, t)$ een functie is van de twee variabelen y en t, dan leidt dit tot de notatie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

voor de partiële afgeleide van f naar de eerste variabele in het punt $(0, 0)$. Men kan zich hier terecht afvragen of met de variabele y, waarnaar gedifferentieerd wordt, de eerste of de tweede variabele bedoeld wordt.

Nog verwarrender is een uitdrukking als

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x),$$

met als voor de hand liggende interpretaties

$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{y=x} = (D_1 f)(x, x),$$

of

$$\left.\frac{\partial f(y, x)}{\partial x}\right|_{y=x} = (D_2 f)(x, x),$$

of

$$\frac{d}{dx} f(x, x),$$

hetgeen weer iets heel anders is.

We willen niet pietluttig doen, maar het is wel aanbevelenswaardig om notaties zó te kiezen dat duidelijk is wat er bedoeld wordt. $\oslash$

Omdat partiële differentiatie in feite differentiatie is van een functie van één reële variabele (namelijk de j-de coördinaat), zijn de volgende rekenregels een direct gevolg van de corresponderende bekende rekenregels voor functies van één variabele.

Lemma 1.3 *Zij f, g een tweetal functies $X \to \mathbb{R}$, en zij $\xi \in \mathrm{inw}(X)$. Zijn f en g in ξ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele, dan zijn $f+g$ en $f\,g$ dat ook en er geldt dat*

$$D_j(f+g)(\xi) = D_jf(\xi) + D_jg(\xi), \tag{1.3}$$
$$D_j(f\,g)(\xi) = D_jf(\xi)g(\xi) + f(\xi)D_jg(\xi). \tag{1.4}$$

Is bovendien $f(\xi) \neq 0$, dan is de functie $1/f$ in ξ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele en er geldt dat

$$D_j\left(\frac{1}{f}\right)(\xi) = -\frac{D_jf(\xi)}{f(\xi)^2}. \tag{1.5}$$

Is X open, en zijn $f, g : X \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele, dan leidt het bovenstaande lemma in de klassieke notatie tot de formules:

$$\frac{\partial(f(x)+g(x))}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_j},$$
$$\frac{\partial(f(x)\,g(x))}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\,g(x) + f(x)\,\frac{\partial g(x)}{\partial x_j}.$$

Is bovendien $f(x) \neq 0$, dan is $1/f$ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele in het punt x en hebben we volgens het lemma in de klassieke notatie

$$\frac{\partial(1/f(x))}{\partial x_j} = -\frac{1}{f(x)^2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}.$$

Op precies dezelfde manier als hierboven kan men spreken over partiële differentieerbaarheid van vectorwaardige functies $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^p$. Voor een dergelijke functie noteren we de componenten met f_i, voor $1 \leq i \leq p$, zo dat

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)).$$

Op grond van het analoge lemma voor functies van één variabele geldt het volgende.

Lemma 1.4 *Zij $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^p$ en $\xi \in \mathrm{inw}(X)$. Laat $1 \leq j \leq n$. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig.*

(a) *De functie f is in ξ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele.*

(b) *Voor iedere $1 \leq i \leq p$ is de component f_i partieel differentieerbaar naar de j-de variabele in het punt ξ.*

Is een van de bovenstaande condities (a) en (b) vervuld (dus ook de andere), dan geldt dat

$$D_jf(\xi) = (D_jf_1(\xi), \ldots, D_jf_p(\xi)).$$

Partiële afgeleiden zijn een belangrijk hulpmiddel om lokale extrema van functies van meer variabelen te vinden.

Lemma 1.5 *Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, ξ een inwendig punt van X en $f : X \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele. Als f een lokaal maximum, resp. minimum heeft in het punt ξ, dan is de partiële afgeleide van f naar de j-de variabele in het punt ξ gelijk aan nul.*

Bewijs Het gegeven impliceert dat de functie ϕ van één variabele, die gedefinieerd is in (1.1), een lokaal maximum, resp. minimum heeft in het punt $t = \xi_j$. Uit de theorie van differentieerbare functies van één variabele is bekend dat hieruit volgt dat $\phi'(\xi_j) = 0$. □

Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en neem nu aan dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de functie $f : X \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele. In dit geval is de *gradiënt* van f in het punt x de vector in $\mathbb{R}^n$ die is gedefinieerd door

$$\operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right). \tag{1.6}$$

Later zullen we zien dat de gradiënt in het kader van matrix-rekening beter opgevat kan worden als kolomvector. Op dit moment speelt dat nog geen rol.

Definitie 1.6 Laat de functie $f : X \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar zijn naar elk van zijn variabelen. Men zegt dat $\xi \in X$ een *stationair* (of ook wel *kritiek*) punt is van f als $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$, dat wil zeggen: voor iedere $1 \leq j \leq n$ geldt dat $\partial f(x)/\partial x_j = 0$ als $x = \xi$. ⊘

Het *variatieprincipe* van Lemma 1.5 zegt dat als f een lokaal maximum of minimum in het punt ξ heeft, dan is ξ een stationair punt van f.

Voorbeeld 1.7 Zij nu $X = \mathbb{R}^2$ en $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dan heeft f een minimum in $(0, 0)$, dus is $\operatorname{grad} f(0, 0) = 0$. Dit kan ook door een berekening van de partiële afgeleiden geverifieerd worden:

$$\partial f(x, y)/\partial x = 2x = 0 \quad \text{als} \quad x = 0 \quad \text{en}$$

$$\partial f(x, y)/\partial y = 2y = 0 \quad \text{als} \quad y = 0.$$

Neem nu $f(x, y) = x^2 - y^2$. Dan is

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, -2y)^{\mathrm{T}}.$$

Dus ook in dit geval is $\operatorname{grad} f(0, 0) = 0$, dus is $(0, 0)$ een stationair punt van f. Echter, f heeft geen lokaal minimum in $(0, 0)$ omdat er willekeurig dicht bij $(0, 0)$ punten (x, y) zijn met $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$, neem bijvoorbeeld $x = 0$ en $y \neq 0$. Anderzijds zien we, door punten (x, y) te beschouwen met met $y = 0$ en $x \neq 0$, dat f ook geen lokaal maximum heeft in $(0, 0)$. Een stationair punt van f waarin f geen lokaal minimum en ook geen lokaal maximum heeft, wordt ook wel een *zadelpunt* van f genoemd. ⊘

1.2 Richtingsdifferentieerbaarheid

Het in de vorige paragraaf geïntroduceerde begrip partiële afgeleide kan worden gezien als een speciaal geval van het begrip richtingsafgeleide. Dit laatste begrip definiëren we als volgt. In het vervolg is $X \subset \mathbb{R}^n$ en $f : X \to \mathbb{R}^p$ een afbeelding.

Definitie 1.8 Zij $\xi \in \operatorname{inw}(X)$ en $v \in \mathbb{R}^n$. De afbeelding f heet in het punt ξ *richtingsdifferentieerbaar* in de richting v indien de functie $t \mapsto f(\xi + tv)$ differentieerbaar is in $t = 0$. De afgeleide

$$D_v f(\xi) := \left. \frac{d}{dt} f(\xi + tv) \right|_{t=0}$$

wordt in dat geval de *richtingsafgeleide* van f in het punt ξ in de richting v genoemd. ⊘

Opmerking 1.9 We merken op dat de richtingsdifferentieerbaarheid van f in ξ in de richting v gelijkwaardig is met het bestaan van de limiet

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t}.$$

Indien deze limiet bestaat is zijn waarde gelijk aan de richtingsafgeleide $D_v f(\xi)$. $\oslash$

Ook voor de richtingsafgeleide geldt het principe van componentsgewijs differentiëren. Vergelijk met Lemma 1.4.

Lemma 1.10 *Zij $\xi \in \operatorname{inw}(X)$ en $v \in \mathbb{R}^n$. Zij $f : X \to \mathbb{R}^p$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig:*

(a) *de functie f is in ξ richtingsdifferentieerbaar in de richting v;*

(b) *voor iedere $1 \le i \le p$ is de componentsfunctie $f_i : X \to \mathbb{R}$ in ξ richtingsdifferentieerbaar in de richting v.*

Zijn condities (a) en (b) vervuld, dan is

$$D_v f(\xi) = (\, D_v f_1(\xi), \dots, D_v f_p(\xi)\,).$$

Partieel differentiëren kan opgevat worden als richtingsdifferentiëren in specifieke richtingen.

Lemma 1.11 *Zij e_j de j-de standaardbasis vector in $\mathbb{R}^n$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De partiële afgeleide $D_j f(\xi)$ bestaat.*

(b) *De functie f is in ξ richtingsdifferentieerbaar in de richting e_j.*

Bovendien geldt in het geval dat (a) en (b) waar zijn dat

$$D_j f(\xi) = D_{e_j} f(\xi). \tag{1.7}$$

Bewijs Er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $B(\xi; \delta) \subset X$. We introduceren het open interval $I :=]\, \xi_j - \delta, \xi_j + \delta\, [$ en definiëren de functie $\varphi : I \to \mathbb{R}^p$ door

$$\varphi(s) = f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, s, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n), \qquad (s \in I).$$

Voor de (gewone) afgeleide van φ naar de variabele s geldt wegens de kettingregel voor (gewone) differentiatie dat φ differentieerbaar is in ξ_j dan en slechts dan als de functie $t \mapsto \varphi(\xi_j + t)$ differentieerbaar is in 0. De eerste bewering is per definitie gelijkwaardig met (a). De tweede bewering is gelijkwaardig met (b) omdat voor alle $t \in]-\delta, \delta[$ geldt dat $\varphi(\xi_j + t) = f(\xi + te_j)$. Bovendien geldt vanwege de kettingregel voor gewone differentiatie in geval de beweringen waar zijn dat

$$D_j f(\xi) = \varphi'(\xi_j) = \frac{d}{dt}\varphi(\xi_j + t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\xi + te_j)\Big|_{t=0} = D_{e_j} f(\xi).$$

Dit geeft (1.7). $\square$

1.3 De totale afgeleide

In deze paragraaf behandelen we een nieuw begrip van differentieerbaarheid, waarbij de afgeleide de rol zal spelen van de lineaire (of eerste orde) benadering van de groei van een functie.

In het vervolg veronderstellen we weer dat $X \subset \mathbb{R}^n$ en dat $f : X \to \mathbb{R}^p$.

Definitie 1.12 Zij $\xi \in \mathrm{inw}(X)$. De functie f heet *(totaal) differentieerbaar* in ξ indien er een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bestaat zo dat

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\|f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)\|}{\|x - \xi\|} = 0. \tag{1.8}$$

$\oslash$

In het onderstaande lemma wordt een verband gelegd met richtingsdifferentieerbaarheid. Hieruit zal blijken dat de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uniek vastgelegd is door de eigenschap (1.8). Daarna kunnen we een geschikte notatie voor A afspreken.

Lemma 1.13 *Laat de functie f differentieerbaar zijn in ξ en laat A voldoen aan (1.8). Dan geldt voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ dat de functie f richtingsdifferentieerbaar is in ξ in de richting v. De bijbehorende richtingsafgeleide wordt gegeven door*

$$D_v f(\xi) = A(v). \tag{1.9}$$

In het bijzonder is A uniek bepaald.

Bewijs De bewering is duidelijk voor $v = 0$. We veronderstellen daarom dat $v \neq 0$. Door $x = \xi + tv$ te substitueren in (1.8) vinden we dat

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(\xi + tv) - f(\xi) - A(tv)\|}{|t|\|v\|} = 0.$$

Uit de lineariteit van A volgt dat $A(tv) = tA(v)$, dus ook

$$\lim_{t \to 0} \|v\|^{-1} \left\| \frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t} - A(v) \right\| = 0$$

en we concluderen dat

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{f(\xi + tv) - f(\xi)}{t} - A(v) \right) = 0,$$

dus (1.9). $\square$

De uniciteit van A maakt de volgende definitie mogelijk.

Definitie 1.14 Laat f totaal differentieerbaar zijn in ξ. De unieke lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ die voldoet aan (1.8) wordt genoteerd met $Df(\xi)$ en heet de *totale afgeleide* van f in ξ. $\oslash$

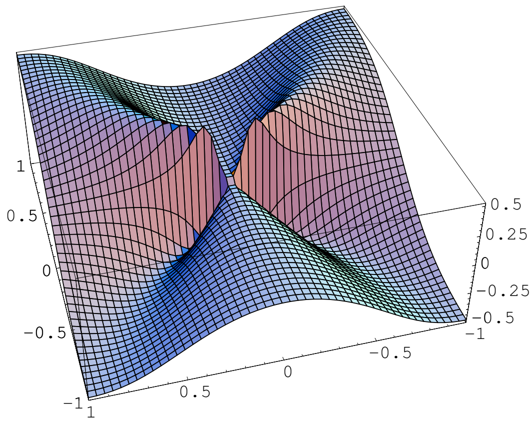
Opmerking 1.15 Is f totaal differentieerbaar in ξ dan geldt wegens Lemma 1.13 dat f richtingsdifferentieerbaar is in ξ en dat

$$Df(\xi)(v) = D_v f(\xi), \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{1.10}$$

In het bijzonder zien we dat de richtingsafgeleide $D_v f(\xi)$ lineair afhankelijk is van de richting $v \in \mathbb{R}^n$. $\oslash$

In het bijzonder is een totaal differentieerbare functie ook partieel differentieerbaar, zie Lemma 1.11. Uit het volgende voorbeeld blijkt dat het omgekeerde niet het geval hoeft te zijn.

Voorbeeld 1.16 Definieer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $f(x,\, y) := x\, y^2 / \left(x^2 + y^4\right)$ als $(x,\, y) \neq (0,\, 0)$ en door $f(0,\, 0) := 0$. Dan is f partieel differentieerbaar met continue partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$ op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}$.



$$f(x,\, y) = x\, y^2 / \left(x^2 + y^4\right) \text{ voor } -1 < x < 1,\, -1 < y < 1.$$

Neem $v = (a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ met $a \neq 0$. Dan is

$$\frac{f(t\, v) - f(0)}{t} = \frac{t^3\, a\, b^2}{t\, \left(t^2\, a^2 + t^4\, b^4\right)} = \frac{a\, b^2}{a^2 + t^2\, b^4} \to \frac{a\, b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}$$

als $t \neq 0$ en $t \to 0$. Is anderzijds $b \neq 0$ en $t \neq 0$, dan is $\left(f(t\, 0,\, t\, b) - f(0,\, 0)\right)/t = 0$. Dus in het punt $(0,\, 0)$ is f richtingsdifferentieerbaar in de richting van iedere vector, met $D_v f(0,\, 0) = b^2/a$ als $v = (a,\, b)$ en $a \neq 0$ en $D_v f(0,\, 0) = 0$ als $v = (0,\, b)$. In het bijzonder geldt dus dat f partieel differentieerbaar is in $(0, 0)$ met partiële afgeleiden $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$. Het is duidelijk dat de richtingsafgeleide $D_v f(0,\, 0)$ niet op een lineaire manier van de richtingsvector $v = (a,\, b)$ afhangt. Met het oog op Opmerking 1.15 concluderen we dat f niet totaal differentieerbaar kan zijn in het punt $(0,\, 0)$.

Het is wellicht verrassend dat de functie f ondanks het bestaan van de partiële afgeleiden in $(0, 0)$ niet continu is in dat punt. Dit zien we als volgt. Voor iedere $c \in \mathbb{R}$ en $y \neq 0$ is

$$f(c\, y^2,\, y) = \frac{c\, y^4}{c^2\, y^4 + y^4} = \frac{c}{c^2 + 1}.$$

Stel dat de functie f continu is in het punt $(0,\, 0)$. Als $y \to 0$, dan $(c\, y^2,\, y) \to (0,\, 0)$ en dan zou de continuïteit van f in het punt $(0,\, 0)$ impliceren dat $f(c\, y^2,\, y)$ naar 0 convergeert als $y \to 0$. Echter, als $c \neq 0$ dan is $f(c\, y^2,\, y)$ voor iedere $y \neq 0$ gelijk aan de constante $c / \left(c^2 + 1\right) \neq 0$ en we krijgen een tegenspraak.

Samenvattend, dit is een voorbeeld van een functie die in ieder punt differentieerbaar is met betrekking tot iedere variabele, maar die in de oorsprong niet continu is. $\oslash$

Gevolg 1.17 *Laat f totaal differentieerbaar zijn in ξ. Dan wordt de matrix van $Df(\xi)$ (ten aanzien van de standaardbases) gegeven door*

$$Df(\xi)_{ij} = D_j f_i(\xi) \qquad (1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p).$$

De $n \times p$ matrix $(D_j f_i(\xi))_{ij}$ staat bekend als de *Jacobi-matrix* van de functie f in het punt ξ.

Bewijs De afgeleide $Df(\xi)$ is een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en heeft dus een matrix met p rijen en n-kolommen. Het element in de i-de rij en de j-de kolom wordt genoteerd met $Df(\xi)_{ij}$. Het wordt gegeven door

$$Df(\xi)_{ij} = (Df(\xi)e_j)_i = (D_{e_j} f(\xi))_i$$

wegens Opmerking 1.15. Door toepassing van (1.7) en Lemma 1.4 vinden we dat

$$Df(\xi)_{ij} = (D_j f(\xi))_i = D_j f_i(\xi).$$

$\square$

Opmerking 1.18 Voordat we verder gaan met de ontwikkeling van de theorie vermelden we nog dat de conditie (1.8) in Definitie 1.12 ook als volgt geformuleerd kan worden:

$$f(\xi + h) = f(\xi) + A(h) + R(h), \qquad \text{met} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1.11}$$

Immers, definieer $\rho : X \to \mathbb{R}^p$ door $\rho(x) = f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)$. Dan is (1.8) gelijkwaardig met

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\|\rho(x)\|}{\|x - \xi\|}.$$

Schrijven we $R(h) = \rho(\xi + h)$, en passen we de substitutieregel voor limieten toe, dan volgt de gelijkwaardigheid met (1.11).

De eerste uitdrukking in (1.11) kan opgevat worden als de multi-variabele eerste orde Taylor ontwikkeling van f rond ξ. $\oslash$

Om ruimte te besparen zullen we in het vervolg kolomvectoren als volgt noteren:

$$(a_1, \ldots, a_k)^{\mathrm{T}} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 1.19 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = x_1 x_2.$$

Laat $\xi \in \mathbb{R}^2$ een vast punt zijn. Dan geldt voor alle $h \in \mathbb{R}^2$ dat

$$f(\xi + h) - f(\xi) = (\xi_1 + h_1)(\xi_2 + h_2) - \xi_1 \xi_2 = \xi_2 h_1 + \xi_1 h_2 + h_1 h_2 = A(h) + R(h),$$

met
$$A(h) = (\xi_2 \ \ \xi_1)(h_1, h_2)^{\mathrm{T}}, \qquad R(h) = h_1 h_2.$$
De gedefinieerde afbeelding A is lineair, en voor R geldt dat $|R(h)| \leq |h_1||h_2| \leq \|h\|^2$, dus
$$\lim_{h \to 0} \frac{|R(h)|}{\|h\|} = 0.$$
We zien dat de afbeelding f totaal differentieerbaar is in ξ, met afgeleide $Df(\xi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die gegeven wordt door de rij-matrix $(\xi_2 \ \ \xi_1)$.

Met Gevolg 1.17 volgt hieruit dat
$$D_1 f(\xi) = \xi_2 \quad \text{en} \quad D_2 f(\xi) = \xi_1.$$
Dit is uiteraard ook direct af te leiden door de rekenregels voor partiële differentiatie toe te passen. ⊘

We zullen het nieuw geïntroduceerde begrip totale afgeleide in het geval $n = 1$ vergelijken met de gewone afgeleide. In het bewijs van het onderstaande resultaat zullen we gebruik maken van Gevolg 1.17.

Lemma 1.20 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval en $f : I \to \mathbb{R}^p$ een functie. Laat $\tau \in I$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is differentieerbaar in τ in de oude zin (van Inleiding Analyse).*

(b) *De functie f is totaal differentieerbaar in τ.*

Is f differentieerbaar in τ, dan wordt het verband tussen de twee afgeleiden gegeven door
$$f'(\tau) = Df(\tau)(1).$$

Bewijs Veronderstel eerst dat (b) geldt. Dan volgt uit Gevolg 1.17 dat f partieel differentieerbaar is, dus gewoon differentieerbaar, terwijl de matrix van $Df(\tau)$ gegeven wordt door
$$\operatorname{mat} Df(\tau) = (f_1'(\tau), \ldots, f_p'(\tau))^{\mathrm{T}}.$$
Laten we de lineaire afbeelding $Df(\tau) : R \to \mathbb{R}^p$ werken op het punt $1 \in \mathbb{R}$ (op te vatten als de standaardbasis vector e_1 voor $\mathbb{R}$) dan vinden we dat
$$Df(\tau)(1) = f'(\tau).$$

Veronderstel nu omgekeerd dat (a) geldt, dus dat f differentieerbaar is in τ met afgeleide $f'(\tau) \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt dat
$$\lim_{t \to \tau} \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} = f'(\tau).$$
Definieer de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ door $A(v) = vf'(\tau)$, voor $v \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat
$$\lim_{t \to \tau} \frac{f(t) - f(\tau) - (t - \tau)f'(\tau)}{t - \tau} = 0,$$
dus ook
$$\lim_{t \to \tau} \frac{|f(t) - f(\tau) - A(t - \tau)|}{|t - \tau)|} = 0.$$

Hieruit blijkt dat f totaal differentieerbaar is in τ met totale afgeleide $Df(\tau) = A : h \mapsto hf'(\tau)$. In het bijzonder geldt dus $f'(\tau) = Df(\tau)(1)$. Hiermee is (b) aangetoond. $\square$

In het vervolg van onze behandeling van de totale afgeleide zullen we schattingen nodig hebben voor lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$.

Voor een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definiëren we de norm $\|L\|$ door

$$\|L\| := \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} (L_{ij})^2 \right)^{1/2}, \tag{1.12}$$

waarin de L_{ij} de matrixcoëfficiënten van L voorstellen. Anders gezegd, de norm van L is gelijk aan de *Euclidische* norm van de vector in $\mathbb{R}^{np}$ waarvan de coördinaten de matrixcoëfficiënten van L zijn (genomen in een bepaalde gekozen volgorde, het doet er niet toe welke).

We noteren met $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de verzameling van alle lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Deze verzameling voorzien we van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging. Dus als $L, M \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan worden de elementen $L + M$ en λL van $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ gegeven door

$$(L + M)(x) = L(x) + M(x), \quad (\lambda L)(x) = \lambda L(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

De matrixcoefficiënt-afbeelding $L \mapsto (L_{ij})$, gezien als afbeelding $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^{np}$ is nu bijectief en lineair, dus een lineair isomorfisme. Via dit isomorfisme correspondeert de in (1.12) gedefinieerde norm op $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ met de Euclidische norm op $\mathbb{R}^{np}$. Dit laat ook zien dat $\|\cdot\|$ ook inderdaad een norm is, d.w.z., $\|\cdot\|$ is een afbeelding $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}$ zo dat voor alle $L, M \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\|L\| \geq 0$ en $\|L\| = 0 \implies L = 0$;

(b) $\|\lambda L\| = |\lambda| \, \|L\|$;

(c) $\|L + M\| \leq \|L\| + \|M\|$ (driehoeksongelijkheid).

Zoals we in Inleiding Analyse gezien hebben, is er nu een natuurlijke afstand of metriek d op de ruimte $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, die gegeven wordt door

$$d(L, M) := \|L - M\|, \qquad (L, M \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)).$$

Het volgende lemma zal zeer nuttig blijken voor het schatten van van uitdrukkingen waarin lineaire afbeeldingen voorkomen.

Lemma 1.21 *Zij $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineair en $v \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt dat*

$$\|L\, v\| \leq \|L\| \, \|v\|. \tag{1.13}$$

Is M een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, dan geldt voor de samenstelling $M \circ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ dat

$$\|M \circ L\| \leq \|M\| \, \|L\|. \tag{1.14}$$

Bewijs In het bewijs zal steeds gebruik gemaakt worden van de volgende ongelijkheid, voor reële getallen $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s$:

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_s b_s)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{s} a_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{s} b_j^2 \right).$$

Dit is in feite de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz voor het standaardinproduct in $\mathbb{R}^s$ van de vectoren $a = (a_1, \ldots, a_s)$ en $b = (b_1, \ldots, b_s)$.

Toepassing van deze Cauchy–Schwarz-ongelijkheid levert voor iedere $1 \leq i \leq p$ dat

$$((L\,v)_i)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\, v_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (L_{ij})^2 \right) \|v\|^2.$$

Sommatie hiervan over i geeft dat $\|L\,v\|^2 \leq \|L\|^2\, \|v\|^2$, waaruit door worteltrekken (1.13) volgt.

Het bewijs van (1.14) is analoog. Door toepassen van de Cauchy-Schwarz-ongelijkheid vinden we

$$((M\,L)_{hj})^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} M_{hi}\, L_{ij} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{p} (M_{hi})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{p} (L_{ij})^2 \right).$$

Sommatie over alle h en j geeft vervolgens de gewenste schatting. $\square$

Opmerking 1.22 Een oefening in het werken met normen van lineaire afbeeldingen. Laat $v,\ v_0 \in \mathbb{R}^n$ en $L,\ L_0 \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^p)$. Gebruikmakend van (1.13) krijgen we uit

$$\begin{aligned} Lv - L_0 v_0 &= L\,v - L\,v_0 + L\,v_0 - L_0\,v_0 \\ &= L\,(v - v_0) + (L - L_0)\,v_0 \\ &= L_0\,(v - v_0) + (L - L_0)\,v_0 + (L - L_0)\,(v - v_0) \end{aligned}$$

dat

$$\|Lv - L_0 v_0\| \leq \|L_0\|\, \|v - v_0\| + \|L - L_0\|\, \|v_0\| + \|L - L_0\|\, \|v - v_0\|. \tag{1.15}$$

Met deze schatting is gemakkelijk in te zien dat de afbeelding $(L, v) \mapsto Lv, \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continu is in elke (L_0, v_0). Uiteraard kan men deze continuïteit ook afleiden door alle voorkomende uitdrukkingen in componenten uit te schrijven.

Op een soortgelijke manier kan men laten zien dat de samenstelling $(L, M) \mapsto M \circ L$ een continue afbeelding $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \times \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ definieert. $\oslash$

Als toepassing van de behandelde schattingen bewijzen we nu eerst het volgende lemma. We veronderstellen weer dat $X \subset \mathbb{R}^n$ en dat $f : X \to \mathbb{R}^p$.

Lemma 1.23 *Zij $\xi \in \mathrm{inw}(X)$, en veronderstel dat f totaal differentieerbaar is in ξ. Dan is f continu in het punt ξ.*

Bewijs We schrijven

$$\rho(x) := f(x) - f(\xi) - Df(\xi)(x - \xi).$$

Dan geldt voor alle $x \in X$ dat

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(\xi)\| &= \|Df(\xi)(x-\xi) + \rho(x)\| \\ &\leq \|Df(\xi)(x-\xi)\| + \|\rho(x)\| \\ &\leq \|Df(\xi)\|\,\|(x-\xi)\| + \|\rho(x)\|. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Uit de definitie van differentieerbaarheid volgt dat $\|\rho(x)\|\|x-\xi\|^{-1}$ limiet 0 heeft voor $x \to \xi$. Dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $B(\xi;\delta) \subset X$ en zo dat voor alle $x \in B(\xi;\delta) \setminus \{\xi\}$ geldt dat $\|\rho(x)\|\|x-\xi\|^{-1} \leq 1$. Hieruit volgt

$$\|\rho(x)\| \leq \|x-\xi\|, \qquad (x \in B(\xi;\delta)).$$

Combineren we dit met (1.16), dan zien we dat voor alle $x \in B(\xi;\delta)$ geldt dat

$$\|f(x) - f(\xi)\| \leq (\|Df(\xi)\| + 1)\|x-\xi\|.$$

Hieruit volgt weer dat dat $\|f(x) - f(\xi)\| \to 0$ voor $x \to \xi$, dus f is continu in ξ. □

Het volgende resultaat geeft een veelvuldig gebruikt criterium om tot de totale differentieerbaarheid van afbeeldingen te besluiten.

Stelling 1.24 *Laat $X \subset \mathbb{R}^n$ een open verzameling zijn, en $f : X \to \mathbb{R}^p$ een afbeelding. Zij $\xi \in X$. Veronderstel dat f partieel differentieerbaar is, terwijl de partiële afgeleiden $D_j f$ continu zijn in ξ. Dan is f totaal differentieerbaar in ξ.*

Opmerking 1.25 Wegens Gevolg 1.17 wordt de totale afgeleide $Df(\xi)$ in de bovenstaande stelling gegeven door de Jacobi-matrix. ⊘

Het bewijs van Stelling 1.24 vergt enige voorbereiding. Dit is het onderwerp van de volgende paragraaf.

1.4 Groei en afgeleide

De groei van een differentieerbare functie van één variabele kan beschreven worden in termen van zijn afgeleide, met behulp van de middelwaardestelling. Dit resultaat zullen we coördinaatsgewijs toepassen op partieel differentieerbare functies van meer variabelen. De volgende notatie zal ons daarbij van pas komen.

Voor twee punten $a, b \in \mathbb{R}^n$ definiëren we het gesloten lijnstuk $[a,b]$ in $\mathbb{R}^n$ met eindpunten a en b door

$$[a,b] := \{a + t(b-a) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Merk op dat deze definitie in het bijzonder betekenis heeft in het eendimensionale geval $n = 1$. Is $b < a$ dan komt het zo boven gedefinieerde lijnstuk $[b,a]$ overeen met het interval $[a,b]$. Als $a = b$ dan betekent de bovenstaande definitie dat $[a,b] = \{a\}$.

Wij zullen de volgende variant van de middelwaardestelling gebruiken.

Lemma 1.26 (Middelwaardestelling) *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en $\varphi : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Dan bestaat er voor alle $a, b \in I$ een $c \in [a,b]$ zo dat*

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)\,(b-a). \tag{1.17}$$

Bewijs Voor $a < b$ is dit resultaat een gevolg van de in het dictaat Inleiding Analyse bewezen middelwaardestelling (de identiteit (1.17) geldt dan zelfs voor een $c \in]\,a, b\,[$). Voor $a = b$ is het resultaat evident. Voor $a > b$ het resultaat een gevolg van de middelwaardestelling toegepast op het interval $[b, a]$. $\square$

We veronderstellen nu dat $X \subset \mathbb{R}^n$ een open deel is en dat $f : X \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar is op X.

Lemma 1.27 *Laat $p, q \in X$ en veronderstel dat $[p, q] \subset X$. Veronderstel verder dat $1 \leq j \leq n$ en dat p en q hooguit in de j-de coordinaat verschillen (dus $p_i = q_i$ voor elke $i \neq j$). Dan bestaat er een $\eta \in [p, q]$ zo dat*

$$f(q) - f(p) = D_j f(\eta) \cdot (q_j - p_j). \tag{1.18}$$

Bewijs We beschouwen de functie $\varphi : [p_j, q_j] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\varphi(t) = f(p_1, \ldots, p_{j-1}, t, p_{j+1}, \ldots, p_n).$$

Dan is de functie φ differentieerbaar, terwijl $\varphi(p_j) = f(p)$ en $\varphi(q_j) = f(q)$. Wegens de middelwaardestelling bestaat er een $c \in [p_j, q_j]$ zo dat

$$f(q) - f(p) = \varphi(q_j) - \varphi(p_j) = \varphi'(c) \cdot (q_j - p_j) = D_j f(\eta) \cdot (q_j - p_j),$$

waarbij $\eta := (p_1, \ldots, p_{j-1}, c, p_{j+1}, \ldots p_n)$. Uit $c \in [p_j, q_j]$ volgt het bestaan van een $\tau \in [0, 1]$ zo dat $c = p_j + \tau(q_j - p_j)$. Het is nu gemakkelijk in te zien dat $\eta = p + \tau(q - p)$. Dus $\eta \in [p, q]$ en het resultaat volgt. $\square$

In het vervolg veronderstellen we dat ξ een vast punt in X is. Er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $B(\xi; \delta) \subset X$. We zullen het verschil (de groei) $f(x) - f(\xi)$ voor $x \in B(\xi; \delta)$ uitdrukken in de partiële afgeleiden van f. Om dit mogelijk te maken splitsen we eerst $f(x) - f(\xi)$ in een som van verschillen van functiewaarden, waarbij steeds slechts één van de variabelen gevarieerd wordt.

Voor $x \in B(\xi; \delta)$ definiëren we daartoe $p^{(0)}(x) = \xi$, en, voor $1 \leq j \leq n$,

$$p^{(j)}(x) := (x_1, \ldots, x_j, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n)\,. \tag{1.19}$$

Dit vatten we zo op dat $p^{(n)}(x) = x$.

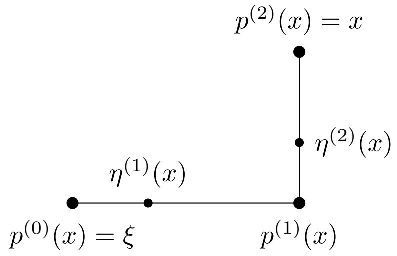
Als $1 \leq j \leq n$, dan verschillen de opeenvolgende punten $p^{(j-1)}(x)$ en $p^{(j)}(x)$ hooguit in de j-de coordinaat van elkaar. De verbindende lijnstukken $[p^{(j-1)}(x), p^{(j)}(x)]$, voor $1 \leq j \leq n$, geven samen een pad van ξ naar x, waarbij stuksgewijs steeds slechts één van de coördinaten varieert.

Uit (1.19) leiden we af dat

$$\|p^{(j)}(x) - \xi\| = \left(\sum_{k=1}^{j} (x_k - \xi_k)^2 \right)^{1/2} \leq \|x - \xi\|.$$

De punten $p^{(j)}(x)$ liggen dus in $B(\xi; \|x - \xi\|) \subset B(\xi; \delta)$ en hetzelfde geldt daarom voor de verbindende lijnstukken, voor $1 \leq j \leq n$:

$$[p^{(j-1)}(x), p^{(j)}(x)] \subset B(\xi; \|x - \xi\|) \subset B(\xi; \delta). \tag{1.20}$$



Het pad van het punt ξ naar het punt x in het vlak ($n = 2$).

Het verschil $f(x) - f(\xi)$ kan geschreven worden als

$$\begin{aligned} f(x) - f(\xi) &= f(p^{(n)}(x)) - f(p^{(0)}(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (f(p^{(j)}(x)) - f(p^{(j-1)}(x)). \end{aligned} \tag{1.21}$$

We concentreren ons op herschrijven van de j-de term, voor $1 \leq j \leq n$. De punten $p^{(j-1)}(x)$ en $p^{(j)}(x)$ verschillen wegens (1.19) hooguit in de j-de coordinaat, en er geldt dat

$$p^{(j)}(x)_j - p^{(j-1)}(x)_j = (x_j - \xi_j).$$

Het lijnstuk $[p^{(j-1)}(x), p^{(j)}(x)]$ ligt geheel in $B(\xi; \delta)$ en dus in X. Door toepassing van het bovenstaande lemma zien we nu dat er een $\eta^{(j)}(x) \in [p^{(j-1)}(x), p^{(j)}(x)]$ bestaat zo dat

$$f(p^{(j)}(x)) - f(p^{(j-1)}(x) = D_j f(\eta^{(j)}(x)) \cdot (x_j - \xi_j). \tag{1.22}$$

Schrijf

$$L_j(x) := D_j f(\eta^{(j)}(x)). \tag{1.23}$$

Dan volgt door combinatie van (1.21), (1.22) en (1.23) dat

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x) \cdot (x_j - \xi_j). \tag{1.24}$$

Dit leidt tot het volgende resultaat.

Stelling 1.28 *Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $\xi \in X$. Laat $f : X \to \mathbb{R}$ een functie zijn zo dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de functie f partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele terwijl de partiële afgeleide functie functie $D_j f : X \to \mathbb{R}$ continu is in het punt ξ. Dan is er een omgeving U van ξ in X en zijn er functies $L_j : U \to \mathbb{R}$, voor $1 \leq j \leq n$, waarvoor geldt dat*

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\ (x_j - \xi_j)\,, \quad (x \in U) \qquad \text{en} \quad \lim_{x \to \xi} L_j(x) = D_j f(\xi). \tag{1.25}$$

Bewijs Kies $\delta > 0$ als boven, schrijf $U = B(\xi;\delta)$ en definieer functies $L_j : U \to \mathbb{R}$ als in (1.23). Dan geldt (1.24).

Wegens (1.20) geldt $\|\eta^{(j)}(x) - \xi\| \leq \|x - \xi\|$, voor $1 \leq j \leq n$, en dus $\eta^{(j)}(x) \to \xi$ als $x \to \xi$. Anderzijds is de partiële afgeleide $D_j f$ continu in ξ. Met de substitutiestelling volgt daarom dat

$$L_j(x) = D_j f(\eta^{(j)}(x)) \to D_j f(\xi), \qquad (x \to \xi).$$

□

In de bovenstaande context definiëren we de van x afhankelijke lineaire afbeelding $L(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door

$$L(x)(v) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x) v_j.$$

Dan kunnen we (1.24) herschrijven als

$$f(x) - f(\xi) = L(x)(x - \xi).$$

We beschouwen nu algemener het geval van een vectorwaardige functie $f : X \to \mathbb{R}^p$ en veronderstellen dat deze functie partieel differentieerbaar is op X, met partiële afgeleiden die continu zijn in ξ. Dan kunnen we Stelling 1.28 toepassen op ieder van de componentsfuncties $f_i : X \to \mathbb{R}$. Aldus vinden we het volgende.

Gevolg 1.29 *Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^p$ en $\xi \in X$. Veronderstel dat voor iedere $1 \leq i \leq p$ en iedere $1 \leq j \leq n$ de functie f_i partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele en dat de functie $D_j f_i : X \to \mathbb{R}$ continu is in het punt ξ. Dan is er een omgeving U van ξ in X en bestaat er een functie $L : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, waarvoor geldt dat*

$$f(x) - f(\xi) = L(x)\ (x - \xi)\,, \quad x \in U \quad \text{en} \quad \lim_{x \to \xi} L(x)_{ij} = D_j f_i(\xi), \tag{1.26}$$

voor alle $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq n$.

Bewijs Ieder van de componentsfuncties f_i, voor $1 \leq i \leq p$, voldoet aan de voorwaarden van Stelling 1.28. Hieruit volgt het bestaan van een omgeving U van ξ in X en reëelwaardige functies $L_{ij} : U \to \mathbb{R}$, voor $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq n$ zo dat

$$f_i(x) - f_i(\xi) = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(x)(x_j - \xi_j)$$

voor alle $x \in U$, en zo dat bovendien voor alle i, j geldt dat $L_{ij}(x) \to D_j f_i(\xi)$, voor $x \to \xi$.

Voor $x \in U$ definiëren we de lineaire afbeelding $L(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ door

$$(L(x)v)_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(x) v_j, \qquad (v \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq p).$$

Dan geldt voor alle $x \in U$ dat $f(x) - f(\xi) = L(x)(x - \xi)$. De lineaire afbeelding $L(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ heeft als matrix coefficiënten $L(x)_{ij} = L_{ij}(x)$. Het resultaat volgt. □

Stelling 1.24 kunnen we nu als volgt uit het bovenstaande resultaat afleiden.

Bewijs van Stelling 1.24 Volgens Gevolg 1.29 bestaan er een open omgeving U van ξ en een afbeelding $L : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ als in het genoemde gevolg. Schrijf L_{ij} voor de functie $x \mapsto L(x)_{ij}$, dan geldt voor alle $1 \le i \le p$ en $1 \le j \le n$ dat $L_{ij}(x) \to D_j f_i(\xi)$ voor $x \to \xi$. In het bijzonder is elk van de functies L_{ij} continu in het punt ξ. Derhalve is de afbeelding $L : X \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ continu in ξ. Voor alle $x \in U$ geldt dat

$$f(x) - f(\xi) = L(x)(x - \xi).$$

Hieruit leiden we af dat

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(\xi) - L(\xi)(x - \xi)\| &= \|L(x)(x - \xi) - L(\xi)(x - \xi)\| \\ &= \|[L(x) - L(\xi)](x - \xi)\| \\ &\le \|L(x) - L(\xi)\| \|(x - \xi)\|. \end{aligned}$$

Is $x \in U \setminus \{\xi\}$, dan vinden we dat

$$\frac{\|f(x) - f(\xi) - L(\xi)(x - \xi)\|}{\|x - \xi\|} \le \|L(x) - L(\xi)\|.$$

Uit de continuïteit van L in ξ volgt nu dat

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\|f(x) - f(\xi) - L(\xi)(x - \xi)\|}{\|x - \xi\|} = 0.$$

Hieruit concluderen we dat f totaal differentieerbaar is in ξ, met afgeleide $Df(\xi) = L(\xi)$. $\square$

Uit het bovenstaande volgt een interessante herformulering van totale differentieerbaarheid, afkomstig van de Franse wiskundige J. Hadamard, uit het begin van de 20-ste eeuw. Die zal ons later van pas komen bij een snel bewijs van de kettingregel.

Stelling 1.30 *Zij $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}^p$ en $\xi \in \mathrm{inw}(X)$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De afbeelding f is totaal differentieerbaar in ξ.*

(b) *Er is een afbeelding $L : X \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, continu in ξ, met*

$$f(x) - f(\xi) = L(x)(x - \xi), \qquad (x \in X).$$

Indien de beweringen (a) en (b) waar zijn, dan is $Df(\xi) = L(\xi)$.

Bewijs Het bewijs van de implicatie '$(b) \Rightarrow (a)$' is nagenoeg identiek aan het bovenstaande bewijs van Stelling 1.24.

We richten ons dus op de omgekeerde implicatie, en veronderstellen dat (a) geldt, dwz. er bestaat een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ (ook genoteerd met $Df(\xi)$) zo dat

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\|f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)\|}{\|x - \xi\|} = 0.$$

Schrijf $r(x) = f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)$, voor $x \in X$. Dan geldt wegens het bovenstaande dus dat

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\|r(x)\|}{\|x - \xi\|} = 0.$$

We definiëren de afbeelding $L : X \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ door $L(\xi) = A$, en voor $x \in X \setminus \{\xi\}$ door

$$L(x) = A + \|x - \xi\|^{-2} r(x)(x - \xi)^{\mathrm{T}}.$$

Deze formule moet als volgt gelezen worden: $(x - \xi)^{\mathrm{T}}$ staat voor de rij matrix met componenten $(x_j - \xi_j)$, voor $1 \leq j \leq n$. Op deze manier kan $(x - \xi)^{\mathrm{T}}$ opgevat worden als lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. We merken op dat

$$(x - \xi)^T(v) = \langle x - \xi, v \rangle \qquad (v \in \mathbb{R}^n).$$

Verder moet $r(x)$ gelezen worden als lineaire afbeelding $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $\lambda \mapsto \lambda r(x)$, en $r(x)(x - \xi)^{\mathrm{T}}$ als compositie, dus als de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $v \mapsto (x - \xi)^{\mathrm{T}}(v)\, r(x)$. Voor alle $x \in X \setminus \{\xi\}$ geldt nu

$$\begin{aligned} L(x)(x - \xi) &= A(x - \xi) + \|x - \xi\|^{-2} r(x)(x - \xi)^{\mathrm{T}}(x - \xi) \\ &= A(x - \xi) + \|x - \xi\|^{-2} \langle x - \xi, x - \xi \rangle r(x) \\ &= A(x - \xi) + r(x) \\ &= f(x) - f(\xi). \end{aligned}$$

Uiteraard geldt ook voor $x = \xi$ dat $L(x)(x - \xi) = f(x) - f(\xi)$.

Verder merken we op dat voor $x \in X \setminus \{\xi\}$ geldt dat

$$\begin{aligned} \|L(x) - L(\xi)\| &= \|x - \xi\|^{-2} \|r(x)(x - \xi)^{\mathrm{T}}\| \\ &\leq \|x - \xi\|^{-2} \|r(x)\| \|(x - \xi)^{\mathrm{T}}\| \\ &= \frac{\|r(x)\|}{\|x - \xi\|}. \end{aligned}$$

De laatste uitdrukking heeft limiet nul voor $x \to \xi$, en we concluderen dat $\lim_{x \to \xi} L(x) = L(\xi)$.

Tenslotte merken we op dat in het voorgaande geldt dat $L(\xi) = A = Df(\xi)$. □

1.5 Rekenregels voor totale afgeleiden

We veronderstellen weer dat $X \subset \mathbb{R}^n$ en dat $\xi \in \mathrm{inw}(X)$.

Lemma 1.31 *Laten $f, g : X \to \mathbb{R}$ totaal differentieerbaar in het punt ξ zijn. Dan zijn $f + g$ en $f\, g$ totaal differentieerbaar in ξ en*

$$\begin{aligned} D(f + g)(\xi) &= Df(\xi) + Dg(\xi), &(1.27) \\ D(f\, g)(\xi) &= g(\xi)\, Df(\xi) + f(\xi)\, Dg(\xi). &(1.28) \end{aligned}$$

Is bovendien $f(\xi) \neq 0$, dan is $1/f$ totaal differentieerbaar in het punt x en is

$$D(1/f)(\xi) = -\frac{1}{f(\xi)^2}\, Df(\xi). \qquad (1.29)$$

Merk op dat we in de producten steeds de scalairen (reële getallen) vóór de lineaire afbeeldingen hebben gezet, hetgeen de gebruikelijke volgorde is. Het opschrijven in de verkeerde volgorde zou kunnen suggereren dat men denkt dat $Df(\xi)$ een getal is (de afgeleide van f in het punt ξ), in plaats van een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Als f en g continu differentieerbaar zijn op een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, dan volgt Lemma 1.31 met het oog op Stelling 1.24 uit Lemma 1.3. Men kan Lemma 1.31 echter ook zonder al te veel moeite direct uit Definitie 1.12 bewijzen. Rekenregels voor vectorwaardige totaal differentieerbare functies volgen door Lemma 1.31 op de coördinaatfuncties toe te passen.

Zeer belangrijk is de nu volgende *kettingregel voor totale afgeleiden.*

Stelling 1.32 *Laat X een open deel zijn van $\mathbb{R}^n$ en Y een open deel van $\mathbb{R}^p$. Zij $f : X \to Y$ een afbeelding die totaal differentieerbaar is in het punt $\xi \in X$. Zij $g : Y \to \mathbb{R}^q$ totaal differentieerbaar in $f(\xi)$. Dan is de samengestelde afbeelding $g \circ f : X \to \mathbb{R}^q$ totaal differentieerbaar in ξ, en er geldt dat*

$$D(g \circ f)(\xi) = Dg(f(\xi)) \circ Df(\xi). \tag{1.30}$$

Opmerking 1.33 De formule (1.30) is equivalent met de formules

$$\left.\frac{\partial g_h(f(x))}{\partial x_j}\right|_{x=\xi} = \sum_{i=1}^{p} \left.\frac{\partial g_h(y)}{\partial y_i}\right|_{y=f(\xi)} \left.\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right|_{x=\xi} \tag{1.31}$$

voor de matrixcoëfficiënten, voor $1 \le h \le q,\ 1 \le j \le n.$ $\oslash$

Bewijs We bewijzen dit door herhaalde toepassing van Stelling 1.30. Wegens die stelling bestaat er een afbeelding $L : X \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ zo dat

$$f(x) - f(\xi) = L(x)\,(x - \xi), \qquad (x \in X),$$

en $L(x) \to Df(\xi)$ als $x \to \xi$.

Wegens dezelfde stelling bestaat er een afbeelding $M : Y \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ zo dat

$$g(y) - g(f(\xi)) = M(y)(y - f(\xi)), \qquad (y \in Y),$$

en $M(y) \to Dg(f(\xi))$ als $y \to f(\xi)$.

Laat nu $x \in X$. Dan is $f(x) \in Y$ en door substitutie van $f(x)$ voor y vinden we

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(\xi)) &= M(f(x))\,(f(x) - f(\xi)) \\ &= M(f(x))\,(L(x)\,(x - \xi)) \\ &= M(f(x)) \circ L(x)\,(x - \xi). \end{aligned}$$

Schrijf $h := g \circ f$ en defineer de afbeelding $N : X \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ door

$$N(x) := M(f(x)) \circ L(x), \qquad (x \in X).$$

Dan kunnen we het bovenstaande herschrijven als

$$h(x) - h(\xi) = N(x)(x - \xi).$$

met $h = g \circ f$. Wegens Lemma 1.23 is f continu in ξ. Wegens de substitutiestelling voor continuïteit is $x \mapsto M(f(x))$ continu in ξ. Bovendien is ook L continu in ξ, en derhalve is ook het product $x \mapsto N(x)$ continu in het punt ξ (gebruik Opmerking 1.22).

Door wederom toepassen van Stelling 1.30 concluderen we nu dat h totaal differentieerbaar is in het punt ξ. Voor de totale afgeleide geldt dat

$$Dh(\xi) = N(\xi) = M(f(\xi)) \circ L(\xi) = Dg(f(\xi)) \circ Df(\xi).$$

□

De formule (1.31) komt ook voor in het college Infinitesimaalrekening. De relatie met de eenvoudiger ogende formule (1.30) kan gezien worden als een oefening in de interpretatie van de totale afgeleide als een lineaire afbeelding.

Een belangrijk speciaal geval van de kettingregel ontstaat als een functie gedifferentieerd wordt 'langs een kromme'. Om precies te zijn, laat $X \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling zijn en $g : X \to \mathbb{R}^q$ de functie in kwestie. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval, en $\gamma : I \to X$ een differentieerbare afbeelding. Zoals bekend wordt de afbeelding γ in dit geval ook wel een *kromme* in de n-dimensionale ruimte genoemd. Als $t \in I$ als de *tijd* wordt geïnterpreteerd en $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ als de *positie*, dan wordt de afbeelding γ, de 'positie als functie van de tijd', ook wel als een *beweging* in de n-dimensionale ruimte opgevat. In dit geval heet de afgeleide $\gamma'(\tau) \in \mathbb{R}^n$ de *snelheidsvector* van de beweging op het tijdstip τ.

De samenstelling $g \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^q$ noemt men ook wel de *functie g langs de kromme γ*. Merk op dat dit een vectorwaardige functie van één reële variabele is. Veronderstel nu dat $\tau \in I$ en dat g totaal differentieerbaar is in het punt $\xi = \gamma(\tau)$. Dan geeft de kettingregel (1.30) dat

$$D(g \circ \gamma)(\tau) = Dg(\xi) \circ D\gamma(\tau).$$

Toepassen van het linker- en rechterlid op $1 \in \mathbb{R}$ leidt nu met het oog op Lemma 1.20 tot de formule

$$(g \circ \gamma)'(\tau) = Dg(\xi)\ \gamma'(\tau) \tag{1.32}$$

voor de afgeleide van de functie g van n variabelen langs de kromme γ. Merk op dat $Dg(\xi)$ een lineaire afbeelding is van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^q$; het beeld hieronder van de snelheidsvector $\gamma'(\tau) \in \mathbb{R}^n$ is blijkbaar gelijk aan de vector $(g \circ \gamma)'(\tau) \in \mathbb{R}^q$. In het speciale geval $q = 1$ laat de bovenstaande formule zich herschrijven als

$$(g \circ \gamma)'(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \right|_{x=\xi} \gamma_j'(\tau) \tag{1.33}$$

Het rechterlid in deze formule is ook te zien als het inproduct van de vectoren $\operatorname{grad} g(\xi) \in \mathbb{R}^n$ en $\gamma'(\tau) \in \mathbb{R}^n$, zie (1.6); ofwel

$$(g \circ \gamma)'(\tau) = \langle \operatorname{grad} g(\xi), \gamma'(\tau) \rangle. \tag{1.34}$$

Als we nemen $\gamma(t) = \xi + t\,v$ en $\tau = 0$, dan zien we dat het linkerlid in (1.32) gelijk is aan de richtingsafgeleide $D_v g(\xi)$, terwijl $\gamma'(\tau) = v$. We merken op dat (1.32) correspondeert met de vroeger afgeleide formule (1.10). De identiteit (1.34) geeft nu dat

$$D_v g(\xi) = \langle \operatorname{grad} g(\xi), v \rangle.$$

Uit (1.34) kunnen we ook het onderstaande resultaat afleiden.

Lemma 1.34 (somregel voor differentiatie) *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval, $\tau \in I$ en $n \geq 1$. Veronderstel dat $h : I^n \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $(\tau, \ldots, \tau)$. Dan is*

$$\frac{d}{dt} h(t, t, \ldots, t)\bigg|_{t=\tau} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} h(\tau, \ldots, \overset{(j)}{t}, \ldots, \tau)\bigg|_{t=\tau}.$$

Bewijs Definieer $X = I^n$ en $\gamma : I \to X, t \mapsto (t, t, \ldots, t)$. Dan is $\gamma'(t) = (1, 1, \ldots, 1)$ en uit (1.34) met $\xi = (\tau, \ldots, \tau)$ en met h in plaats van g leiden we af dat

$$\frac{d}{dt} h(t, t, \ldots, t)\bigg|_{t=\tau} = \sum_{j=1}^{n} D_j h(\tau, \ldots, \tau).$$

Het bewijs wordt voltooid met de opmerking dat

$$D_j h(\tau, \ldots, \tau) = \frac{d}{dt} h(\tau, \ldots, \overset{(j)}{t}, \ldots, \tau)\bigg|_{t=\tau}.$$

□

Omgekeerd kan de kettingregel voor totale differentiatie afgeleid worden uit de bovenstaande somregel. In de setting van Stelling 1.32 geldt dat de componenten van de samengestelde functie $g \circ f$ gegeven worden door

$$(g \circ f)_h(x) = g_h \left(f_1 (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n), \ldots, f_p (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)\right).$$

De partiële afgeleide in ξ naar de j-de variabele wordt nu gegeven door

$$\frac{\partial g_h(f(x))}{\partial x_j}\bigg|_{x=\xi} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=\xi_j} g_h \left(f_1 \left(\xi_1, \ldots, \overset{(j)}{t} \ldots, \xi_n \right), \ldots, f_p \left(\xi_1, \ldots, \overset{(j)}{t}, \ldots, \xi_n \right) \right)$$

Door toepassing van de somregel (met $\tau = \xi_j$) vinden we

$$\frac{\partial g_h(f(x))}{\partial x_j}\bigg|_{x=\xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=\xi_j} g_h \left(f_1 (\xi), \ldots, f_i \left(\xi_1, \ldots, \overset{(j)}{t}, \ldots, \xi_n \right), \ldots, f_p (\xi) \right).$$

Door toepassing van de kettingregel in één variabele zien we dat de i-de term van de bovenstaande som gelijk is aan

$$\frac{\partial g_h(y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=f(\xi)} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x=\xi}.$$

Dit leidt weer tot de formule (1.31) en laat zien dat de somregel equivalent is met de kettingregel. Het bovenstaande geeft bovendien een andere manier om naar de kettingregel te kijken.

2 Verwisselingsstellingen en oneigenlijke integralen

2.1 Verwisseling van de differentiatievolgorde

Laat V een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ zijn, en $f : V \to \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie op V die partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele. Neem aan dat de functie $D_1 f : V \to \mathbb{R}$ op zijn beurt partieel differentieerbaar is naar de tweede variabele. We kunnen dan de 'gemengde tweede orde partiële afgeleide' $D_2 D_1 f = D_2 (D_1 f)$ vormen, de 'partiële afgeleide naar de tweede variabele van de partiële afgeleide van f naar de eerste variabele'. Men noteert deze ook wel als

$$\frac{\partial^2 f(x,\, y)}{\partial y\, \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,\, y)}{\partial x} \right). \tag{2.1}$$

We hebben nu de volgende stelling over de verwisselbaarheid van de differentiatievolgorde.

Stelling 2.1 *Laat $V \subset \mathbb{R}^2$ een open deelverzameling zijn, en $f : V \to \mathbb{R}$ een partieel differentieerbare functie. Laat $(\xi, \eta) \in V$, en veronderstel dat aan de volgende voorwaarden voldaan is:*

(a) *$D_1 f$ is partieel differentieerbaar naar de tweede variabele;*

(b) *$D_2 f$ is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele;*

(c) *$D_2 D_1 f$ en $D_1 D_2 f$ zijn continu in (ξ, η).*

Dan is

$$D_1 D_2 f(\xi, \eta) = D_2 D_1 f(\xi, \eta). \tag{2.2}$$

Bewijs Omdat V open is, bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $B((\xi, \eta); 2\delta) \subset V$. Voor $h, k \in \mathbb{R}$ met $|h|, |k| < \delta$ geldt dat $(\xi + h, \eta + k)$ tot $B((\xi, \eta); 2\delta)$ en dus tot V behoort. Voor dergelijke h, k die bovendien ongelijk nul zijn definiëren we:

$$Q(h, k) = (hk)^{-1} \left(f(\xi + h, \eta + k) - f(\xi + h, \eta) - f(\xi, \eta + k) + f(\xi, \eta) \right). \tag{2.3}$$

Ons eerste doel is om te bewijzen dat

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q(h, k) = D_2 D_1 f(\xi, \eta). \tag{2.4}$$

Hiertoe introduceren we voor $k \neq 0$ de hulpfunctie $v_k :]\, \xi - \delta, \xi + \delta\, [\to \mathbb{R}$ door

$$v_k(x) := \frac{f(x, \eta + k) - f(x, \eta)}{k}.$$

Het is nu gemakkelijk te controleren dat voor $0 < |k|, |h| < \delta$ geldt dat

$$Q(h, k) = \frac{v_k(\xi + h) - v_k(\xi)}{h}.$$

De functie v_k is differentieerbaar met afgeleide

$$v_k'(x) = \frac{D_1 f(x, \eta + k) - D_1 f(x, \eta)}{k}$$

Door toepassing van de middelwaardestelling vinden we dat er een tussen ξ en $\xi + h$ gelegen getal $\xi(h,k)$ bestaat zo dat

$$Q(h,k) = v_k'(\xi(h,k)) = \frac{D_1 f(\xi(h,k), \eta + k) - D_1 f(\xi(h,k), \eta)}{k}.$$

Door toepassing van de middelwaardestelling op de differentieerbare functie

$$\varphi :]\, \eta - \delta, \eta + \delta\, [\to \mathbb{R},\ y \mapsto D_1 f(\xi(h,k), y)$$

volgt dat er en tussen η en $\eta + k$ gelegen getal $\eta(h,k)$ bestaat zo dat

$$Q(h,k) = \varphi'(\eta(h,k)) = D_2 D_1 f(\xi(h,k), \eta(h,k)). \tag{2.5}$$

Uit het bovenstaande volgt dat

$$\|(\xi(h,k), \eta(h,k)) - (\xi, \eta)\| \leq |\xi(h,k) - \xi| + |\eta(h,k) - \eta| \leq |h| + |k|,$$

dus met de insluitstelling volgt dat

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (\xi(h,k), \eta(h,k)) = (\xi, \eta).$$

Combineren we dit met de continuiteit van $D_2 D_1 f$ in (ξ, η), dan vinden we door toepassing van de substitutiestelling voor limieten op (2.5) dat (2.4) inderdaad geldt.

We merken nu op dat de eerste en de tweede variabele in de definitie van Q precies dezelfde rol spelen. Bovendien zijn de eisen (a)-(c) symmetrisch in de eerste en de tweede variabele. Hieruit volgt dat (2.4) ook geldt met verwisseling van de volgorde van de partiële afgeleiden. Dus:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q(h,k) = D_1 D_2 f(\xi, \eta). \tag{2.6}$$

Wegens de uniciteit van limieten leiden we uit (2.4) en (2.6) af dat (2.2) geldt. □

Met het bovenstaande resultaat kunnen we nu algemener herhaald partieel differentiëren behandelen in $n \geq 2$ variabelen.

Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f : X \to \mathbb{R}^p$ een functie. Met inductie over k zegt men dat de functie f *k keer differentieerbaar* is, indien f $k-1$ keer differentieerbaar is en voor iedere keuze van indices $j(1), \ldots, j(k-1)$ de afbeelding $D_{j(k-1)} \ldots D_{j(1)} f : X \to \mathbb{R}^p$ totaal differentieerbaar is. (Wegens Lemma 1.23 is deze afbeelding dan ook continu.) Hierbij is $D_{j(k-1)} \ldots D_{j(1)} f$ de herhaalde partiële afgeleide, die met inductie over k wordt gedefinieerd als

$$D_{j(k)} D_{j(k-1)} \ldots D_{j(1)} f = D_{j(k)} \left(D_{j(k-1)} \ldots D_{j(1)} f \right), \quad 1 \leq j(k) \leq n.$$

Men zegt dat f *k keer continu differentieerbaar* is, notatie $f \in C^k(X, \mathbb{R}^p)$ of $f \in C^k$, als bovendien alle k-de orde partiële afgeleiden $D_{j(k)} D_{j(k-1)} \ldots D_{j(1)} f$ continu zijn. Wegens Stelling 2.1 kan men de differentiatievolgorde hierin naar believen verwisselen, door een willekeurige permutatie van de indices te schrijven als een samenstelling van buursverwisselingen (dwz. verwisselingen van indices die naast elkaar staan). Als α_j het aantal der rangnummers l voorstelt waarvoor $j(l) = j$, dat wil zeggen het aantal keren dat D_j in de herhaalde partiële afgeleide voorkomt, dan kunnen we dus schrijven

$$D_{j(k)} D_{j(k-1)} \ldots D_{j(1)} f(x) = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

Hierin schrijven we $\alpha_j = 0$ als de partiële afgeleide naar de j-de variabele niet voorkomt. Als veel van deze uitdrukkingen voorkomen, dan kort men dit ook wel af tot $D^\alpha f(x)$, waarin $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ een rij van niet-negatieve gehele getallen voorstelt. Het getal

$$k = |\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tag{2.7}$$

heet de *orde* van de differentiaaloperator D^α.

Men zegt dat f *willekeurig vaak differentieerbaar* of *glad* is, notatie $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^p)$ of $f \in C^\infty$, als voor ieder positief geheel getal k geldt dat $f \in C^k$.

Uit Lemma 1.3 en de rekenregels voor limieten volgt dat als $f, g \in C^k(X, \mathbb{R})$, dan is $f + g \in C^k(X, \mathbb{R})$ en $f\, g \in C^k(X, R)$, terwijl $f/g \in C^k(X, \mathbb{R})$ als bovendien $g(x) \neq 0$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. Vervolgens geeft Stelling 1.32 met inductie over k dat $g \circ f \in C^k$ als $f \in C^k$ en $g \in C^k$.

2.2 Integralen met een parameter, continuïteit

In de analyse komt het dikwijls voor dat men een integraal beschouwt van een functie, die behalve van de integratievariabele nog van een aantal andere variabelen afhangt. Preciezer, zij $V \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en laat een functie $f : V \times [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeven zijn.

Voor iedere $x \in V$ is $f_x : t \mapsto f(x, t)$ een reëelwaardige functie op $[a, b]$. Als de functie f_x voor iedere $x \in V$ Riemann-integreerbaar is over $[a, b]$, dan wordt door

$$F(x) := \int_a^b f_x(t)\, dt = \int_a^b f(x, t)\, dt \tag{2.8}$$

een functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd. Men zegt ook wel dat de integraal in (2.8) nog afhangt van de *parameters* $(x_1, \ldots, x_n)$. De volgende stelling zegt dat als de functie f continu is als functie van alle variabelen $(x_1, \ldots, x_n, t)$, dan hangt de integraal over $t \in [a, b]$ continu af van de parameters $(x_1, \ldots, x_n)$.

Stelling 2.2 *Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ en $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Veronderstel dat de functie $f : V \times [a, b] \to \mathbb{R}$ continu is op de deelverzameling $V \times [a, b]$ van $\mathbb{R}^{n+1}$. Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door middel van* (2.8)*, continu.*

De continuïteit van de functie F betekent dat F in ieder punt $\xi \in V$ continu is. Dit laatste betekent weer dat

$$\lim_{x \to \xi} F(x) = F(\xi).$$

Vullen we in het bovenstaande de definitie van F in, en gebruiken we dat f continu is in (ξ, t), voor iedere $t \in [a, b]$, zodat $f(x, t) \to f(\xi, t)$ voor $x \to \xi$, dan vinden we dat

$$\lim_{x \to \xi} \int_a^b f(x, t)\, dt = \int_a^b f(\xi, t)\, dt = \int_a^b \left(\lim_{x \to \xi} f(x, t) \right) dt, \tag{2.9}$$

De formule (2.9) zegt dat we 'limieten en integralen mogen verwisselen'. Volgens Stelling 2.2 is dit geoorloofd indien de functie f continu is als functie van alle variabelen.

Het bewijs van Stelling 2.2 berust op de volgende, op zichzelf interessante, toepassing van de stelling van Bolzano–Weierstrass, die bekend is uit het college Inleiding Analyse.

Lemma 2.3 *Zij K een begrensde en gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^n$ en $\xi \in V$. Veronderstel dat $f : V \times K \to \mathbb{R}^q$ continu is in alle punten van de verzameling $\{\xi\} \times K$.*

Dan is er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$, zo dat voor alle $x \in V \cap B(\xi;\delta)$ en alle $y \in K$ geldt dat $\|f(x, y) - f(\xi, y)\| < \epsilon$.

Opmerking 2.4 Omdat in het bovenstaande bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden die tot de gegeven schatting leidt voor alle $y \in K$, zeggen we ook wel dat $f(x, y) \to f(\xi, y)$, voor $x \to \xi$, uniform ten aanzien van $y \in K$. $\oslash$

Bewijs We veronderstellen dat de conclusie niet geldt en zullen laten zien dat dit tot een tegenspraak leidt.

De ontkenning van de conclusie in Lemma 2.3 geeft dat er een $\epsilon > 0$ bestaat zo dat er voor iedere $\delta > 0$ een $x \in V \cap B(\xi;\delta)$ bestaat en een $y \in K$ die niet voldoen aan de schatting $\|f(x, y) - f(\xi, y)\| < \epsilon$, dus waarvoor $\|f(x, y) - f(\xi, y)\| \geq \epsilon$.

Door hierin $\delta = 1/j$ te nemen, met j een positief geheel getal, krjgen we een rij $(x^{(j)})_{j\geq 1}$ in V en een rij $(y^{(j)})_{j\geq 1}$ in K, met de eigenschap dat voor iedere $j \geq 1$ geldt dat

$$\|x^{(j)} - \xi\| < 1/j \quad \text{en} \quad \|f(x^{(j)}, y^{(j)}) - f(\xi, y^{(j)})\| \geq \epsilon. \tag{2.10}$$

Uit $y^{(j)} \in K$ en de begrensdheid van K volgt dat de rij $(y^{(j)})_{j\geq 1}$ begrensd is in $\mathbb{R}^p$. Hieruit volgt wegens de stelling van Bolzano–Weierstrass dat de rij $(y^{(j)})_{j\geq 1}$ een convergente deelrij heeft. Met andere woorden, er is een deelrij van rangnummers j_k, met $j_k \to \infty$ als $k \to \infty$, met de eigenschap dat de rij $(y^{(j_k)})_{k\geq 1}$ voor $k \to \infty$ convergeert naar een punt $\eta \in \mathbb{R}^p$. In het bijzonder is η een limietpunt van K, en omdat K gesloten is, geldt $\eta \in K$. Omdat

$$\|x^{(j_k)} - \xi\| < 1/j_k$$

en $j_k \to \infty$ als $k \to \infty$, zien we dat $x^{(j_k)} \to \xi$ als $k \to \infty$. We concluderen dat de rij $(x^{(j_k)}, y^{(j_k)})$ in $\mathbb{R}^{n+p}$ voor $k \to \infty$ convergeert naar het punt (ξ, η). Tevens convergeert de rij $(\xi, y^{(j_k)})$ naar (ξ, η). Uit de continuïteit van f in het punt (ξ, η) concluderen we dat

$$\begin{aligned} &\|f(x^{(j_k)}, y^{(j_k)}) - f(\xi, y^{(j_k)})\| \\ \leq \;& \|f(x^{(j_k)}, y^{(j_k)}) - f(\xi, \eta)\| + \|f(\xi, \eta) - f(\xi, y^{(j_k)})\| \\ \to \;& 0 + 0 = 0 \quad \text{als} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Dit leidt tot een tegenspraak met de tweede schatting in (2.10). $\square$

Bewijs van Stelling 2.2 Omdat $[a, b]$ een begrensde en gesloten deelverzameling is van $\mathbb{R}$, mogen we Lemma 2.3 toepassen met $p = 1$ en $K = [a, b]$. Zij $\xi \in V$ en $\mu > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat voor $x \in V$ met $\|x - \xi\| \leq \delta$, en voor iedere $t \in [a, b]$ geldt dat

$$\|f(x, t) - f(\xi, t)\| \leq \epsilon := \mu/(b - a).$$

Dit leidt tot de schatting

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\xi)| &= \left| \int_a^b (f(x, t) - f(\xi, t))\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(\xi, t)|\, dt \\ &\leq \int_a^b \epsilon\, dt = \epsilon\,(b - a) = \mu, \end{aligned}$$

voor iedere $x \in V$ met $\|x - \xi\| < \delta$. Hieruit volgt dat $F(x) \to F(\xi)$ als $x \to \xi$. $\square$

Voorbeeld 2.5 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, t) = e^{xt}$. Door toepassen van het bovenstaande resultaat met $V = \mathbb{R}$ en $[a, b] = [-1, 1]$ zien we dat de functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$F(x) = \int_{-1}^{1} e^{xt}\, dt$$

continu is. Als $x \neq 0$, dan heeft de integrand de functie $t \mapsto e^{xt}/x$ als primitieve, waaruit volgt dat $F(x) = (e^x - e^{-x})/x$. Anderzijds is de integrand voor $x = 0$ constant 1, en we zien dat $F(0) = 2$. De continuïteit van F geeft dat $F(x) \to F(0) = 2$ voor $x \to 0$. Uiteraard kunnen we dit resultaat ook afleiden door gebruik te maken van de stelling van de l'Hopital, zie het dictaat Inleiding Analyse. $\oslash$

Voorbeeld 2.6 Het bovenstaande resultaat is niet direct toepasbaar op functies die gedefinieerd worden door zogenaamde oneigenlijke integralen. Als voorbeeld beschouwen we de Gamma-functie $\Gamma :]\, 0, \infty[\to \mathbb{R}$ van Euler, gedefinieerd door

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{2.11}$$

Dit is een functie van de vorm $F(x) = \int_0^\infty f(x, t)\, dt$, met $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$. Er zijn hier twee problemen. In de eerste plaats is het interval van integratie onbegrensd naar boven. In de tweede plaats is de functie $f_x : t \mapsto f(x, t)$ niet gedefinieerd in 0 voor $0 < x < 1$. In de volgende paragraaf zullen we algemene theorie ontwikkelen waarmee we kunnen laten zien dat de zo gedefinieerde Gamma functie continu, en zelfs C^∞ is op het interval $]0, \infty[$. $\oslash$

2.3 Oneigenlijke integralen

In deze paragraaf zullen we het begrip *oneigenlijke integraal* precies invoeren. Daarna zullen we deze integralen met een parameter beschouwen, zodat we in het bijzonder het gedrag van de integraal voor de Gamma-functie zullen kunnen analyseren, zie Voorbeeld 2.6.

Het begrip oneigenlijke Riemann-integraal is een verruiming van het begrip Riemann-integraal van gesloten en begrensde intervallen naar willekeurige intervallen.

Voorbeeld 2.7 Als eerste motiverende voorbeeld beschouwen we de integraal

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx.$$

De functie $f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$ is continu, en dus Riemann-integreerbaar over ieder gesloten en begrensd interval van de vorm $[0, \beta]$, met $0 \leq \beta < \infty$. Met de hoofdstelling van de integraalrekening vinden we

$$\int_0^\beta e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_0^\beta = 1 - e^{-\beta}.$$

Hieraan zien we dat

$$\lim_{\beta \to \infty} \int_0^\beta e^{-x}\, dx = 1.$$

We zeggen ook wel dat $x \mapsto e^{-x}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $[0, \infty[$, met als oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

$\oslash$

Gemotiveerd door het bovenstaande geven we algemener de volgende definitie.

Definitie 2.8 Zij $a \in \mathbb{R}$ en $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ een functie. De functie f heet lokaal Riemann-integreerbaar op $[a, \infty[$ indien f Riemann-integreerbaar is op $[a, \beta]$, voor ieder reëel getal $\beta \geq a$. $\oslash$

Opmerking 2.9 We merken op dat een continue functie $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar is. $\oslash$

De bovenstaande definitie garandeert het bestaan van de Riemann integraal $\int_a^\beta f(x)\ dx$, voor iedere $\beta \geq a$. Hiermee wordt de volgende definitie zinvol.

Definitie 2.10 Zij $a \in \mathbb{R}$ en $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ een functie. De functie f heet *oneigenlijk Riemann-integreerbaar* over $[a, \infty[$ indien het volgende geldt:

(a) de functie f is lokaal Riemann-integreerbaar;

(b) de integraal $\int_a^\beta f(x)\ dx$ heeft een limiet voor $\beta \to \infty$.

Is aan de bovenstaande condities voldaan, dan definiëren we de oneigenlijke Riemann-integraal van f over $[a, \infty[$ door

$$\int_a^\infty f(x)\ dx := \lim_{\beta \to \infty} \int_a^\beta f(x)\ dx.$$

$\oslash$

In het vervolg zullen we de definitie van oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid uitbreiden tot willekeurige niet-lege intervallen $I \subset \mathbb{R}$. Ter voorbereiding geven we de definitie van lokale Riemann-integreerbaarheid in deze algemeenheid.

Uit het college Inleiding Analyse brengen we in herinnering dat een interval gedefinieerd kan worden als een deelverzameling van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor alle $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ geldt $[\alpha, \beta] \subset I$.

Definitie 2.11 Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval. Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet *lokaal Riemann-integreerbaar* indien voor alle $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ geldt dat de beperking $f|_{[\alpha,\beta]}$ Riemann-integreerbaar is over $[\alpha, \beta]$. $\oslash$

Voorafgaand aan de meest algemene definitie definiëren we de oneigenlijke Riemann-integraal over een interval van de vorm $[a, b[$, met $-\infty < a < b < \infty$ als volgt.

Definitie 2.12 Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en $f : [a, b[\to \mathbb{R}$. De functie f heet *oneigenlijk Riemann-integreerbaar* indien het volgende geldt:

(a) de functie f is lokaal Riemann-integreerbaar;

(b) de integraal $\int_a^\beta f(x)\ dx$ heeft een limiet voor $\beta \uparrow b$.

Is aan het bovenstaande voldaan, dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\ dx.$$

$\oslash$

Opmerking 2.13 We merken op dat een continue functie $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar is. $\oslash$

Definitie 2.14 Veronderstel dat $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar is. Zij $S \in \mathbb{R}$; dan betekent

$$\lim_{[\alpha,\beta] \nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\ dx = S \tag{2.12}$$

dat er voor elke $\epsilon > 0$ een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ bestaat met de volgende eigenschap. Voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ met $\alpha < \beta$ geldt

$$I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_\alpha^\beta f(x)\ dx - S \right| < \epsilon. \tag{2.13}$$

$\oslash$

De hierboven geïntroduceerde limiet is uniek bepaald.

Lemma 2.15 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar zijn en veronderstel dat $S, S' \in \mathbb{R}$ en*

$$\lim_{[\alpha,\beta] \nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\ dx = S \quad \text{en} \quad \lim_{[\alpha,\beta] \nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\ dx = S'.$$

Dan is $S = S'$.

Bewijs Kies I_0 en I_0' als in (2.12) voor respectievelijk S en S'. Zij $[\alpha, \beta] \subset I$ een gesloten en begrensd interval dat zowel I_0 als I_0' bevat. Dan volgt dat

$$|S - S'| \leq \left| S - \int_\alpha^\beta f(x)\ dx \right| + \left| \int_\alpha^\beta f(x)\ dx - S' \right| < 2\epsilon.$$

Dit geldt voor elke $\epsilon > 0$, dus $S(f) = S(f)'$. $\square$

Definitie 2.16 Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval. Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet *oneigenlijk Riemann-integreerbaar* over I indien het volgende geldt

(a) De functie f is lokaal Riemann-integreerbaar.

(b) Er bestaat een (noodzakelijkerwijs uniek) getal $S \in \mathbb{R}$ zo dat (2.12) geldt.

Is $f : I \to \mathbb{R}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar, dan noteren we het unieke getal S uit (b) met

$$\int_I f(x)\, dx := S = \lim_{[\alpha,\beta]\nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

$\oslash$

Opmerking 2.17 Is $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar, dan zeggen we in plaats van 'f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I' ook wel dat de integraal $\int_I f(x)\, dx$ *convergeert.* Is f niet oneigenlijk Riemann-integreerbaar, dan zeggen we ook wel dat de integraal *divergeert.* $\oslash$

Uit het volgende resultaat blijkt dat oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid voor gesloten en begrensde intervallen samenvalt met Riemann-integreerbaarheid.

Lemma 2.18 *Zij $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval, met $a < b$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is Riemann-integreerbaar op I.*

(b) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar op I.*

Is aan (een van de) eisen (a) en (b) voldaan, dan is

$$\int_I f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{2.14}$$

Bewijs Uit (b) volgt per definitie dat f lokaal Riemann-integreerbaar is op $[a, b]$, dus Riemann-integreerbaar op $[a, b]$.

Veronderstel dat (a) geldt. Dan is f ook lokaal Riemann-integreerbaar. Kies $I_0 = [a, b]$, dan geldt voor alle $\alpha < \beta$ met $I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I$ dat $I_0 = [\alpha, \beta] = I$, dus ook

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| = 0 < \epsilon$$

voor iedere $\epsilon > 0$. Hieruit volgt dat (b) geldt en dat bovendien (2.14). $\square$

Opmerking 2.19 Een niet-leeg interval $I \subset \mathbb{R}$ heeft van een van de volgende vormen:

(a) $I = [a, b]$ met $-\infty < a < b < \infty$,

(b) $I = [a, b\,[$ met $-\infty < a < b \leq \infty$,

(c) $I = \,]\,a, b]$ met $-\infty \leq a < b < \infty$,

(d) $I = \,]\,a, b\,[$ met $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

In al deze gevallen noemen we a en b de grenzen van het interval en schrijven we ook

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_I f(x)\, dx = \lim_{[\alpha,\beta]\nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx,$$

en hanteren we de conventie dat

$$\int_b^a f(x)\, dx := -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Wegens Lemma 2.18 is deze notatie in overeenstemming met de reeds gebruikte notatie voor de eigenlijke Riemann integraal. $\oslash$

In het vervolg veronderstellen we dat $I \subset \mathbb{R}$ een interval is, dat niet gesloten en begrensd is. Zo'n interval heeft dus één van de in Opmerking 2.19 genoemde vormen (b)-(c). We zullen de definitie van oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid in elk van deze gevallen apart onderzoeken.

Lemma 2.20 *Veronderstel dat $I \subset \mathbb{R}$ een interval van de vorm $I = [a, b[$ is, met $a < b \leq \infty$. Veronderstel nu dat $f : I \to \mathbb{R}$ een lokaal Riemann-integreerbare functie is. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over het interval $[a, b[$.*

(b) *De limiet*

$$\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\, dx$$

bestaat.

Indien (a) en (b), dan geldt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\, dx. \tag{2.15}$$

Bewijs Veronderstel eerst dat (a) geldt. Zij $\epsilon > 0$ Kies een gesloten en begrensd interval $I_0 = [a_0, b_0] \subset [a, b[$ zo dat (2.13) geldt. Dan geldt voor alle $\beta \in]b_0, b[$ dat $I_0 \subset [a, \beta] \subset I$, dus

$$\left| \int_a^\beta f(x)\, dx - \int_I f(x)\, dx \right| < \epsilon.$$

Hieruit blijkt dat (b) geldt, met limiet gelijk aan $\int_I f(x)\, dx$.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt, en zij S de waarde van de limiet. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een b_0 met $a < b_0 < b$ zo dat voor alle $\beta \in [b_0, b[$ geldt

$$\left| \int_a^\beta f(x)\, dx - S \right| < \epsilon.$$

Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zo dat $\alpha < \beta$ en $I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I$. Dan geldt dat $\alpha = a$ en $b_0 \leq \beta < b$, en de bovenstaande schatting geldt met $a = \alpha$. Hieraan zien we dat

$$S = \lim_{[\alpha,\beta] \nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

We concluderen dat (a) geldt, en (2.15). $\square$

Gevolg 2.21 *Zij $-\infty < a < b \leq \infty$ en zij $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar. Zij $a \leq c < b$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[a, b[$.*

(b) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[c, b[$.*

Als (a) en (b) gelden, dan geldt bovendien dat

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Bewijs Voor alle $\beta > c$ geldt

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx$$

De uitspraken volgen hieruit door de limiet voor $\beta \uparrow b$ te nemen. $\square$

Voorbeeld 2.22 We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^s$ op $I = [1, \infty[$, met $s \in \mathbb{R}$ een constante, ongelijk aan -1. Deze functie is continu, dus lokaal Riemann-integreerbaar. Voor $\beta > 1$ geldt dat

$$\int_1^\beta f(x)\,dx = \left.\frac{x^{s+1}}{s+1}\right|_1^\beta = \frac{\beta^{s+1} - 1}{s+1}. \tag{2.16}$$

De laatste uitdrukking heeft een limiet voor $\beta \uparrow \infty$ dan en slechts dan als $s + 1 < 0$. In dit geval is de functie f oneigenlijk Riemann integreerbaar over $[1, \infty[$, met als oneigenlijke integraal de limiet:

$$\int_1^\infty x^s\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta^{s+1} - 1}{s+1} = -\frac{1}{s+1}, \qquad (s < -1).$$

De uitdrukking (2.16) heeft geen limiet voor $s > -1$, ofwel, de integraal divergeert in dat geval.

Tenslotte beschouwen we ook nog het geval dat $s = -1$. Dan heeft $f(x) = 1/x$ de functie $\log x$ als primitieve, en dus heeft

$$\int_1^\beta \frac{1}{x}\,dx = \log \beta$$

geen limiet voor $\beta \to \infty$. De bijbehorende integraal $\int_1^\beta x^{-1}\,dx$ is dan ook divergent. Samenvattend concluderen we dat het onderstaande lemma geldt. $\oslash$

Lemma 2.23 *Zij $s \in \mathbb{R}$. Dan convergeert de oneigenlijke Riemann-integraal*

$$\int_1^\infty x^s\,dx \tag{2.17}$$

dan en slechts dan als $s < -1$. In dat geval is de waarde van de integraal gelijk aan $1/(-s - 1)$.

Soortgelijke beschouwingen als hier boven leiden tot een andere karakterisering van oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid op intervallen van de vorm Opmerking 2.19 (c), dus $I =]a, b]$ met $-\infty \leq a < b < \infty$. Een interessant voorbeeld wordt gegeven door het onderstaande lemma.

Lemma 2.24 *Zij $s \in \mathbb{R}$. De oneigenlijke integraal*

$$\int_0^1 x^s\,dx$$

is convergent dan en slechts dan als $s > -1$. In dat geval is de oneigenlijke integraal gelijk aan $1/(s + 1)$.

Bewijs De functie $f : x \mapsto x^s$ is continu op het interval $I =]0, 1]$, dus Riemann-integreerbaar op ieder deelinterval $[\alpha, 1] \subset I$. We veronderstellen eerst dat $s \neq -1$. Dan is $(s+1)^{-1}x^{s+1}$ primitieve van f, dus

$$\int_\alpha^1 x^s\, dx = \frac{1}{s+1} - \frac{\alpha^{s+1}}{s+1}$$

voor alle $0 < \alpha < 1$. We zien dat de limiet voor $\alpha \downarrow 0$ bestaat dan en slechts dan als $s > -1$. In dat geval geldt

$$\int_0^1 x^s = \frac{1}{s+1}.$$

We beschouwen tenslotte het geval dat $s = -1$. Dan heeft f de functie $\log$ als primitieve op I, zodat

$$\int_\alpha^1 x^{-1}\, dx = -\log\alpha.$$

Deze uitdrukking heeft geen limiet voor $\alpha \downarrow 0$, zodat de bijbehorende oneigenlijke integraal divergent is. Het lemma volgt. $\square$

Om het geval (d) van Opmerking 2.19 van een tweezijdig open interval $I = \,]\,a, b\,[$, met $-\infty \leq a < b \leq \infty$ te begrijpen hebben we de volgende karakterisering van oneigenlijke integreerbaarheid nodig.

Lemma 2.25 (Cauchy criterium) *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval en zij $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I.*

(b) *Voor elke $\epsilon > 0$ bestaat een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ zo dat voor alle gesloten en begrensde intervallen J_1, J_2 met $I_0 \subset J_j \subset I$ geldt dat*

$$\left| \int_{J_1} f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon.$$

Bewijs Veronderstel eerst dat (a) geldt. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ zo dat voor ieder gesloten en begrensd interval $[\alpha, \beta]$ met $I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I$ geldt

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - \int_I f(x)\, dx \right| < \epsilon/2.$$

Zijn J_1 en J_2 gesloten en begrensde intervallen als in (b), dan geldt dat

$$\begin{aligned} &\left| \int_{J_1} f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx \right| \\ &\quad \leq \left| \int_{J_1} f(x)\, dx - \int_I f(x)\, dx \right| + \left| \int_I f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt (b).

We veronderstellen nu dat (b) geldt. Er bestaat een rij $J(n) = [\alpha_n, \beta_n]$ van gesloten en begrensde intervallen zo dat $J(n) \subset J(n+1) \subset I$ en zo dat

$$\bigcup_{k \geq 0} J(k) = I.$$

We zullen laten zien dat de integraalwaarden

$$S_n := \int_{J(n)} f(x)\, dx$$

een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ vormen. Laat $\epsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $[\alpha, \beta] \subset I$ als in (b). Er bestaan $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ zodat $\alpha \in J(N_1)$ en $\beta \in J(N_2)$. Zij $N = \max(N_1, N_2)$, dan geldt $[\alpha, \beta] \subset J(N)$. Voor $p, q > N$ geldt $[a, b] \subset J(p)$ en $[\alpha, \beta] \subset J(q)$ dus $|S_p - S_q| < \epsilon$. De rij (S_n) is dus inderdaad Cauchy in $\mathbb{R}$. Wegens de volledigheid van $\mathbb{R}$ bestaat $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

We tonen tenslotte aan dat

$$\lim_{[\alpha,\beta]\nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = S. \tag{2.18}$$

Laat daartoe $\epsilon > 0$ gegeven zijn en zij $[\alpha, \beta]$ als in (b). Er is een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $[\alpha, \beta] \subset J(n)$ en $|S_n - S| < \epsilon$. Zij J een gesloten begrend interval met $[\alpha, \beta] \subset J \subset I$. Dan geldt voor $n \geq N$ dat

$$\left|\int_J f(x)\, dx - S\right| \leq \left|\int_J f(x)\, dx - \int_{J_n} f(x)\, dx\right| + \left|\int_{J_n} f(x)\, dx - S\right| < 2\epsilon.$$

Hieruit volgt inderdaad (2.18). We concluderen dat f oneigenlijk integreerbaar is over I. $\square$

Uit het volgende lemma blijkt dat oneigenlijke integreerbaarheid over een interval van de vorm (d) uit Opmerking 2.19 herleid kan worden tot de twee reeds behandelde gevallen (b) en (c).

Lemma 2.26 *Zij $I =]a, b[$, met $-\infty \leq a < b \leq \infty$ en zij $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar. Laat voorts $c \in I$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I.*

(b) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over zowel $]a, c]$ als $[c, b[$.*

Indien (a) en (b) gelden, dan is

$$\int_I f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{2.19}$$

Bewijs We veronderstellen eerst dat (a) geldt. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er wegens Lemma 2.25 een gesloten en begrensd interval $I_0 = [a_0, b_0]$ in I zo dat voor alle gesloten en begrensde intervalleen J_1, J_2 met $I_0 \subset J_j \subset I$ geldt dat

$$\left|\int_{J_1} f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx\right| < \epsilon.$$

Als we I_0 vervangen door een groter interval, dan blijft deze uitspraak geldig. We mogen daarom aannemen dat $a_0 < c < b_0$. Veronderstel nu dat twee gesloten en begrensde intervallen J_j^+ gegeven zijn met $[c, b_0] \subset J_j^+ \subset [c, b[$. Definieer $J_j = [a_0, c] \cup J_j^+$. Dan zijn J_j, voor $j = 1, 2$, gesloten en begrensde intervallen met $I_0 \subset J_j \subset I$. Bovendien geldt

$$\int_{J_j} f(x)\, dx = \int_{a_0}^c f(x)\, dx + \int_{J_j^+} f(x)\, dx.$$

Hieruit volgt dat

$$\left|\int_{J_1^+} f(x)\, dx - \int_{J_2^+} f(x)\, dx\right| = \left|\int_{J_1} f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx\right| < \epsilon.$$

We concluderen met behulp van Lemma 2.25 dat f oneigenlijk integreerbaar is over $[c, b[$. Op soortgelijke wijze zien we dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]a, c]$. Dus (b) geldt.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $[c, b_0]$ zo dat voor elk gesloten en begrensd interval $[c, \beta]$ met $I_0^+ \subset [c, \beta] \subset [c, b[$ geldt dat

$$\left|\int_c^\beta f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Evenzo is er een gesloten en begrensd interval $[a_0, c] \;\subset]a, c]$ zo dat voor elk interval $[\alpha, c]$ met $[a_0, c] \subset [\alpha, c] \subset]a, c]$ geldt dat

$$\left|\int_\alpha^c f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zij $I_0 = [a_0, b_0]$. En zij $[\alpha, \beta]$ zo dat $[a_0, b_0] \subset [\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Dan geldt $[c, b_0] \subset [c, \beta] \subset [c, b[$ en $[a_0, c] \subset [a_0, c] \subset]a_0, c]$. Uit de twee bovenstaande schattingen volgt nu met behulp van de driehoeksongelijkheid dat

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\, dx - \left(\int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx\right)\right| < \epsilon.$$

Hieruit concluderen we met Definitie 2.16 dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]a, b[$ en bovendien dat

$$\int_I f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

□

De integraal in het linkerlid van (2.19) schrijven we in het vervolg ook als $\int_a^b f(x)\, dx$.

Stelling 2.27 (Majorantie-kenmerk voor integreerbaarheid) *Laat $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$, en veronderstel dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar zijn, $C > 0$ en $|f(x)| \leq Cg(x)$ voor alle $x \in I$.*

Indien g oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op I, dan is f dat ook, en er geldt bovendien dat

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq C \int_a^b g(x)\, dx. \tag{2.20}$$

Bewijs Uit de voorwaarden blijkt in het bijzonder dat $g \geq 0$ op het interval I. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ zo dat voor elk tweetal gesloten en begrensde intervallen J_1, J_2 met $I_0 \subset J_j \subset I$ geldt

$$\left|\int_{J_1} g(x)\, dx - \int_{J_2} g(x)\, dx\right| < \epsilon/2C.$$

In het bijzonder volgt hieruit voor dergelijke intervallen dat

$$\int_{J_j \setminus I_0} g(x)\, dx = \left|\int_{J_j} g(x)\, dx - \int_{I_0} g(x)\, dx\right| < \epsilon/2C, \qquad (j = 1, 2).$$

Hieruit leiden we af dat voor dergelijke intervallen geldt dat

$$\begin{aligned}
\left| \int_{J_1} f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx \right| &= \left| \int_{J_1 \setminus I_0} f(x)\, dx - \int_{J_2 \setminus I_0} f(x)\, dx \right| \\
&\leq \int_{J_1 \setminus I_0} |f(x)|\, dx + \int_{J_2 \setminus I_0} |f(x)|\, dx \\
&\leq \int_{J_1 \setminus I_0} C\, g(x)\, dx + \int_{J_2 \setminus I_0} C\, g(x)\, dx \\
&< C(\epsilon/2C + \epsilon/2C) = \epsilon.
\end{aligned}$$

We concluderen dat $f : I \to \mathbb{R}$ voldoet aan conditie (b) van Lemma 2.25. Dus f is Riemann-integreerbaar over I. Voor alle $\alpha < \beta$ met $[\alpha, \beta] \subset I$ geldt wegens de driehoeksongelijkheid voor Riemann integralen dat

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \right| \leq C \int_\alpha^\beta g(x)\, dx.$$

Hieruit volgt (2.20) door limietovergang voor $[\alpha, \beta] \nearrow I$ □

Voorbeeld 2.28 (De Gamma-functie) We beschouwen wederom de volgende integraal voor de Gamma-functie, zie ook Voorbeeld 2.6,

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0. \tag{2.21}$$

Als $0 < x < 1$, dan gaat de integrand naar oneindig als $t \downarrow 0$, dus dan moeten we ook bij de ondergrens $t = 0$ de integraal als een oneigenlijke integraal opvatten.

We zullen nu met behulp van het majorantie-criterium aantonen dat de integraal voor de Gamma-functie convergeert. Daartoe verdelen we het interval $]0, \infty[$ in de stukken $]0, 1]$ en $[1, \infty[$.

Voor $t \in]0, 1]$ geldt dat $|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{x-1}$ en $\int_0^1 t^{x-1}\, dt$ convergeert, dus ook

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{2.22}$$

convergeert.

We beschouwen nu het deel van de integraal over $[1, \infty[$. Zij $N \in \mathbb{N}, N > x - 1$. Dan geldt voor $t \geq 1$ dat $t^{x-1} e^{-t} \leq t^N e^{-t}$. Uit $\lim_{t \to \infty} t^N e^{-t/2} = 0$ volgt het bestaan van een constante $C > 0$ zo dat

$$t^N e^{-t} \leq C e^{-t/2}, \qquad (t \geq 1).$$

Omdat de integraal $\int_1^\infty e^{-t/2}\, dt$ convergent is, concluderen we nu dat

$$\int_1^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \tag{2.23}$$

convergent is.

Uit de convergentie van (2.22) en (2.23) concluderen we tenslotte dat de integraal (2.21) convergent is voor alle $x > 0$.

Men kan aantonen dat de Gamma-functie niet op een algebraïsche manier in termen van de bekende functies is uit te drukken. ⊘

Voorbeeld 2.29 De Bèta-functie De *Bèta-functie van Euler* is de functie van twee variabelen p, q, die is gedefinieerd door

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \, dt. \tag{2.24}$$

Deze functie is, net als de Gamma-functie, niet op algebraïsche manier in termen van de bekende functies uit te drukken.

De gegeven integraal voor $B(p,q)$ convergeert voor $p, q > 0$. Dit is als volgt in te zien. Voor genoemde p, q is de functie

$$f : t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$$

continu dus lokaal Riemann-integreerbaar op het interval $]0, 1[$. We splitsen dit interval in twee delen, namelijk $]0, \frac{1}{2}]$ and $[\frac{1}{2}, 1[$ en behandelen de bijbehorende integralen afzonderlijk.

De functie $t \mapsto (1-t)^{q-1}$ is continu op $[0, \frac{1}{2}]$, dus begrensd door een constante $C > 0$. Voor $0 < t \leq \frac{1}{2}$ geldt daarom dat

$$|f(t)| \leq Ct^{p-1}.$$

De functie in het rechterlid van deze uitdrukking is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $]0, \frac{1}{2}]$ wegens Lemma 2.24. Hieruit volgt de convergentie van de integraal van f over $]0, \frac{1}{2}]$. De functie $t \mapsto t^{p-1}$ is continu op $[\frac{1}{2}, 1]$ dus begrensd door een constante $C' > 0$. Voor $\frac{1}{2} \leq t < 1$ geldt daarom dat

$$|f(t)| \leq C'(1-t)^{q-1}.$$

De functie in het rechterlid van deze uitdrukking is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[\frac{1}{2}, 1[$, wegens Lemma 2.24 (pas de substitutieregel toe om dit in te zien). We concluderen dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]\frac{1}{2}, 1]$. $\oslash$

Uit het majorantiekenmerk voor de convergentie van oneigenlijke integralen volgt het eveneens gemakkelijk hanteerbare limietkenmerk.

Gevolg 2.30 (Limietkenmerk voor integreerbaarheid) *Laat I een interval van de vorm $[c, b[$ zijn, met $-\infty < c < b \leq \infty$. Veronderstel voorts dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbare functies zijn, terwijl $g > 0$ op I en*

$$\lim_{x \uparrow b} \frac{|f(x)|}{g(x)} = L \in [0, \infty[.$$

Als g oneigenlijk integreerbaar is op I, dan is f dat ook.

Bewijs Er bestaat een $\beta > 0$ zo dat $||f(x)|/g(x) - L| < 1$ voor alle $x \in [\beta, b[$. Hieruit volgt dat $|f(x)| \leq (L+1)g(x)$ voor al dergelijke x. De functie $(L+1)g(x)$ is oneigenlijk integreerbaar over I, dus ook over $[\beta, b[$, en wegens het majorantiekenmerk volgt dat f oneigenlijk integreerbaar is over $[\beta, b[$. Hieruit volgt dat f oneigenlijk integreerbaar is over I. $\square$

Opmerking 2.31 Uiteraard geldt een soortgelijk limietkenmerk voor lokaal integreerbare functies op een interval van de vorm $I =]a, c]$, met $-\infty \leq a < c < \infty$. $\oslash$

Ook voor oneigenlijke integralen geldt een verwisselingsstelling met limieten. We bewijzen eerst een technisch resultaat. Daaruit leiden we dan een dominantie kenmerk af dat in de praktijk vaak goed werkt.

Lemma 2.32 *Laat I een niet-leeg interval zijn met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Laat $V \subset \mathbb{R}^n$ zijn en $f : V \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Veronderstel verder dat de volgene voorwaarden vervuld zijn.*

(a) *Voor elke $x \in V$ is de functie $t \mapsto f(x,t)$ oneigenlijk integreerbaar over I.*

(b) *Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat er een gesloten en begrensd interval $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat:*

$$\left| \int_a^b f(x,t)\, dt - \int_\alpha^\beta f(x,t)\, dt \right| < \epsilon \tag{2.25}$$

Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$$

continu.

Bewijs Laat $\xi \in V$. Dan is het voldoende de continuïteit van F in het punt ξ aan te tonen. Voor $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ definiëren we

$$F_\alpha^\beta : x \mapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)\, dt.$$

Zij nu $\epsilon > 0$, dan volgt uit de hypothese dat er een $\alpha, \beta \in I$ bestaan met $\alpha < \beta$, zo dat

$$|F(x) - F_\alpha^\beta(x)| < \epsilon/3,$$

voor alle $x \in V$. Uit Stelling 2.2 volgt dat de functie F_α^β continu is op V, dus in het bijzonder in ξ. Er bestaat dus een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in B(\xi;\delta)$ geldt dat

$$|F_\alpha^\beta(x) - F_\alpha^\beta(\xi)| < \epsilon/3.$$

We merken nu op dat voor alle $x \in B(\xi;\delta)$ geldt dat

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\xi)| &\leq |F(x) - F_\alpha^\beta(x)| + |F_\alpha^\beta(x) - F_\alpha^\beta(\xi)| + |F_\alpha^\beta(\xi) - F(\xi)| \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Hiermee is de continuïteit van F in ξ aangetoond. □

Ook het volgende lemma zal nuttig blijken. Is I een niet-leeg interval, en $c \in I$ dan definiëren we de volgende deelintervallen van I,

$$I_{\leq c} := \{x \in I \mid x \leq c\}, \quad \text{en} \quad I_{\geq c} := \{x \in I \mid x \geq c\}.$$

Lemma 2.33 *Zij I een niet-leeg interval en $a, b \in I$ met $a < b$. Dan geldt voor elke oneigenlijk Riemann-integreerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$ dat f oneigenlijk integreerbaar is over $I_{\leq a}$ en over $I_{\geq b}$, terwijl*

$$\int_I f(x)\, dx = \int_{I_{\leq a}} f(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, dx + \int_{I_{\geq b}} f(x)\, dx.$$

Bewijs Door toepassen van Lemma 2.26 en Gevolg2.21 vinden we dat

$$\begin{aligned}\int_I f(x)\,dx &= \int_{I_{\leq a}} f(x)\,dx + \int_{I_{\geq a}} f(x)\,dx \\ &= \int_{I_{\leq a}} f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_{I_{\geq b}} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Uit het bovenstaande leiden we het volgende practisch goed toepasbare principe van gedomineerde continuïteit af.

Stelling 2.34 (Gedomineerde continuïteit) *Laat $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval zijn met de grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ en $f : V \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Veronderstel verder dat er een oneigenlijk Riemann-integreerbare functie $g : I \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat*

$$|f(x,t)| \leq g(t) \qquad \text{voor alle} \quad (x,t) \in V \times I.$$

Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

continu.

Bewijs We zullen laten zien dat de voorwaarden van Lemma 2.32 vervuld zijn. Zij $x \in V$. Dan is de functie $f_x : t \mapsto f(x,t)$, $I \to \mathbb{R}$ continu, dus lokaal Riemann-integreerbaar, terwijl $|f_x| \leq g$ op I. Dus f_x is oneigenlijk integreerbaar wegens Stelling 2.27. Hiermee is voorwaarde (a) aangetoond. Zij $\epsilon > 0$ en zij $c \in I$. Uit de oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid van g volgt het bestaan van $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ zo dat

$$\left| \int_I g(t)\,dx - \int_\alpha^\beta g(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Hieruit volgt voor alle $x \in V$ dat

$$\begin{aligned}\left| \int_I f(x,t)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt \right| &= \left| \int_{I_{\leq \alpha}} f(x,t)\,dt + \int_{I_{\geq \beta}} f(x,t)\,dt \right| \\ &\leq \int_{I_{\leq \alpha}} |f(x,t)|\,dt + \int_{I_{\geq \beta}} |f(x,t)|\,dt \\ &\leq \int_{I_{\leq \alpha}} g(t)\,dx + \int_{I_{\geq \beta}} g(t)\,dt \\ &= \int_I g(t)\,dt - \int_\alpha^\beta g(t)\,dt < \epsilon.\end{aligned}$$

Hieruit volgt de tweede ongelijkheid uit voorwaarde (b). □

Het idee van de voorwaarde in Stelling 2.34 is dat $t \mapsto f(x,t)$ gedomineerd wordt door de oneigenlijk integreerbare (niet-negatieve) functie $t \mapsto g(t)$, met uniformiteit in de parameter $x \in V$. Dit dwingt de voorwaarden van Lemma 2.32 af.

Voorbeeld 2.35 We passen het bovenstaande toe op de Gamma-functie

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad (x > 0).$$

Zij $0 < a < b$ en $X =]a,b[$. Dan geldt voor alle $t \in]0,1]$ dat $t^{x-1} = e^{(x-1)\log t} \leq t^{a-1}$. De functie $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ is continu op $]a,b[\times]0,1]$ en voor alle $(x,t) \in X\times]0,1]$ geldt dat $|f(x,t)| \leq g(t) := t^{a-1}e^{-t}$, terwijl g oneigenlijk integreerbaar is, dus

$$F_0 : x \mapsto \int_0^1 t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

definieert een continue functie op X.

Anderzijds is f ook continu op $]a,b[\times[1,\infty[$, terwijl op deze verzameling een majorantie van de vorm $|f(t,x)| \leq t^{b-1}e^{-t}$ bestaat. De laatste functie is weer oneigenlijk integreerbaar op $]1,\infty[$, dus

$$F_1 : x \mapsto \int_1^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

definieert een continue functie op $]a,b[$. Hieruit volgt dat $\Gamma = F_0 + F_1$ continu is op $]a,b[$. Aangezien a, b willekeurig waren volgt dat Γ continu is op $]0,\infty[$. $\oslash$

Opmerking 2.36 We merken op dat

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^R = 1.$$

Zij $x > 0$, dan volgt uit het bovenstaande dat

$$\Gamma(x+1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^x\, e^{-t}\, dt.$$

De integraal is met behulp van partiële integratie als volgt te herschrijven:

$$\int_0^R t^x\, e^{-t}\, dt \quad = \quad -\lim_{\alpha\downarrow 0} \int_\alpha^R t^x\, \frac{d}{dt}e^{-t}\, dt = \lim_{\alpha\downarrow 0} \left[-t^x\, e^{-t}\right]_\alpha^R + x \lim_{\alpha\downarrow 0} \int_\alpha^R t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Omdat $x > 0$ is, geldt $t^x|_{t=0} = 0$, terwijl de limiet van de laatste integraal bestaat. Daarom is

$$\int_0^R t^x\, e^{-t}\, dt = -R^x e^{-R} + x \int_0^R t^{x-1}e^{-t}\, dt.$$

Door de limiet voor $R \to \infty$ te nemen vinden we, aangezien $R^x\, e^{-R} \to 0$, dat

$$\Gamma(x+1) = x \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x), \quad (x > 0).$$

Passen we dit toe met $x = n-1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, dan vinden we met inductie dat

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!.$$

Anders gezegd, de Gamma-functie $x \mapsto \Gamma(x)$ levert een continue uitbreiding tot de positieve reële as van de faculteitsfunctie $n \mapsto (n-1)!$, waarbij de laatste functie alleen voor de gehele positieve getallen n is gedefinieerd. $\oslash$

Voorbeeld 2.37 We passen het bovenstaande toe op de Bèta-functie

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$$

De integrand is continu als functie van (p,q,t), voor $p,q > 0$ en $0 < t < 1$. Fixeer $p_0, q_0 > 0$. Dan geldt voor alle $p \geq p_0$, $q \geq q_0$ en $t \in \,]0,1[$ dat

$$0 \leq t^{p-1}(1-t)^{q-1} \leq t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}.$$

Zoals we eerder in Voorbeeld 2.29 zagen is de functie in het rechterlid oneigenlijk integreerbaar over $]\,0,1[$. Met Stelling 2.34 concluderen we nu dat B continu is op $[p_0,\infty[\; \times\; [q_0,\infty[$. Dit geldt voor iedere $p_0, q_0 > 0$. Dus B is continu op de verzameling $]\,0,\infty[\; \times\;]\,0,\infty[$. $\oslash$

We zien aan deze voorbeelden dat uniforme majorantie vaak gemakkelijker is toe te passen na splitsing van de oneigenlijke integratie in integraties over intervallen die minstens een der eindpunten bevatten, zodat men zich alleen op het gedrag van de integrand naar het overgebleven eindpunt hoeft te concentreren.

2.4 Differentiatie onder het integraalteken

We beschouwen weer een integraal met parameter als in (2.8) en onderzoeken wanneer deze integraal een differentieeerbare functie F definieert. Ter voorbereiding behandelen we een technisch lemma over deling.

Lemma 2.38 *Zij X een interval in $\mathbb{R}$ en Y een deelverzameling van $\mathbb{R}^p$. Laat $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ differentieerbaar naar de eerste variabele zijn en neem aan dat de functie $D_1 f$ continu is op $X \times Y$. Definieer de functie $q : X \times X \times Y \to \mathbb{R}$ door*

$$q(x,\,\xi,\,y) := \begin{cases} \frac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} & \text{als} \quad \xi \in X,\; x \in X \setminus \{\xi\},\; y \in Y; \\[2ex] D_1 f(\xi,\,y) & \text{als} \quad \xi \in X,\; x = \xi,\; y \in Y. \end{cases}$$

Dan is de functie q continu op $X \times X \times Y$.

Bewijs Zij $\xi,\, x \in X$ en $y \in Y$. Dan is

$$\begin{aligned} f(x,\,y) - f(\xi,\,y) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\xi + t(x-\xi),\,y)\, dt \\ &= \int_0^1 D_1 f(\xi + t(x-\xi),\,y) \cdot (x-\xi)\, dt \\ &= \int_0^1 D_1 f(\xi + t(x-\xi),\,y)\, dt \cdot (x-\xi). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$q(x,\,\xi,\,y) = \int_0^1 D_1 f(\xi + t(x-\xi),\,y)\,dt. \tag{2.26}$$

als $x \neq \xi$. De formule (2.26) is echter ook geldig als $x = \xi$, omdat in dat geval de integrand in het rechterlid voor iedere t gelijk is aan $D_1 f(\xi,\,y)$. Pas nu Stelling 2.2 toe met $(x,\,\xi,\,y)$ als de parameters. □

Lemma 2.38 zal worden gebruikt in het bewijs van de volgende stelling over *differentiatie onder het integraalteken.*

Stelling 2.39 *Zij X een open interval in $\mathbb{R}$ en $I = [a, b]$ een gesloten interval met $a < b$. Laat een functie $f : X \times I \to \mathbb{R}$ gegeven zijn en neem aan dat de volgende condities vervuld zijn.*

(a) *Voor iedere $x \in X$ is de functie $t \mapsto f(x,\,t)$ Riemann-integreerbaar over I.*

(b) *De functie f is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele en $D_1 f$ is continu op $X \times I$.*

Dan is de integraal $F(x)$ in (2.8) *een differentieerbare functie van de parameter $x \in X$ en*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b f(x,\,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f(x,\,t)}{\partial x}\,dt. \tag{2.27}$$

Bewijs Zij $q(x,\,\xi,\,t)$ gedefinieerd als Lemma 2.38, met y vervangen door t. Omdat de functie q continu is als functie van alle variabelen, definieert volgens Stelling 2.2 de formule

$$Q(x,\,\xi) := \int_a^b q(x,\,\xi,\,t)\,dt$$

een continue functie Q op $X \times X$. Verder volgt uit de definitie van q dat

$$Q(x,\,\xi) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} & \text{als} \quad \xi \in X,\ x \in X \setminus \{\xi\}; \\[2ex] \int_a^b D_1 f(\xi,\,t)\,dt & \text{als} \quad \xi \in X,\ x = \xi. \end{cases}$$

Uit de continuïteit van Q op $X \times X$ volgt nu dat voor iedere $\xi \in X$ geldt dat

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x \neq \xi}} \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} = \int_a^b D_1 f(\xi,\,t)\,dt,$$

hetgeen precies de bewering van de stelling is. □

De formule (2.27) zegt dat we ‘differentiatie en integratie mogen verwisselen’, in de zin dat de afgeleide naar x van de integraal over t gelijk is aan de integraal over t van de afgeleide naar x.

Gevolg 2.40 *Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $a,\,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Laat voorts $f : X \times [a,\,b] \to \mathbb{R}$ een functie zijn die k keer partieel differentieerbaar is naar de eerste n variabelen. Neem verder aan dat alle partiële afgeleiden $D_{j(l)} \dots D_{j(1)} f$, met $0 \leq l \leq k$ en $1 \leq j(i) \leq n$, continu zijn op $X \times [a,\,b]$. Dan definieert* (2.8) *een k keer continu differentieerbare functie op X en voor iedere $1 \leq l \leq k$ en $1 \leq j(i) \leq n$ en iedere $x \in X$ geldt dat*

$$D_{j(l)} \dots D_{j(1)} F(x) = \int_a^b D_{j(l)} \dots D_{j(1)} f(x,\,t)\,dt. \tag{2.28}$$

Bewijs Dit wordt bewezen met inductie over k, waarbij in de inductiestap gebruik wordt gemaakt van Stelling 2.39. Toepassing van Stelling 2.2 op (2.28), geeft dat alle partiële afgeleiden van F tot en met de orde k continu zijn op X, hetgeen impliceert dat $F \in \mathrm{C}^k(X, \mathbb{R})$. □

Hieruit volgt op zijn beurt de volgende variant van het delingslemma 2.38.

Gevolg 2.41 *Zij X een open interval in $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $f \in \mathrm{C}^{k+1}(X, \mathbb{R})$. Definieer*

$$q(x, \xi) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} & \text{als} \quad \xi \in X,\ x \in X \setminus \{\xi\}; \\ \\ f'(\xi) & \text{als} \quad \xi \in X,\ x = \xi. \end{cases}$$

Dan is $q \in \mathrm{C}^k(X \times X, \mathbb{R})$.

Bewijs We passen Lemma 2.38 toe met $p = 0$ en $Y = \{0\}$, hetgeen betekent dat de y-afhankelijkheid uit alle formules verdwijnt. Formule (2.26) geeft dan dat

$$q(x, \xi) = \int_0^1 f'(\xi + t(x - \xi))\, dt,$$

waarbij de integrand een C^k functie is van de variabelen (x, ξ, t). Toepassing van Gevolg 2.40 geeft dat $q \in \mathrm{C}^k(X \times X)$. □

De uitspraak over differentieerbaarheid is vooral interessant in de punten (x, ξ) met $x = \xi$, omdat we op grond van de bekende rekenregels al wisten dat op de verzameling der (x, ξ) met $x \neq \xi$ de functie $q(x, \xi)$ een C^{k+1} functie is.

Als de functie ook nog afhangt van extra parameters y, zodanig dat alle partiële afgeleiden met betrekking tot x tot en met de orde $k + 1$ continue functie zijn van (x, y), dan hangen alle partiële afgeleiden van $q(x, \xi, y)$ naar de variabelen (x, ξ) continu af van (x, ξ, y).

Voorbeeld 2.42 De functie $\sigma(x)$, gedefinieerd door $\sigma(x) = (\sin x)/x$ als $x \neq 0$ en $\sigma(0) = 1$, is willekeurig vaak differentieerbaar op de hele reële as. ⊘

Voorbeeld 2.43 De Bèta-functie van Euler, zie (2.24), is willekeurig vaak differentieerbaar op $]1, \infty[\times]1, \infty[$ en voor iedere k en l geldt dat

$$\frac{\partial^{k+l} B(p, q)}{\partial p^k\, \partial q^l} = \int_0^1 (\log t)^k\, t^{p-1}\, (\log(1-t))^l\, (1-t)^{q-1}\, dt. \tag{2.29}$$

Het is evident dat de integrand in de bovenstaande integraal continu is als functie van $(p, q, t) \in\ ]1, \infty[\times]1, \infty[\times\,]0, 1[$. Voor het toepassen van Gevolg 2.40 is het nu voldoende aan te tonen dat de integrand van (2.29) voor elke keuze van $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ continu is in de punten $(p_0, q_0, 0)$ en $(p_0, q_0, 1)$, met $p_0, q_0 > 1$, mits we de integrand in die punten de waarde 0 toekennen. Door substitutie van $(1 - t)$ voor t zien we dat we ons kunnen beperken tot punten van de eerste soort. We merken op dat de functie $[\log(1-t)]^k (1-t)^{q-1}$ continu is in $(p_0, q_0, 0)$. Het is dus voldoende aan te tonen dat

$$(\log t)^l t^{p-1} \to 0 \;\text{ als }\; (p, q, t) \to (p_0, q_0, 0),\ t > 0. \tag{2.30}$$

Dit doen we als volgt. Veronderstel dat $0 < t < \frac{1}{2}$ en dat $p \geq (1 + p_0)/2$. Dan geldt dat

$$0 \leq |\log t|^l t^{p-1} \leq |\log t|^l t^z, \quad \text{met} \quad z = \frac{p_0 - 1}{2} > 0.$$

Het is bekend dat de functie in het uiterst rechtse lid limiet nul heeft voor $t \downarrow 0$, dus ook voor $(p, q, t) \to (p_0, q_0, 0), t > 0$. Met behulp van de insluitstelling volgt hieruit direct dat (2.30). $\oslash$

Er is ook een versie van differentiatie onder het integraalteken voor oneigenlijke integralen. Ook dit gaat weer in termen van een geschikte uniforme dominantie.

Stelling 2.44 *Zij $X \subset \mathbb{R}$ een open interval en I een niet-leeg interval met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Zij verder $f : X \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie die voldoet aan de volgende eigenschappen.*

(a) *voor alle $x \in X$ is de functie $f_x : t \mapsto f(x, t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I;*

(b) *de functie f is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele, $D_1 f$ is continu op $X \times I$ en er is een oneigenlijk Riemann-integreerbare functie $g : I \to \mathbb{R}$ zo dat*

$$|D_1 f(x, t)| \leq g(t) \qquad \text{voor alle} \quad (x, t) \in X \times I.$$

Dan is de functie $F : X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

(continu) differentieerbaar op X en er geldt dat

$$F'(x) = \int_a^b D_1 f(x, t)\, dt. \tag{2.31}$$

Bewijs Zij $\xi \in X$. We zullen de differentieerbaarheid van F in ξ aantonen. Hiertoe definiëren we de functie $q : X \times I \to \mathbb{R}$ door

$$q(x, t) = \frac{f(x, t) - f(\xi, t)}{x - \xi}, \qquad (x \in X \setminus \{\xi\}, \quad t \in I),$$

en

$$q(\xi, t) = D_1 f(\xi, t), \qquad (t \in I).$$

Dan is de functie q continu op $X \times I$ wegens Lemma 2.38. We zullen laten zien dat voor alle $x \in X$ en $t \in I$ geldt dat

$$|q(x, t)| \leq g(t). \tag{2.32}$$

Voor $x = \xi$ volgt dit uit de voorwaarde (b). Laat $(x, t) \in (X \setminus \{\xi\}) \times I$. Dan geldt vanwege de middelwaardestelling toegepast op de eerste variabele van f dat er een tussen ξ en x gelegen $\eta = \eta(x, t)$ bestaat zo dat $q(x, t) = D_1 f(\eta, t)$. De schatting (2.32) volgt nu ook uit voorwaarde (b).

Wegens het majorantiekenmerk is de functie $q : t \mapsto q(x, t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I, voor elke $x \in X$. Wegens Stelling 2.34 is de functie $Q : X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$Q(x) = \int_a^b q(x, t)\, dt$$

continu op X, dus in het bijzonder in ξ. Uit de definities volgt direct dat

$$F(x) - F(\xi) = Q(x)(x - \xi)$$

voor alle $x \in X \setminus \{\xi\}$. En uiteraard is de bewering ook geldig voor $x = \xi$. Omdat Q continu is in ξ leiden we hieruit af dat F differentieerbaar is in ξ, en dat de afgeleide gegeven wordt door

$$F'(\xi) = Q(\xi) = \int_a^b D_1 f(\xi, t)\, dt.$$

Hieruit volgt dat F differentieerbaar is op X. Uit de formule (2.31) volgt door toepassing van Stelling 2.34 dat de afgeleide continu is. □

Voorbeeld 2.45 We tonen aan dat de Gamma-functie willekeurig vaak differentieerbaar is op $]0, \infty[$, terwijl

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad (k \in \mathbb{N},\ x > 0).$$

De Gamma-functie is daarmee een gladde uitbreiding tot de positieve reële as van de faculteitsfunctie $(n-1)!$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. We schrijven $f_k(x, t)$ voor de integrand.

Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Dan is

$$\lim_{t \downarrow 0}\ (\log t)^k\, t^\epsilon = 0,$$

dus er bestaat een constante $C_\epsilon > 0$ zo dat $|\log t|^k \leq C_\epsilon t^{-\epsilon}$ voor alle $t \in]0, 1]$. Dit geeft een schatting van het type

$$|f_k(x, t)| \leq C_\epsilon t^{x-1-\epsilon}, \qquad (0 < t \leq 1).$$

Hierbij kunnen we $\epsilon > 0$ kiezen met $\epsilon < x$, zodat de dominerende functie functie $t \mapsto C_\epsilon t^{x-1-\epsilon}$ oneigenlijk integreerbaar is op het interval $]0, 1]$. Hieruit volgt de convergentie van $\int_0^1 f_k(x, t)\, dt$.

Voor de integratie over $[1, \infty[$ merken we op dat

$$\lim_{t \to \infty} (\log t)^k t^N e^{-t/2} = 0$$

voor alle $k, N \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat er een $C_k > 0$ bestaat zo dat

$$|f_k(x, t)| \leq C_k e^{-t/2} \qquad (t \geq 1).$$

Hieruit volgt de convergentie van $\int_1^\infty f_k(x, t)\, dt$.

Laat nu $0 < a < b$ zijn, en veronderstel dat $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt voor alle $x \in]a, b[$ dat

$$|f_k(x, t)| \leq |f_k(a, t)|, \qquad (0 < t \leq 1),$$

en dat

$$|f_k(x, t)| \leq |f_k(b, t)|, \qquad (t \geq 1).$$

Voor alle $k \in \mathbb{N}, x > 0, t > 0$ geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial x} f_k(x, t) = f_{k+1}(x, t).$$

Het resultaat volgt nu met inductie naar k, door toepassing van Stelling 2.44. ⊘

Voorbeeld 2.46 We beschouwen nogmaals de Bèta-functie van Euler, zie (2.24), waarvoor we nu de sterkere uitspraak zullen bewijzen dat hij willekeurig vaak differentieerbaar is op $]0,\infty[\times]0,\infty[$ terwijl voor alle $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat

$$\frac{\partial^{k+l} B(p,\, q)}{\partial p^k\, \partial q^l} = \int_0^1 (\log t)^k\, t^{p-1}\, (\log(1-t))^l\, (1-t)^{q-1}\, dt. \tag{2.33}$$

De continuïteit, van de integrand als functie van $(p,\, q,\, t) \in]1,\, \infty[\times]1,\, \infty[\times]0,\, 1[$ is evident. Als functie van t is de integrand dus lokaal Riemann integreerbaar op $]0,1[$. Zij nu $p_0, q_0 > 0$. Dan geldt voor $p > 2p_0$ en $q > 2q_0$ dat

$$|(\log t)^k\, t^{p-1}\, (\log(1-t))^l\, (1-t)^{q-1}| \leq \psi(t)\, t^{p_0-1} t^{q_0-1} \tag{2.34}$$

met

$$\psi(t) := (\log t)^k\, t^{p_0}\, (\log(1-t))^l\, (1-t)^{q_0}.$$

Deze functie is continu voortzetbaar tot $[0.1]$, omdat

$$\lim_{t\downarrow 0} \psi(t) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{t\uparrow 1} \psi(t) = 0.$$

Hieruit volgt dat er een $M > 0$ bestaat zo dat $|\psi(t)| \leq M$ voor alle $0 < t < 1$. We concluderen dat de functie in het rechterlid van (2.34) op $]0,1[$ gemajoreerd kan worden door de functie

$$t \mapsto M t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1},$$

die absoluut convergent is op $]0,1[$, wegens Voorbeeld 2.37.

Door herhaald Stelling 2.44 toe te passen op de variabelen p en q concluderen we dat de functie B willekeurig vaak differentieerbaar is op $]2p_0,\infty[\times]2q_0,\infty[$, met paartiële afgeleiden die gegeven worden door (2.33). Aangezien dit geldt voor alle $p_0, q_0 > 0$ zien we dat B willekeurig vaak differentieerbaar is op $]0,\infty[\times]0,\infty[$ met de gegeven partiële afgeleiden. $\oslash$

2.5 Verwisseling van de integratievolgorde

Ter afronding van het hoofdstuk 'Verwisselingsstellingen' geven we nog het volgende resultaat.

Stelling 2.47 *Zij $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en $c,\, d \in \mathbb{R}$, $c < d$. Neem aan dat de functie $f : [a,\, b] \times [c,\, d] \to \mathbb{R}$ continu is. Dan geldt:*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t,\, s)\, dt \right) ds = \int_a^b \left(\int_c^d f(t,\, s)\, ds \right) dt. \tag{2.35}$$

Bewijs Definieer, voor iedere $x \in [a,\, b]$ en $s \in [c,\, d]$,

$$\phi(x,\, s) := \int_a^x f(t,\, s)\, dt.$$

Merk op dat $\phi(a,\, s) = 0$.

Uit de analyse van functies van één variabele weten we dat voor iedere $s \in [c,\, d]$ de functie $x \mapsto \phi(x,\, s)$ differentieerbaar is, met afgeleide gelijk aan

$$\frac{\partial \phi(x,\, s)}{\partial x} = f(x,\, s),$$

hetgeen een continue functie is van $(x,\, s) \in [a,\, b] \times [c,\, d]$. Definieer

$$\Phi(x) := \int_c^d \phi(x,\, s)\, ds.$$

Merk op dat $\Phi(a) = 0$, omdat voor iedere $s \in [c,\, d]$ geldt dat $\phi(a,\, s) = 0$.

Stelling 2.39 geeft dat de functie Φ differentieerbaar is op $[a,\, b]$, met afgeleide gelijk aan

$$\Phi'(x) := \int_c^d \frac{\partial \phi(x,\, s)}{\partial x}\, ds = \int_c^d f(x,\, s)\, ds.$$

Integratie hiervan over $x \in [a,\, b]$ geeft nu

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_c^d f(x,\, s)\, ds \right) dx &= \int_a^b \Phi'(x) dx \\
&= \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b) \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b f(t,\, s)\, dt \right) ds.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt (2.35) als we in het linkerlid de integratievariabele x vervangen door t. $\square$

In het vervolg zullen we de identiteit (2.47) ook zonder haken schrijven als

$$\int_c^d \int_a^b f(t,\, s)\, dt\, ds = \int_a^b \int_c^d f(t,\, s)\, ds\, dt$$

omdat uit de volgorde van de integraaltekens en van ds en dt blijkt in welke volgorde de integraties genomen dienen te worden.

Voorbeeld 2.48 In een later college zul je kennis maken met een theorie van meerdimensionale integratie. Daarin wordt de verwisselbaarheid van de integratievolgorde afgeleid zonder gebruik te maken van Stelling 2.39. Deze verwisselingsstelling geldt bovendien voor een klasse van functies van meer variabelen die veel ruimer is dan de klasse van continue functies.

Met het oog hierop is het interessant dat omgekeerd Stelling 2.39 ook afgeleid kan worden uit Stelling 2.47.

Bewijs Neem aan dat f een functie is als in Stelling 2.39. Zij $c \in I$. Voor iedere $x \in I$ met $x > c$ geldt dat

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x,\, t)\, dt &= \int_a^b \left(f(c,\, t) + \int_c^x \frac{\partial f(s,\, t)}{\partial s}\, ds \right) dt \\
&= \int_a^b f(c,\, t)\, dt + \int_a^b \int_c^x \frac{\partial f(s,\, t)}{\partial s}\, ds\, dt \\
&= \int_a^b f(c,\, t)\, dt + \int_c^x \int_a^b \frac{\partial f(s,\, t)}{\partial s}\, dt\ ds.
\end{aligned}$$

Hierin is in de derde identiteit Stelling 2.47 gebruikt, met f vervangen door de continue D_1f (en met s en t verwisseld). Omdat in het rechterlid de variabele x als bovengrens van het integratie-interval voorkomt, is de conclusie dat het linkerlid differentieerbaar is naar x, met afgeleide gelijk aan

$$\int_a^b \frac{\partial f(s,\, t)}{\partial s}\, dt\bigg|_{s=x} = \int_a^b \frac{\partial f(x,\, t)}{\partial x}\, dt.$$

Dit is precies de conclusie is van Stelling 2.39. Omdat er bij iedere $x \in I$ een $c \in I$ is met $x > c$, geldt de conclusie voor iedere $x \in I$. $\square$

$\oslash$

3 Rijen en reeksen van functies

3.1 Uniforme convergentie van een rij functies

Met het oog op latere toepassingen op machtreeksen en Fourier-reeksen werken we in het vervolg steeds met *complexwaardige* functies. In het vervolg veronderstellen we dat V een niet-lege verzameling is, en $p \in \mathbb{Z}$. Verder veronderstellen we dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq p}$ een functie $f_k : V \to \mathbb{C}$ gegeven is. We schrijven $(f_k)_{k \geq p}$ of $(f_k)_{k=p}^{\infty}$ voor de bijbehorende *rij van functies* $V \to \mathbb{C}$.

Definitie 3.1 (puntsgewijze convergentie) De rij functies $(f_k)_{k \geq p}$ heet *puntsgewijs convergent* op de verzameling V indien voor iedere $x \in V$ de rij $(f_k(x))_{k \geq p}$ in $\mathbb{C}$ convergent is. Is dit het geval, dan heet de functie $g : V \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$g(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x), \qquad (x \in V),$$

de puntsgewijze limiet van de rij $(f_k)_{k \geq p}$. $\oslash$

Indien V een metrische ruimte is, dan kan het gebeuren dat elk van de functies f_k continu is, terwijl de puntsgewijze limiet dat niet is.

Voorbeeld 3.2 Veronderstel dat $V = \mathbb{R}$ en dat de rij functies gegeven wordt door

$$f_k(x) = \frac{kx}{1 + k|x|}, \qquad (k \geq 1,\, x \in \mathbb{R}).$$

Volgens de gebruikelijke rekenregels is elk van de functies f_k continu op $\mathbb{R}$. Als $x \neq 0$, dan geldt

$$f_k(x) = \frac{x}{1/k + |x|} \to \frac{x}{|x|}, \qquad (k \to \infty).$$

Anderzijds geldt dat $f_k(0) = 0$ voor alle k. Hieraan zien we dat de rij (f_k) puntsgewijs convergeert naar de functie $g = \mathrm{sgn}$, waarbij de *tekenfunctie* sgn gedefinieerd is door

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x > 0, \\ 0 & \text{als} \quad x = 0, \\ -1 & \text{als} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Het is duidelijk dat $g(x)$ niet continu is in het punt $x = 0$. $\oslash$

De voorwaarde van puntsgewijze convergentie is blijkbaar niet sterk genoeg om continuïteit van de puntsgewijze limiet g te kunnen afleiden uit puntsgewijze convergentie van een rij continue functies $(f_k)_{k \geq p}$. In het onderstaande zullen we een sterker begrip van convergentie invoeren die dit wel mogelijk maakt.

Het is daarbij prettig te kunnen werken met een verruiming van het begrip $\sup$ (supremum) van een verzameling. In het college Inleiding Analyse is het begrip supremum of kleinste bovengrens ingevoerd op basis van het volgende lemma, dat afgeleid werd uit de volledigheid van $\mathbb{R}$.

Lemma 3.3 *Zij $A \subset \mathbb{R}$ een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling. Dan is er een uniek getal $s \in \mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen:*

(a) *s is een bovengrens van A, dat wil zeggen, voor alle $x \in A$ geldt $x \leq s$.*

(b) *voor iedere bovengrens b van A geldt $b \geq s$.*

Het in bovenstaand lemma vastgelegde getal s heet de *kleinste bovengrens*, of het *supremum*, van A. Notatie

$$s = \sup A.$$

We verruimen deze definitie nu zo dat de notie van supremum wordt uitgebreid naar willekeurige deelverzamelingen van A.

Definitie 3.4 Zij $A \subset \mathbb{R}$.

(a) $\sup A = s$ met $s \in \mathbb{R}$ betekent dat A niet-leeg en naar boven begrensd is en dat s de eigenschappen (a) en (b) van Lemma 3.3 heeft.

(a) $\sup A = \infty$ betekent dat A niet naar boven begrensd is, dwz, voor iedere $R \in \mathbb{R}$ bestaat een $x \in A$ met $x > R$.

(b) $\sup A = -\infty$ betekent dat A de lege verzameling is.

$\oslash$

Als gevolg van deze afspraken bestaat er voor *iedere* $A \subset \mathbb{R}$ een uniek element $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ zo dat $\sup A = s$.

Zij nu V een niet-lege verzameling en $f : V \to \mathbb{C}$ een functie. Dan definiëren we

$$\sup_{x \in V} |f(x)| := \sup\{|f(x)| \ : \ x \in V\}.$$

en noteren we

$$\|f\|_V := \sup_{x \in V} |f(x)|.$$

Merk op dat de verzameling $\{|f(x)| \ : \ x \in V\}$ niet-leeg is, zodat $\|f\|_V \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Het volgende principe volgt direct uit de definitie, maar wordt zo vaak in allerlei schattingen gebruikt dat we het ondergebracht hebben in een lemma.

Lemma 3.5 *Zij $f : V \to \mathbb{C}$ een functie, en $M \in [0, \infty[$ of $M = \infty$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) $\|f\|_V \leq M$;

(b) *voor alle $x \in V$ geldt $|f(x)| \leq M$.*

Bewijs Is $M = \infty$, dan zijn beide beweringen evident waar. Veronderstel dus dat $0 \leq M < \infty$.

Stel dat (a) geldt. Dan geldt voor iedere $x \in V$ dat $|f(x)| \leq \|f\|_V \leq M$, dus (b) geldt. Veronderstel nu dat (b) geldt. Dan is M een bovengrens van de verzameling $\{|f(x)| \ : x \in V\}$. De kleinste bovengrens van deze verzameling is $\|f\|_V$, dus (a) geldt. $\square$

Na invoering van $\| \cdot \|_V$ definiëren we het aangekondigde sterkere begrip van convergentie als volgt.

Definitie 3.6 De rij $(f_k)_{k=p}^{\infty}$ van functies $V \to \mathbb{C}$ heet *uniform convergent* indien er een functie $g : V \to \mathbb{C}$ bestaat zo dat

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k - g\|_V = 0.$$

In dit geval heet g de *uniforme limiet* van de rij $(f_k)_{k \geq p}$. $\oslash$

Schrijven we uitspraak (3.6) uit met de definitie van limiet dan zien we dat de uitspraak equivalent is met

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in V \quad \forall k \geq N: \qquad |g(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Anders gezegd, de bij $\epsilon > 0$ bestaande index $N = N(\epsilon)$ 'werkt' voor alle $x \in V$ tegelijk. Dit verklaart de naam uniforme convergentie.

Voorbeeld 3.7 We beschouwen $V =]0, 1]$ en de rij functies $f_k : V \to \mathbb{R}$, voor $k \geq 0$, gedefinieerd door

$$f_k(x) = \frac{k}{x(x+k)}.$$

Dan is iedere functie f_k onbegrensd op V. Toch geldt dat de rij uniform convergeert naar de functie $g : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = 1/x$. Immers, voor alle $k \geq 1$ en alle $x \in V$ geldt

$$|f_k(x) - g(x)| = \left| \frac{-1}{x+k} \right| = \frac{1}{x+k} \leq \frac{1}{k}.$$

Hieruit volgt dat $\|f_k - g\|_V \leq \frac{1}{k}$ dus $\|f_k - g\|_V \to 0$ voor $k \to \infty$.

We merken nog op dat f_k en g weliswaar onbegrensd zijn, maar dat $f_k - g$ begrensd is op V. $\oslash$

In het vervolg noemen we $\|f\|_V$ ook wel de *sup-norm* van de functie $f : V \to \mathbb{C}$. Strikt genomen is deze terminologie niet correct omdat we ook de waarde $\|f\|_V = \infty$ toelaten, hetgeen betekent dat de functie f niet-begrensd is. Anderzijds geldt het volgende lemma, dat zegt dat $\|\cdot\|_V$ de definiërende eigenschappen van een norm heeft.

Lemma 3.8 *Voor alle $f, g : V \to \mathbb{C}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt dat*

(a) $\|f\|_V \geq 0$ *en* $\|f\|_V = 0 \Rightarrow f = 0$,

(b) $\|f + g\|_V \leq \|f\|_V + \|g\|_V$,

(c) $\|\lambda f\|_V = |\lambda| \|f\|_V$,

Bewijs Voor alle $x \in V$ geldt

$$|f(x)| \leq \|f\|_V.$$

Omdat we verondersteld hebben dat $V \neq \emptyset$, volgt hieruit dat $\|f\|_V \geq 0$. Is $\|f\|_V = 0$ dan volgt uit de schatting dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in V$, dus f is de nul functie. We concluderen dat (a) geldt.

Voor (b) merken we op dat voor alle $x \in V$ geldt

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_V + \|g\|_V.$$

Hieruit volgt (b), zie Lemma 3.5.

Tenslotte is het voldoende (c) te bewijzen voor $\lambda \neq 0$. Voor alle $x \in V$ geldt $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|\|f\|_V$, dus $\|\lambda f\|_V \leq |\lambda|\|f\|_V$. Hieruit volgt weer dat

$$\|f\|_V = \|\lambda^{-1}\lambda f\|_V \leq |\lambda^{-1}|\|\lambda f\|_V.$$

Door te vermenigvuldigen met $|\lambda|$ concluderen we tenslotte dat (c) geldt. $\square$

Er is een natuurlijke setting waarin $\|\cdot\|$ wel een norm in strikte zin definieert. Veronderstel dat V een niet-lege verzameling is, en beschouw de ruimte $B(V)$ van begrensde functies $f : V \to \mathbb{C}$. Dus

$$B(V) = \{f : V \to \mathbb{C} \; : \; \|f\|_V < \infty\}.$$

Voorzien van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is $B(V, \mathbb{C})$ een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$. Bovendien definieert $\|\cdot\|_V : B(V) \to [0, \infty[$ een echte norm op $B(V)$, wegens Lemma 3.8.

In het dictaat Inleiding Analyse is reeds behandeld dat een norm op een lineaire ruimte aanleiding geeft tot een afstand of metriek op die ruimte. In het geval van $B(V), \|\cdot\|_V)$ is deze metriek de functie $d : B(V) \times B(V) \to [0, \infty[$ gedefinieerd door

$$d(f, g) = \|f - g\|_V.$$

In de metrische ruimte $(B(V), d)$ bestaat nu de uit Inleiding Analyse bekende notie van convergentie van rijen. We merken op dat voor een rij $(f_k)_{k \geq p}$ en een functie g in $B(V)$ de volgende twee uitspraken gelijkwaardig zijn.

(a) de rij (f_k) convergeert op V uniform naar g;

(b) de rij (f_k) convergeert naar g in de metrische ruimte $(B(V), d)$.

Voor uniforme convergentie van rijen van functies gelden daarom de resultaten die we reeds kennen voor convergentie van rijen in metrische ruimten.

Uit het volgende lemma blijkt dat uniforme convergentie inderdaad sterker is dan puntsgewijze convergentie.

Lemma 3.9 *Zij V een verzameling en (f_k) een rij functies $V \to \mathbb{C}$. Zij voorts $f : V \to \mathbb{C}$. Indien $f_k \to f$ uniform op V, voor $k \to \infty$, dan geldt ook dat $f_k \to f$ puntsgewijs op V.*

Bewijs Zij $x_0 \in V$ een vast punt. Dan geldt dat

$$0 \leq |f_k(x_0) - f(x_0)| \leq \|f_k - f\|_V.$$

Uit de uniforme convergentie volgt dat $\|f_k - f\|_V \to 0$ voor $k \to \infty$. Door toepassing van de insluitstelling volgt nu dat $|f_k(x_0) - f(x_0)| \to 0$, dus $f_k(x_0) \to f(x_0)$, voor $k \to \infty$. $\square$

Opmerking 3.10 We vergelijken nogmaals uniforme convergentie met puntsgewijze convergentie. Uitschrijven van de definitie van puntsgewijze convergentie van de rij functies $f_k : V \to \mathbb{C}$ geeft:

$$\forall x \in V \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N : \qquad |g(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Het feit dat het hierbij nodig kan zijn om voor diverse $x \in V$ steeds grotere N te kiezen geeft men soms aan door $N = N(x, \epsilon)$ te schrijven, terwijl we bij uniforme convergentie $N = N(\epsilon)$ kunnen schrijven. $\oslash$

Voorbeeld 3.11 We beschouwen de rij functies $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_k(x) = x^k$, voor $k \geq 1$ en $x \in [0, 1]$.

Is $0 \leq x < 1$, dan is $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$. Anderzijds is $f_k(1) = 1 \to 1$ voor $k \to \infty$. We zien hieraan dat de rij (f_k) puntsgewijs convergent is, met limiet g gegeven door $g(x) = 0$ voor $0 \leq x < 1$ en $g(1) = 1$.

We zullen aantonen dat de rij (f_k) niet uniform convergent is. Stel dat de rij dat wel was, met limiet f. Dan zou de rij (f_k) ook puntsgewijs convergent zijn naar f, dus $f = g$. Hieruit volgt dat $f_k(x) - g(x) = x^k$ voor $0 \leq x < 1$ en $f_k(1) - g(1) = 0$. Hieruit blijkt in ieder geval dat $|f_k(x) - g(x)| \leq 1$ voor alle k en alle $x \in [0,1]$, dus $\|f_k - g\|_{[0,1]} \leq 1$. Anderzijds geldt voor elke $0 \leq x < 1$ dat

$$x^k = |f_k(x) - g(x)| \leq \|f_k - g\|_{[0,1]} \leq 1.$$

Door de limiet voor $x \uparrow 1$ te nemen leiden we hieruit af dat $\|f_k - g\|_{[0,1]} = 1$. De convergentie van de rij is dus niet uniform. ⊘

De uniforme norm is vaak bijzonder nuttig bij het schatten van integralen. Vooral het volgende wordt daarbij gebruikt.

Lemma 3.12 *Zij $V = [a,b]$ een gesloten en begrensd interval en $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ een Riemann-integreerbare (dus in het bijzonder begrensde) functie. Dan geldt dat*

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\ dx \right| \leq \|\varphi\|_{[a,b]} \cdot (b-a). \tag{3.2}$$

Bewijs De functie $|\varphi|$ is Riemann integreerbaar en voor elke $x \in [a,b]$ geldt dat $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{[a,b]}$. Hieruit leiden we af dat

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)|\, dx \leq \int_a^b \|\varphi\|_{[a,b]}\ dx = \|\varphi\|_{[a,b]} \cdot (b-a).$$

□

Gevolg 3.13 *Laten f_k, $(k \geq p)$ en g Riemann-integreerbare functies op het gesloten en begrensde interval $[a,\ b]$ zijn. Veronderstel dat $f_k \to g$ uniform op $[a,b]$. Dan geldt dat*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Bewijs Wegens het bovenstaande lemma geldt, voor elke $k \geq p$, dat

$$0 \leq \left| \int_a^b f_k(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \right| \leq \|f_k - g\|_{[a,b]} \cdot (b-a).$$

Uit de uniforme convergentie volgt dat $\|f_k - g\|_{[a,b]} \to 0$. Pas nu de insluitstelling toe. □

Voorbeeld 3.14 De conclusie van Gevolg 3.13 hoeft zeker *niet* te gelden als slechts puntsgewijze convergentie is gegeven. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld.

Zij $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie met de eigenschap dat $\phi = 0$ buiten $[0,2]$, terwijl

$$\int_0^2 \phi(x)\ dx = 1.$$

Als specifiek voorbeeld kunnen we de functie $\phi(x) = \max(1 - |x-1|, 0)$ nemen (maak een plaatje). Voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ definiëren we de functie

$$\phi_k(x) := k^2\,\phi(k\,x), \quad x \in [0,2].$$

Als $x = 0$, dan geldt voor iedere k dat $\phi_k(x) = 0$, dus $\phi_k(x)$ convergeert op triviale wijze naar nul als $k \to \infty$. Is $0 < x \leq 2$, dan is $\phi_k(x) = 0$ zodra $k\,x \geq 1$, ofwel $k \geq 1/x$. Dus ook in dit geval convergeert $\phi_k(x)$ naar nul voor $k \to \infty$. De conclusie is dat de rij van functies (ϕ_k) op de verzameling $[0,2]$ puntsgewijs naar de nulfunctie convergeert voor $k \to \infty$.

Anderzijds is, voor $k \geq 1$,

$$\int_0^2 \phi_k(x)\,dx = k\int_0^{2k} \phi(y)\,dy = k\int_0^2 \phi(y)\;dy = k.$$

Dus hoewel de rij ϕ_k op $[0,2]$ puntsgewijs naar nul convergeert, gaat de integraal over dat interval naar ∞. ⊘

We behandelen nu een belangrijk principe: is (f_k) een rij van continue functies die uniform convergeert naar een functie g, dan is de limietfunctie g vanzelf continu. Voor het formuleren van continuïteit van de betreffende functies hebben we nodig dat V voorzien is van een metriek d. Hieronder valt in het bijzonder het geval dat V een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is, voorzien van de beperking van de Euclidische metriek.

Stelling 3.15 (Behoud van continuïteit bij uniforme convergentie) *Zij (V,d) een metrische ruimte. Laat f_k een rij functies $V \to \mathbb{C}$ zijn die uniform convergeert naar een limietfunctie $g : V \to \mathbb{C}$. Veronderstel dat elk der functies f_k continu is op V. Dan is ook de limietfunctie g continu op V.*

Bewijs Zij $a \in V$ vast, dan zullen we de continuïteit van g in a aantonen. Daartoe gebruiken we de schatting

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(a)| &\leq |g(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - g_k(a)| \\
&\leq \|g - f_k\|_V + |f_k(x) - f_k(a)| + \|f_k - g\|_V \\
&= 2\|f_k - g\|_V + |f_k(x) - f_k(a)|.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Zij $\epsilon > 0$. Wegens de uniforme continuïteit is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $k \geq N$ geldt

$$\|f_k - g\|_V < \epsilon/3.$$

In het bijzonder geldt dit voor $k = N$. De functie f_N is continu in a. Er bestaat dus een $\delta > 0$ zo dat

$$|f_N(x) - f_N(a)| < \epsilon/3, \qquad \text{voor} \quad x \in B_V(a;\delta).$$

Combineren we deze schattingen met (3.3), dan vinden we dat voor alle $x \in B_V(a;\delta)$ geldt dat

$$|g(x) - g(a)| < 2\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Hiermee is de continuïteit van g in a aangetoond. □

Vaak heeft men aanvankelijk alleen maar de rij van functies (f_k) gegeven en nog niet de kandidaat g voor de limietfunctie. In deze gevallen is het Cauchy-criterium voor convergentie nuttig. We veronderstellen weer dat V een niet-lege verzameling is.

Definitie 3.16 Laat voor ieder geheel getal $k \geq p$ een complexwaardige functie $f_k : V \to \mathbb{C}$ gegeven zijn. De rij (f_k) heet een *uniforme Cauchy-rij* indien voor er elke $\epsilon > 0$ een rangnummer $N \geq p$ bestaat zo dat

$$k, l > N \implies \|f_k - f_l\|_V < \epsilon.$$

$\oslash$

Zij $B(V)$ voorzien van de uniforme afstand $d(f, g) := \|f - g\|_V$. Dan komt het bovenstaande begrip uniforme Cauchy-rij voor een rij (f_k) in $B(V)$ overeen met het in Inleiding Analyse gedefinieerde begrip van Cauchy-rij in een metrische ruimte. Uit het onderstaande resultaat zullen we in het bijzonder afleiden dat de metrische ruimte $(B(V), d)$ volledig is, i.e., iedere Cauchy-rij in $B(V)$ is convergent.

Stelling 3.17 (Uniform Cauchy-criterium) *Zij (f_k) een rij functies $V \to \mathbb{C}$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De rij (f_k) is een uniforme Cauchy-rij.*

(b) *De rij (f_k) is uniform convergent.*

Bewijs De implicatie '(b) $\Rightarrow$ (a)' is een algemeenheid voor convergente rijen in metrische ruimten. Immers, veronderstel dat (b) zij $g : V \to \mathbb{C}$ de uniforme limiet van de rij (f_k). Dan volgt uit de driehoeksongelijkheid voor de sup-norm, zie Lemma 3.8 (b), dat

$$\|f_k - f_l\|_V \leq \|f_k - g\|_V + \|g - f_l\|_V, \qquad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Is $\epsilon > 0$ dan bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$k > N \implies \|f_k - g\| < \epsilon/2.$$

Voor $k, l > N$ geldt dus $\|f_k - f_l\|_V < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Veronderstel nu dat (a) geldt. Voor iedere $x \in V$ geldt dat

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq \|f_k - f_l\|_V,$$

waaruit we afleiden dat de $f_k(x)$ een Cauchy-rij in $\mathbb{C}$ vormen. Wegens de volledigheid van $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ impliceert dit dat $f_k(x) \to g(x)$ voor een unieke $g(x) \in \mathbb{C}$. (In het college Inleiding Analyse is bewezen dat $\mathbb{R}^n$ volledig is.) Anders gezegd, er is een unieke functie $g : V \to \mathbb{C}$ zo dat $f_k \to g$ puntsgewijs op V voor $k \to \infty$.

We gaan nu bewijzen dat de convergentie $f_k \to g$ uniform is. Zij $\epsilon > 0$ en zij $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $k, l \geq N$ geldt dat $\|f_k - f_l\|_V < \epsilon/2$. Voor alle $k, l > N$ en $x \in V$ geldt dan dat

$$|f_k(x) - f_l(x)| < \epsilon/2.$$

Door de limiet voor $l \to \infty$ te nemen vinden hieruit dat

$$|f_k(x) - g(x)| \leq \epsilon/2.$$

Dit geldt voor alle $x \in V$, dus ook

$$\|f_k - g\|_V \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Dit laatste geldt voor alle $k > N$. We concluderen dat (b) geldt. $\square$

Gevolg 3.18 *De metrische ruimte* $(B(V), d)$ *is volledig.*

Bewijs Zij $(f_n)_{n\geq 1}$ een Cauchy-rij in $B(V)$. Dan volgt uit Stelling 3.17 dat er een unieke functie $f : V \to \mathbb{C}$ bestaat zo dat $f_n \to f$ uniform op V, voor $n \to \infty$. We voltooien het bewijs door aan te tonen dat $f \in B(V)$.

Hiertoe merken we op dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $n \geq N \implies \|f_n - f\|_V \leq \epsilon := 1$, dus in het bijzonder $\|f\|_V \leq \|f - f_N\|_V + \|f_N\|_V \leq \|f_N\|_V + 1 < \infty$. Dus f is begrensd op V. $\square$

3.2 Reeksen in $\mathbb{C}$

In de volgende paragraaf zullen we reeksen van functies bestuderen. Als voorbereiding daarop brengen we in deze paragraaf enige definities en resultaten uit die theorie in herinnering.

Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. We gebruiken de notatie $\sum_{k\geq 0} a_k$ om aan te geven dat we de intentie hebben om de elementen van de rij (a_n) te sommeren. Voor $n \geq 0$ definiëren we de *n-de partiële som* van de reeks door

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{3.4}$$

Opmerking 3.19 Merk op dat de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ iets anders is dan de rij $(a_k)_{k\geq 0}$. Als we de reeks als formeel wiskundige object willen introduceren, dan kunnen we dit beter doen door de reeks te definiëren als de rij $(A_n)_{n\geq 0}$ van partiële sommen. $\oslash$

Definitie 3.20 Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. De reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ heet *convergent* indien de n-de partiële sommen A_n, gedefinieerd door (3.4), een convergente rij in $\mathbb{C}$ vormen. In dat geval schrijven we

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Dit getal heet de *som van de reeks*. $\oslash$

Lemma 3.21 *Laat* $a_k \in \mathbb{C}$, *voor* $k \in \mathbb{N}$. *Dan geldt:*

$$\sum_{k\geq 0} a_k \;\text{ convergent } \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3.5}$$

Bewijs Schrijf $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Dan heeft de complexe rij $(A_n)_{n\geq 0}$ een limiet die we noteren met A. Dus $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Hieruit volgt dat ook $\lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A$. Anderzijds geldt $a_n = A_n - A_{n-1}$. Met de somregel voor limieten leiden we nu af dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0.$$

$\square$

Het omgekeerde van de bewering (3.5) is in het algemeen niet waar. Dit blijkt bijvoorbeeld uit het volgende lemma.

Lemma 3.22 *Zij $s \in \mathbb{R}$. De reeks*

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$$

is convergent dan en slechts dan als $s > 1$.

Bewijs Als $s \leq 0$, dan geldt niet dat $1/k^s \to 0$ voor $k \to \infty$. Wegens het voorgaande lemma mogen we dus veronderstellen dat $s > 0$.

In het vervolg schrijven we A_n voor de n-de partiële som van de reeks. We beschouwen de functie $f : x \mapsto 1/x^s$ op $[1, \infty[$. Zij V_n de verdeling van het interval $[1, n+1]$ in stukken van lengte 1. Dan geldt voor de ondersom en de bovensom van de integraal van f over $[1, n+1]$ ten aanzien van deze verdeling dat

$$\underline{S}(f, V_n) \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq \overline{S}(f, V_n),$$

dus

$$A_{n+1} - 1 = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^s} \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = A_n$$

(maak een plaatje!). De monotoon stijgende rij (A_n) is convergent dan en slechts dan als hij begrensd is. Uit de bovenstaande schatting blijkt nu dat de monotoon stijgende rij (A_n) convergent is dan en slechts dan als de integraal

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx$$

dat is. In Lemma 2.23 hebben we gezien dat dit laatste het geval is dan en slechts dan als $s > 1$. $\square$

Ter voorbereiding op de theorie van de reeksen geven we nog het volgende resultaat.

Lemma 3.23 *Zij (a_k) een rij complexe getallen zo dat de reeks $\sum_{k \geq 0} a_k$ convergent is. Dan is voor iedere $n \in \mathbb{N}$ de reeks $\sum_{k \geq n} a_k$ convergent. Bovendien geldt*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0.$$

Bewijs Voor alle $m \geq n$ geldt $\sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{m} a_k$. Door de limiet voor $m \to \infty$ te nemen blijkt hieruit dat de genoemde reeks $\sum_{k \geq n} a_k$ convergent is, terwijl

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Door de limiet voor $n \to \infty$ te nemen leiden we hieruit met de somregel voor limieten af dat

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = 0.$$

$\square$

Definitie 3.24 Een complexe reeks $\sum_{k \geq 0} a_k$ heet *absoluut* convergent indien $\sum_{k \geq 0} |a_k|$ convergent is. $\oslash$

Het volgende resultaat geeft in het bijzonder een gegeneraliseerde driehoeksongelijkheid voor reeksen.

Lemma 3.25 *Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. Indien de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ absoluut convergent is, dan is hij ook convergent, en er geldt:*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \tag{3.6}$$

Bewijs Uit de absolute convergentie volgt dat de rij $B_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ convergent is, dus Cauchy. Zij $\epsilon > 0$ dan bestaat er een N zo dat voor alle $q \geq p \geq N$ geldt $|B_p - B_q| < \epsilon$. Zij A_n de n-de partiële som van de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$. Dan geldt voor alle $q \geq p \geq N$ dat

$$|A_q - A_p| = |\sum_{k=p+1}^{q} a_k| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| = |B_q - B_p| < \epsilon.$$

Dus (A_n) is een Cauchy-rij, en aangezien $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ volledig is, concluderen we dat deze rij van partiële sommen convergeert. De reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ convergeert dus.

Voor alle $n \geq 0$ geldt dat

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Nemen we de limiet voor $n \to \infty$, dan concluderen we dat (3.6) geldt. □

Om voor de hand liggende redenen vatten we de uitspraak dat de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ absoluut convergeert soms ook samen in de formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Het volgende resultaat wordt zeer vaak gebruikt om de convergentie van reeksen aan te tonen.

Lemma 3.26 (Majorantie-kenmerk voor convergentie) *Laat (a_k) een complexe rij zijn, en (t_k) een reële rij, terwijl er een $C > 0$ bestaat zo dat*

$$|a_k| \leq C t_k \qquad (\forall k \geq 0).$$

Indien $\sum_k t_k$ convergeert, dan convergeert $\sum_k a_k$ absoluut, en er geldt dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} t_k. \tag{3.7}$$

Bewijs We noteren de n-de partiële som van de reeks $\sum_{k\geq 0} t_k$ met T_n, en die van $\sum_{k\geq 0} |a_k|$ met B_n. Uit het gegeven volgt dat $B_n \leq C T_n$ voor alle n. Veronderstel dat de reeks $\sum_k t_k$ convergent is, dan is de rij (T_n) convergent, dus begrensd. Er is dus een $M > 0$ zo dat $T_n \leq M$. De rij (B_n) is dus begrensd door CM. Uit

$$B_{n+1} = B_n + |a_{n+1}| \geq B_n$$

volgt dat de rij (B_n) monotoon stijgend en naar boven begrensd is, dus convergent. We concluderen dat de reeks $\sum_k |a_k|$ convergent is. Voor alle $n \geq 0$ geldt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq C \sum_{k=0}^{n} t_k.$$

De ongelijkheid (3.7) volgt hieruit door limietovergang voor $n \to \infty$. □

3.3 Reeksen van functies

We zullen nu reeksen van functies behandelen op een manier waaruit de analogie met de voorgaande paragraaf blijkt. Zij V een niet-lege verzameling, en $(f_k)_{k\geq 0}$ een rij functies $V \to \mathbb{C}$. De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ vatten we op als notatie die aangeeft dat we de functies f_k willen sommeren. Voor $n \geq 0$ definiëren we de n-de partiële som van de reeks als de functie $F_n : V \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Voor iedere $x \in V$ is het complexe getal $F_n(x)$ dus de n-de partiële som van de complexe reeks $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$.

Definitie 3.27 De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ heet *puntsgewijs convergent* op V indien de rij (F_n) van partiële sommen puntsgewijs convergent is op V. In dat geval definiëren we de puntsgewijze som van de reeks als de puntsgewijze limiet van de rij (F_n) van partiële sommen. $\oslash$

Uit de eerder ingevoerde begrippen voor reeksen complexe getallen volgt dat de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ puntsgewijs convergent is dan en slechts dan als de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$ convergent is voor elke $x \in V$. Bovendien wordt in dat geval de puntsgewijze som gegeven door

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \; : \; x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

Ten aanzien van uniforme convergentie hebben we de volgende definitie.

Definitie 3.28 De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ heet *uniform convergent* op V indien de rij (F_n) van partiële sommen uniform convergent is op V. $\oslash$

Is de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent, dan weten in verband met Lemma 3.9 dat de reeks tevens puntsgewijs convergent is. De uniforme limiet van de rij (F_n) valt dus samen met de puntsgewijs gedefinieerde somfunctie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Wegens Lemma 3.23 volgt hieruit dat voor iedere $n \geq 0$ de reeks $\sum_{k\geq n} f_k$ puntsgewijs convergent is op V.

Lemma 3.29 *Zij $(f_k)_{k\geq 0}$ een rij functies $V \to \mathbb{C}$. Dan zijn de twee volgende uitspraken gelijkwaardig.*

(a) *De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ is uniform convergent op V.*

(b) *De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ is puntsgewijs convergent op V en er geldt dat*

$$\|\sum_{k=n}^{\infty} f_k\|_V \to 0, \qquad (n \to \infty).$$

Uit Stelling 3.15 leiden we het volgende af.

Stelling 3.30 (Continuïteit bij een uniform convergente reeks) *Laat V een metrische ruimte zijn, en $(f_k)_{k\geq 0}$ een rij continue functies $V \to \mathbb{C}$. Is de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent op V, dan is de somfunctie $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ continu op V.*

Bewijs Noteer de n-de partiële som met F_n en de somfunctie met F. Dan is iedere F_n een eindige som van continue functies, dus continu op V. Voorts geldt $F_n \to F$, uniform op V. Hieruit volgt met Stelling 3.15 dat de functie F continu is. $\square$

Lemma 3.31 *Indien de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent is op V, dan geldt $f_k \to 0$ uniform op V, voor $k \to \infty$.*

Bewijs Het bewijs is geheel analoog aan dat van Lemma 3.21. Zij F_n de n-de partiële som van de reeks. Veronderstel dat de reeks uniform convergeert met som F, dan geldt dat $F_n \to F$ uniform op V dus ook $\|F_{n-1} \to F\|_V \to 0$, voor $n \to \infty$. Aangezien

$$\|f_n\|_V = \|F_n - F_{n-1}\|_V \leq \|F_n - F\|_V + \|F - F_{n-1}\|_V$$

volgt hieruit dat $\|f_n\|_V \to 0$ voor $n \to \infty$. $\square$

Definitie 3.32 De reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ heet absoluut uniform convergent indien de reeks $\sum_{k\geq 0} \|f_k\|_V$ convergent is. $\oslash$

Lemma 3.33 *Zij $\sum_{k\geq 0} f_k$ absoluut uniform convergent. Dan is de reeks ook uniform convergent, en er geldt dat*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_V \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_V.$$

Opmerking 3.34 Is bovendien gegeven dat V een metrische ruimte is, en de functies $f_k : V \to \mathbb{C}$ continu, dan volgt door toepassing van Stelling 3.30 dat de somfunctie $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \;:\; V \to \mathbb{C}$ continu is. $\oslash$

Bewijs Het bewijs is gebaseerd op dezelfde idee als het bewijs van Lemma 3.25.

We beschouwen de partiële somfunctie:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$$

en de partiële som $B_n = \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_V \in [0, \infty[$. Er geldt voor alle $q \geq p$ dat

$$\|F_q - F_p\|_V = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} f_k \right\|_V \leq \sum_{k=p+1}^{q} \|f_k\|_V = |B_q - B_p|.$$

Veronderstel dat de reeks $\sum_{k\geq 0} f_k$ absoluut uniform convergent is. Dan is de rij (B_n) convergent in $\mathbb{R}$ dus een Cauchy-rij. Met de bovenstaande schatting zien we dat de rij (F_n) een uniforme Cauchy rij van functies $V \to \mathbb{C}$ is, dus convergent met limietfunctie F. Dus $\sum_{k=0}^{\infty} f_k = F$. Voor elke $n \geq 0$ geldt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} f_k \right\|_V \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_V$$

Hieruit volgt de gewenste schatting door limietovergang voor $n \to \infty$. $\square$

Tenslotte hebben we voor reeksen van functies ook een majorantiekenmerk.

Gevolg 3.35 (Uniforme majorantie van een reeks) *Veronderstel dat $C > 0$ en dat $t_n \in [0, \infty[$, voor $n \geq 0$, terwijl*

$$\|f_k\|_V \leq C t_k \qquad (k \geq 0). \tag{3.8}$$

Is de reeks $\sum_{k \geq 0} t_k$ convergent, dan is de reeks $\sum_{k \geq 0} f_k$ absoluut uniform convergent op V, en er geldt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_V \leq C \sum_{k=0}^{\infty} t_k.$$

Bewijs Dit volgt door combinatie van Lemma 3.26 met Lemma 3.33. □

Opmerking 3.36 We merken op dat de in (3.8) gegeven majorantie gelijkwaardig is met

$$\forall k \geq 0 \; \forall x \in V : \quad |f_k(x)| \leq C t_k.$$

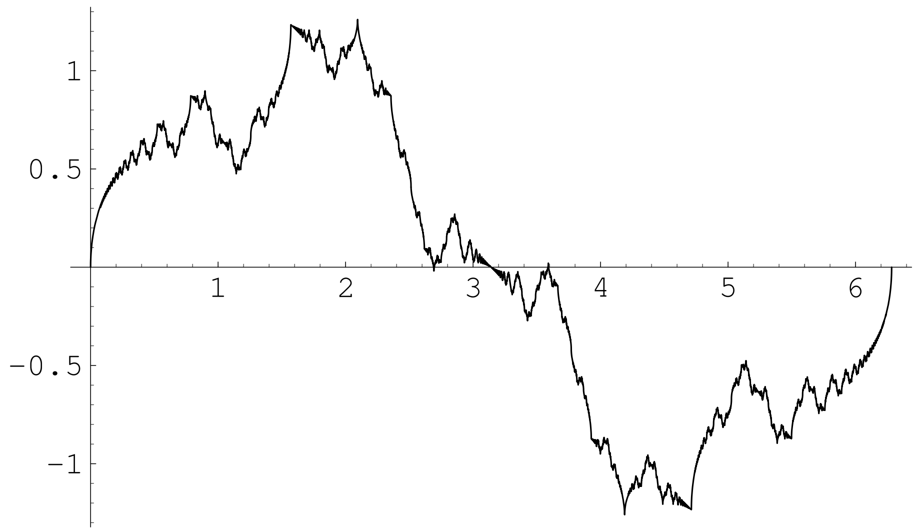
⊘

Opmerking 3.37 Is V een metrische ruimte, en zijn de functies f_k continu op V, dan volgt wegens Lemma 3.33 en Stelling 3.30 weer dat de somfunctie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ continu is. ⊘

Voorbeeld 3.38 De reeks

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \sin\left(k^2 x\right)$$

is absoluut uniform convergent.



De som van $k^{-2} \sin(k^2 x)$ over alle positieve gehele k.

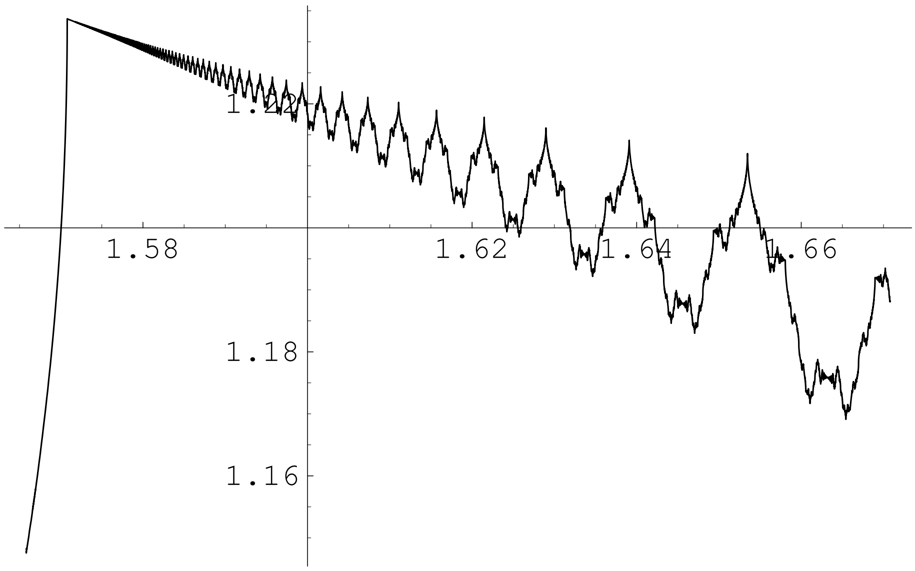
Bewijs: voor iedere k geldt dat

$$\left| \frac{1}{k^2} \sin\left(k^2 x\right) \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

en wegens Lemma 3.22 convergeert de reeks $\sum_{k\geq 1} k^{-2}$. De absolute uniforme convergentie volgt door toepassing van Gevolg 3.35, zie ook Opmerking 3.36.

Omdat bovendien voor iedere k de functie $x \mapsto k^{-2}\sin(k^2\, x)$ continu is, definieert de reeks een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zie ook Opmerking 3.37.

Het bovenstaande plaatje laat zien dat deze continue functie zich behoorlijk 'hakkelig' gedraaagt. Bij uitvergroten wordt de hakkeligheid niet minder en wordt de functie niet goed benaderd door een lineaire functie, zoals zou moeten gebeuren als de functie differentieerbaar zou zijn:



Uitvergroting van het vorige plaatje bij $x = \pi/2$.

Dat er iets mis is met de differentieerbaarheid van deze functie kan vermoed worden door de reeks te beschouwen die ontstaat door alle termen naar x te differentiëren:

$$\sum_{k\geq 1} \cos\left(k^2 x\right)$$

Deze reeks convergeert niet erg best: alle termen oscilleren voortdurend tussen -1 en 1 en voor $x = 0$ is de som gelijk aan plus oneindig. $\oslash$

4 Machtreeksen en complex differentieerbare functies

4.1 Machtreeksen

Zij $a \in \mathbb{C}$. Onder een *machtreeks rond het punt a* verstaan we een reeks van functies van $z \in \mathbb{C}$ van de vorm

$$\sum_{k \geq 0} c_k \, (z-a)^k; \tag{4.1}$$

hierbij zijn de $c_k \in \mathbb{C}$, voor $k \in \mathbb{N}$, gegeven coëfficiënten. Voor $n \in \mathbb{N}$ is de n-de partiële som van de machtreeks (4.1) gelijk aan de n-de graads veelterm functie

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, (z-a)^k.$$

Zoals gebruikelijk bedoelen we dat de 0-de orde term in deze notatie gelijk is aan de constante functie c_0. In het bijzonder is $s_0(z) = c_0, \ (z \in \mathbb{C})$.

De reeks is *convergent in het punt z* als de rij van partiële sommen $(s_n(z))$ convergeert voor $n \to \infty$. In dit geval noteren we de limiet limiet $s(z)$ met

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (z-a)^k.$$

Als de rij $(s_n(z))$ van partiële sommen niet convergeert, dan heet de reeks *divergent in het punt z*.

Een zeer belangrijke voorbeeld van een machtreeks, zowel uit theoretisch oogpunt alsook ten aanzien van allerlei praktische toepassingen, is de *meetkundige reeks*

$$\sum_{k \geq 0} z^k. \tag{4.2}$$

In de notatie (4.1 betekent dit dat $a = 0$ en dat $c_n = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 4.1 *De n-de partiële som van de meetkundige reeks (4.2) wordt gegeven door*

$$s_n(z) := \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \tag{4.3}$$

als $z \neq 1$, terwijl $s_n(1) = n + 1$.

Bewijs De laatste bewering is duidelijk. Voor de eerste merken we op dat

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k, \quad z s_n(z) = \sum_{k=1}^{n+1} z^k.$$

Trekken we deze uitdrukkingen van elkaar af, dan vinden we

$$(1 - z) s_n(z) = 1 - z^{n+1}.$$

Hieruit volgt het resultaat voor $z \neq 1$. □

Lemma 4.2 *De meetkundige reeks (4.2) convergeert voor* $|z| < 1$ *en divergeert voor* $|z| \geq 1$. *Voor* $|z| < 1$ *geldt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{4.4}$$

Bewijs Als $|z| < 1$, dan geldt dat

$$|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Hieruit volgt met de rekenregels voor limieten dat de rij van partiële sommen convergeert met limiet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Hieruit volgt de bewering over de convergentie, en de identiteit (4.4).

Als $|z| \geq 1$, dan geldt dat $|z^k| \geq 1$ voor alle $k \geq 0$. In het bijzonder convergeert z^k niet naar 0 voor $k \to \infty$. Wegens Lemma 3.21) convergeert de meetkundige reeks in dit geval niet. □

Een andere bron van machtreeksen is de uit het diktaat Inleiding Analyse bekende bekende *formule van Taylor* met rest. We herhalen het daar gegeven resultaat.

Stelling 4.3 (formule van Taylor) *Zij* $I \subset \mathbb{R}$ *een interval dat* 0 *bevat en* $f : I \to \mathbb{R}$ *een* $n+1$*-keer differentieerbare functie. Dan geldt voor elke* $x \in I$ *dat*

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x), \quad \text{waarin} \tag{4.5}$$

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \quad \text{en} \tag{4.6}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t\,x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \quad \text{voor een} \quad t \in \,]\,0\,,\,1\,[\,. \tag{4.7}$$

De veelterm p_n, gedefinieerd door (4.6) het n-de orde Taylor-polynoom van f rond 0. De functie R_n, gedefinieerd door (4.5) heet de *Taylor restterm* van de orde n. Tenslotte staat (4.7) bekend als de *formule van Lagrange* voor de restterm.

In eerste instantie wordt deze formule voor vaste n gebruikt om het gedrag van $f(x)$ te onderzoeken als x naar 0 gaat. Zij impliceert bijvoorbeeld dat $R_n(x)/x^n \to 0$ als $x \to 0$.

Veronderstel nu dat de functie f willekeurig vaak differentieerbaar is op I. Dan kunnen we, voor een vaste $x \in I$, ook het gedrag van de Taylor-veelterm $p_n(x)$ onderzoeken voor $n \to \infty$. Veronderstel bijvoorbeeld dat er $\rho_n > 0$ bestaan met de eigenschap dat voor iedere $0 < t < 1$ geldt dat

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(t\,x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| \leq \rho_n.$$

Dan is $|R_n(x)| \leq \rho_n$. Als bovendien geldt dat $\rho_l \to 0$ voor $n \to \infty$, dan concluderen we dat $R_n(x) \to 0$ voor $n \to \infty$. Hieruit volgt dat $p_n(x) \to f(x)$ als $n \to \infty$. Anders gezegd, in dit geval geldt dat

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k. \tag{4.8}$$

Voorbeeld 4.4 De zojuist beschreven methode leidt tot de convergentie van de volgende reeksen:

$$
\begin{aligned}
-\log(1-x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k, \qquad (|x|<1), && (4.9)\\
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \qquad (x \in \mathbb{R}), && (4.10)\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad (x \in \mathbb{R}), && (4.11)\\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad (x \in \mathbb{R}). && (4.12)
\end{aligned}
$$

Als voorbeeld behandelen we de reeks (4.10) voor de exponentiële functie. Voor $0 < t < 1$ geldt dat $0 < e^{t\,x} \leq e^x$ als $x \geq 0$ en $0 < e^{t\,x} \leq 1$ als $x \leq 0$. Dus in alle gevallen geldt $0 < e^{tx} \leq \max(1, e^x)$. Gebruik makend van de Lagrange fomule voor de restterm vinden we

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{tx}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \rho_n := \max(1, e^x)\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Uit $\rho_{n+1}/\rho_n = |x|/(n+2) \to 0$ voor $n \to \infty$, leiden we af dat $\rho_{n+1} \leq \frac{1}{2}\rho_n$ voor n voldoende groot. Hieruit concluderen we tenslotte dat $\rho_n \to 0$ voor $n \to \infty$. Hiermee is (4.10) aangetoond.

Voor de andere voorbeelden (4.9), (4.11) en (4.12) kan het bewijs van de convergentie op een soortgelijke manier gegeven worden. $\oslash$

In deze paragraaf onderzoeken we willekeurige machtreeksen van een complexe variabele. In het bijzonder onderzoeken we daarbij wat het convergentiegedrag is als we de reële variabele x in de bovenstaande reeksen vervangen door een complexe variabele z.

Laat $a \in \mathbb{C}$ en $r > 0$. In het vervolg zullen we de notatie

$$D(a; r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

gebruiken voor de open schijf (Engels: disk) met middelpunt a en straal r. Merk op dat de absolute waarde op $\mathbb{C}$ overeenkomt met de lengte op $\mathbb{R}^2$ (bij de gebruikelijke identificatie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x + iy$). Voor de verzameling $D(a; r)$ gezien als deel van de metrische ruimte $\mathbb{R}^2$ hebben we eerder de notatie $B(a; r)$ gebruikt.

Ook zullen we de notatie

$$\bar{D}(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$$

voor de gesloten schijf gebruiken. Het is handig de zojuist ingevoerde notatie als volgt uit te breiden naar $r = 0$ en $r = \infty$,

$$D(a; \infty) = \bar{D}(a; \infty) = \mathbb{C}, \quad \text{en} \quad \bar{D}(a; 0) = \{a\} \supset D(a; 0) = \emptyset. \tag{4.13}$$

Lemma 4.5 *Zij $r_0 > 0$ en zij $(c_n)_{n\geq 0}$ een rij complexe coëfficiënten zo dat de rij $|c_n| r_0^n$ begrensd is. Dan is de machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ absoluut uniform convergent op iedere gesloten schijf $\bar{D}(0; r)$, voor $0 \leq r < r_0$.*

Bewijs Er bestaat een $M > 0$ zo dat $|c_n| r_0^n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zij $0 \leq r < r_0$. Dan geldt voor alle $z \in \bar{D}(0; r)$ dat

$$|c_n z^n| = |c_n||z|^n \leq |c_n|\, r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n .$$

De meetkundige reeks $\sum_{n \geq 0} (r/r_0)^n$ is convergent. Met het majorantie kenmerk, Lemma 3.26, volgt nu dat $\sum c_n z^n$ absoluut uniform convergent is op $\bar{D}(0; r)$. □

Opmerking 4.6 Onder dezelfde voorwaarden zien we door substitutie van $w - a$ voor z dat de machtreeks

$$\sum_{n \geq 0} c_n \,(w - a)^n$$

absoluut uniform convergeert op de gesloten schijf $\bar{D}(a; r)$, voor iedere $0 \leq r < r_0$. Door een dergelijke substitutie steeds toe te passen zien we dat het voorlopig voldoende is de theorie van machtreeksen rond 0 te ontwikkelen. ⊘

Gevolg 4.7 *Veronderstel dat de machtreeks $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ convergeert voor $z = z_0$. Dan convergeert de machtreeks op de open schijf $D(0; |z_0|)$. De convergentie is absoluut uniform op iedere schijf $\bar{D}(0; r)$, voor $0 \leq r < |z_0|$.*

Bewijs Uit de convergentie volgt dat $|c_n||z_0|^n \to 0$, dus de rij $|c_n||z_0|^n$ is begrensd. Is $r < |z_0|$ dan convergeert de reeks absoluut uniform op $\bar{D}(0; r)$ wegens het voorgaande lemma. Zij $z \in D(0; |z_0|)$. Dan is er een positieve constante r zo dat $|z| < r < |z_0|$. De reeks convergeert absoluut uniform op de schijf $\bar{D}(0; r)$, die het punt z bevat. Hieruit volgt dat de reeks convergeert voor alle $z \in D(0; |z_0|)$. □

Voorbeeld 4.8 Passen we het bovenstaande toe op de reeksen in Voorbeeld 4.4, dan concluderen we dat de reeks voor de logarithme convergeert voor alle complexe $x \in D(0; 1)$, terwijl de overige drie reeksen convergeren voor alle complexe $x \in \mathbb{C}$. ⊘

Stelling 4.9 *Zij $\sum_n c_n z^n$ een complexe machtreeks (rond 0). Dan bestaat er een unieke $\rho \in [0, \infty]$ met de volgende eigenschappen*

(a) *de reeks $\sum_n c_n z^n$ convergeert op $D(0; \rho)$;*
(b) *de reeks $\sum_n c_n z^n$ divergeert op $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0; \rho)$.*

Bewijs We tonen eerst de uniciteit van ρ aan. Laat $\rho' \in [0, \infty]$ dezelfde eigenschap hebben. Veronderstel dat $\rho \neq \rho'$; we zullen laten zien dat dit leidt tot een tegenspraak. We veronderstellen dat $\rho < \rho'$, het geval $\rho' < \rho$ kan op vergelijkbare wijze aangepakt worden. Er bestaat een $z \in \mathbb{C}$ met $\rho < |z| < \rho'$. Uit eigenschap (a) voor ρ' volgt dat de reeks $\sum_n c_n z^n$ convergeert. Uit eigenschap (b) voor ρ volgt dat dezelfde reeks divergeert. Dit is een tegenspraak.

Om het bestaan van ρ te bewijzen zullen we laten zien dat

$$\rho = \sup \{ r \in [0, \infty[\, : |c_n| r^n \ \text{ begrensd} \, \}$$

voldoet aan (a) en aan (b). Zij $|z| < \rho$. Dan is er een $r > 0$ met $|z| < r < \rho$ en zo dat $|c_n|r^n$ begrensd is. Uit Lemma 4.5 volgt dat $\sum_n c_n z^n$ convergent is. Dus (a) geldt.

Om in te zien dat (b) geldt veronderstellen we dat $|z| > \rho$. Dan is $|c_n z^n| = |c_n||z|^n$ een onbegrende rij. In het bijzonder geldt niet dat $\lim_{n\to\infty} c_n z^n = 0$. Uit Lemma 3.21 volgt nu dat $\sum_n c_n z^n$ divergeert. □

Definitie 4.10 (Convergentiestraal) De unieke ρ uit de bovenstaande stelling heet de *convergentiestraal* van de machtreeks $\sum_n c_n z^n$. De bijbehorende cirkel rond 0 met straal ρ heet de *convergentiecirkel* van de machtreeks. ⊘

Er zijn geen algemene uitspraken te doen over convergentie of divergentie van de machtreeks op de convergentiecirkel. Voor een gegeven machtreeks is het onderzoek naar convergentie dan wel divergentie in punten van de convergentiecirkel een subtiel probleem waar wij verder niet op ingaan.

Voorbeeld 4.11 Uit Lemma 4.2 volgt dat de meetkundige reeks (4.2) convergentiestraal 1 heeft. ⊘

Voorbeeld 4.12 De eerste machtreeks in Voorbeeld 4.4 convergeert voor reële x met $|x| < 1$ en heeft daarom als complexe macht reeks convergentiestraal minstens 1. Omdat voor $x > 1$ geldt dat $x^k/k \to \infty$, is de reeks divergent voor dergelijke x. De convergentiestraal van de reeks (4.9) is daarom 1. De overige machtreeksen convergeren voor alle reële x en hebben daarom alle convergentiestraal ∞. ⊘

Stelling 4.13 *Zij $a \in \mathbb{C}$ en zij (c_n) een rij complexe coëfficiënten. Zij ρ de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_n c_n(z-a)^n$. Dan geldt het volgende.*

(a) *De machtreeks $\sum_n c_n(z-a)^n$ convergeert absoluut uniform op iedere gesloten schijf $\bar{D}(a;r)$ met $0 \le r < \rho$.*

(b) *Door*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n, \qquad (z \in D(a;\rho))$$

wordt een continue functie $D(a;\rho) \to \mathbb{C}$ gedefinieerd.

Bewijs Zij r als in (a). Dan is er een $z_0 \in D(a;\rho)$ zo dat $r < |z_0 - a| < \rho$. De machtreeks convergeert voor $z = z_0$. Met Gevolg 4.7 volgt dat de reeks absoluut uniform convergeert op de gesloten schijf $\bar{D}(a;r)$. Hiermee is (a) bewezen.

We bewijzen (b) door de continuïteit van f in een gegeven punt $z_0 \in D(a;\rho)$ aan te tonen. Er geldt $|z_0 - a| < \rho$, dus er is een positieve constante r zo dat $|z_0 - a| < r < \rho$. Uit (a) volgt dat de machtreeks absoluut uniform en dus ook uniform op $\bar{D}(a;r)$ convergeert. Hieruit volgt met Stelling 3.30 dat de functie f beperkt tot $\bar{D}(a;r)$ continu is. Hetzelfde geldt dus voor de beperking tot de open schijf $D(a;r)$, die z_0 bevat. We concluderen dat f continu is in het punt z_0. □

Voor de convergentiestraal van een machtreeks bestaat een formule die gebruik maakt van het begrip limsup van een rij $(a_n)_{n\ge 0}$ reële getallen. Indien de rij niet naar boven begrensd is, schrijven we

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Indien de rij (a_n) wel naar boven begrensd is schrijven we $s_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$. Dan is de rij $(s_n)_{n\geq 0}$ monotoon dalend. Indien hij naar onder begrensd is heeft deze rij een reële limiet. Als hij niet naar onder begrensd is dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$. In al deze gevallen schrijven we

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Lemma 4.14 *Zij $(a_n)_{n\geq 1}$ een rij in $\mathbb{R}$. Dan is er een deelrij $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ van (a_n) met*

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Opmerking 4.15 Hierbij laten we op een voor de hand liggende manier toe dat een rij limiet ∞ heeft. $\oslash$

Bewijs Schrijf $L = \limsup a_n$. Indien $L = \infty$, dan is de rij a_n niet naar boven begrensd, en het resultaat volgt gemakkelijk. Is $L = -\infty$, dan is de rij (a_n) niet naar onderen begrensd, en het resultaat volgt eveneens gemakkelijk.

Veronderstel daarom dat $-\infty < L < \infty$. Dan is L de limiet van de dalende rij $s_n = \sup_{k\geq n} a_k$. Zij $\epsilon > 0$, en $N \in \mathbb{N}$. Dan bestaat er een $n > N$ zo dat $L \leq s_n < L + \epsilon$. Er is een $k \geq n$ zo dat $a_k > s_n - \epsilon \geq L - \epsilon$. Hieruit volgt dat er een $k \geq N$ bestaat zo dat $L - \epsilon < a_k < L + \epsilon$. Hieruit blijkt dat L een limietpunt van de rij is. Het bestaan van de genoemde deelrij volgt hier uit. $\square$

Gevolg 4.16 *Zij (a_n) een convergente rij in $\mathbb{R}$. Dan is*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Bewijs Zij $L = \lim a_n$. Dan convergeert iedere deelrij van (a_n) met limiet L. Dus $\limsup a_n = L$. $\square$

Lemma 4.17 *Laat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij complexe getallen zijn, en schrijf*

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(a) *Als $L < 1$, dan is de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ absoluut convergent.*

(b) *Als $L > 1$, dan is de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergent.*

Bewijs Veronderstel eerst dat $L < 1$. Kies $L < r < 1$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\sup_{n\geq N} \sqrt[n]{|a_n|} < r$, dus $|a_n| < r^n$ voor alle $n \geq N$. De meetkundige reeks $\sum_n r^n$ is convergent, en met het majorantiekenmerk volgt dat de reeks $\sum a_n$ convergent is.

Veronderstel nu dat $L > 1$. Dan geldt voor iedere $N \in \mathbb{N}$ dat $\sup_{n\geq N} \sqrt[n]{|a_n|} \geq L > 1$, dus er bestaat een $n \geq N$ zo dat $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dus ook $|a_n| > 1$. Hieruit volgt dat (a_n) niet naar nul convergeert. Wegens Lemma 3.21 concluderen we dat de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergeert. $\square$

Stelling 4.18 *De convergentiestraal ρ van een complexe machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ wordt gegeven door*

$$\rho^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Bewijs We schrijven $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

(a) Is $|z| < L^{-1}$, dan is

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n z^n|} = \limsup |z| \sqrt[n]{|c_n|} = |z|L < 1,$$

dus de reeks $\sum c_n z^n$ convergeert.

(b) Is daarentegen $|z| > L^{-1}$, dan is

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z|L > 1,$$

dus de reeks $\sum c_n z^n$ divergeert.

Uit (a) en (b) volgt wegens definitie van convergentiestraal dat $\rho = L^{-1}$. □

Het volgende lemma is in veel gevallen voldoende om snel de convergentiestraal van een machtreeks te kunnen bepalen.

Lemma 4.19 *Zij a_n een rij positive reële getallen zo dat*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

met $L \in [0, \infty[$. Dan geldt ook dat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Bewijs Zie Opgave 4.9. □

Gevolg 4.20 *Zij $L \in [0, \infty]$ en laat $(c_n)_{n\geq 0}$ een rij complexe coëfficiënten zijn met*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L. \tag{4.14}$$

Dan wordt de convergentiestraal ρ van de machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ gegeven door $\rho = L^{-1}$.

Bewijs Wegens Lemma 4.19 geldt dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$. Wegens Gevolg 4.16 volgt hieruit dat $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = L$. Pas nu Stelling 4.18 toe. □

Voorbeeld 4.21 Met behulp van Gevolg 4.20 zien we wederom dat de machtreeksen (4.2) en (4.9) convergentiestraal gelijk aan 1 hebben, terwijl van (4.10), (4.11) en (4.12) de convergentiestraal gelijk is aan ∞. ⊘

Functies $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ die lokaal gegeven kunnen worden door een complexe machtreeks zijn zo belangrijk voor de analyse, dat zij een aparte naam hebben gekregen.

Definitie 4.22 Zij $V \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling en $f : V \to \mathbb{C}$ een functie. Als $a \in V$ dan heet de functie f *analytisch in het punt* a als er een complexe machtreeks $\sum c_n(z-a)^n$ bestaat, en een in V gelegen open schijf D met middelpunt a zo dat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-a)^n, \qquad (z \in D).$$

De functie f heet *complex analytisch* (of *holomorf*) in V als voor iedere $a \in V$ geldt dat f analytisch is in het punt a. $\oslash$

Voor een open deel $V \subset \mathbb{R}$ wordt op een soortgelijke manier het begrip reëel analytische functie $f : V \to \mathbb{C}$ gedefinieerd. In de definitie moet de schijf D dan vervangen worden door een in V gelegen open interval dat a bevat.

Voorbeeld 4.23 Zij $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = 1/(1-z)$. Zij $a \neq 1$. Dan is

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} \\ &= (1-a)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{1-a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^{-(n+1)}\,(z-a)^n. \end{aligned}$$

Hieraan zien we dat f analytisch is in het punt a. De machtreeks van f rond a convergeert voor $|z-a| < |1-a|$, dus heeft een convergentiestraal ρ die minstens gelijk is aan $|1-a|$. Uit

$$\limsup_{n\to\infty} |1-a|^{-(n+1)/n} = |1-a|^{-1}$$

blijkt dat ρ precies gelijk is aan $|1-a|$, dus aan de afstand van a tot het singuliere punt 1 van de functie f. $\oslash$

4.2 Complex differentieerbare functies

Voor functies $\mathbb{C} \supset\!\!\to \mathbb{C}$ bestaat een speciaal begrip van differentieerbaarheid.

Definitie 4.24 Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open verzameling, $f : U \to \mathbb{C}$ een functie en $a \in \mathbb{C}$. De functie f heet complex differentieerbaar in het punt a indien de limiet

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \tag{4.15}$$

bestaat. Is dit het geval heet de limiet de complexe afgeleide van f in het punt a, en wordt hij genoteerd met

$$f'(a) = \frac{df}{dz}(a).$$

De functie f heet complex differentieerbaar op U indien hij complex differentieerbaar is in ieder punt van U. $\oslash$

Deze definitie vertoont veel gelijkenis met de definitie van differentieerbaarheid voor functies $\mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. Het is dan ook niet verbazend dat bekende rekenregels zoals de somregel, productregel en quotiëntregel doorgaan voor dit nieuwe begrip van afgeleide. We leggen een en ander vast in een lemma, waarvan we het bewijs overlaten aan de lezer.

Lemma 4.25 *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open, $a \in U$ en $f, g : U \to \mathbb{C}$ een tweetal functies.*

(a) *Indien f complex differentieerbaar is in a dan is f continu in a.*

(b) *Indien f en g complex differentieerbaar zijn in het punt a, dan zijn $f + g$ en fg dat ook, terwijl*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Is bovendien $g(a) \neq 0$, dan is ook de quotiëntfunctie f/g complex differentieerbaar in a en er geldt

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Voorbeeld 4.26 Door herhaald toepassen van de productregel leiden we af dat de functie $z \mapsto z^n$ complex differentieerbaar is met afgeleide:

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}.$$

$\oslash$

Ook de karakterisering van differentieerbaarheid in termen van deelbaarheid kan in deze context bewezen worden.

Lemma 4.27 *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open, $a \in \mathbb{C}$ en $f : U \to \mathbb{C}$ een functie. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *De functie f is complex differentieerbaar in a.*

(b) *Er bestaat een functie $\varphi : U \to \mathbb{C}$, continu in a, zo dat*

$$f(z) - f(a) = \varphi(z)(z - a).$$

Indien (a) en (b) gelden, dan is $\varphi(a) = f'(a)$.

Het bewijs van deze stelling is in essentie identiek aan dat van de overeenkomstige stelling voor functies van een reële variabele (zie het diktaat Inleiding Analyse), met dien verstande dat overal $\mathbb{R}$ vervangen dient te worden door $\mathbb{C}$.

Uit het bovenstaande lemma volgt weer gemakkelijk de volgende *kettingregel.* Het bewijs is in essentie identiek aan het bewijs dat gegeven wordt in het dictaat Inleiding Analye.

Lemma 4.28 *Laat $U, V \subset \mathbb{C}$ open verzamelingen zijn, $f : U \to \mathbb{C}$ en $g : V \to \mathbb{C}$ functies met $f(U) \subset V$. Veronderstel dat f complex differentieerbaar is in a en g differentieerbaar in $f(a)$. Dan is de samenstelling $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ differentieerbaar in a, met afgeleide*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

In het vervolg veronderstellen we dat $U \subset \mathbb{C}$ open is, $f : U \to \mathbb{C}$ een functie, en $a \in U$ een gegeven punt. Aangezien $\mathbb{C}$ opgevat kan worden als $\mathbb{R}^2$ met de extra structuur van complexe vermenigvuldiging, kunnen we spreken over partiële differentieerbaarheid en totale differentieerbaarheid van f in a. Hieronder beschrijven we het verband met complexe differentieerbaarheid.

Lemma 4.29 *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open, $f : U \to \mathbb{C}$ en $a \in U$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is complex differentieerbaar in a.*

(b) *De functie $f : U \to \mathbb{C}$ is totaal differentieerbaar in a en de reëel lineaire afbeelding $Df(a) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is ook complex lineair, dwz voldoet aan*

$$Df(a)(iw) = iDf(a)(w)$$

voor alle $w \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Als (a) en (b) gelden dan wordt het verband tussen complexe en totale afgeleide gegeven door

$$Df(a)(w) = f'(a)w \qquad (w \in \mathbb{C}).$$

Bewijs Veronderstel eerst dat (a) geldt. Dan is er een $\varphi : U \to \mathbb{C}$ die voldoet aan de voorwaarden van Lemma 4.27. De afbeelding $w \mapsto \varphi(z)w$ is reëel lineair als afbeelding $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Hieruit volgt dat f tevens totaal differentieerbaar is in a, met totale afgeleide $Df(a) : w \mapsto \varphi(a)w = f'(a)w$.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt. Schrijf $\alpha = Df(a)(1)$. Dan geldt vanwege de complexe lineariteit dat $Df(a)(i) = iDf(a)(1) = i\alpha$, dus

$$Df(a)(u + iv) = u\alpha + vi\alpha = \alpha(u + iv)$$

voor alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Hieruit leiden we af dat

$$\left|\frac{f(z) - f(a) - \alpha(z - a)}{z - a}\right| = \frac{|f(z) - f(a) - Df(a)(z - a)|}{|z - a|} \to 0$$

voor $z \to a$. We concluderen dat

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - \alpha = 0$$

Dus f is complex differentieerbaar in a, met afgeleide $f'(a) = Df(a)(1)$.

De laatste bewering is in het bovenstaande eveneens bewezen. $\square$

In het vervolg noteren we de complexe variabele met z en schrijven we $x = \mathrm{Re}(z)$ en $y = \mathrm{Im}(z)$, zo dat $z = x + iy$. Een punt $z \in \mathbb{C}$ identificeren we met het punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Gevolg 4.30 *Veronderstel dat $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is in $a \in U$. Dan is f ook partieel differentieerbaar in a en er geldt dat*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a).$$

Bewijs Uit het voorgaande resultaat volgt dat f totaal differentieerbaar is in a. Dus f is partieel differentieerbaar in a, met partiële afgeleiden:

$$D_1f(a) = Df(a)(1,0) = Df(a)(1) = f'(a)\cdot 1 = f'(a)$$

en

$$D_2f(a) = Df(a)(0,1) = Df(a)(i) = iDf(a)(1) = if'(a).$$

Gebruik nu dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = D_1f(a) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = D_2f(a).$$

□

Opmerking 4.31 Is $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar in a, dan geldt wegens het bovenstaande dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a). \tag{4.16}$$

Ontbinden we f in reëel en imaginair deel, $f = f_1 + if_2$, dan geldt dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(a), \quad \text{en} \quad \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = -i\frac{\partial f_1}{\partial y}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a)$$

We kunnen derhalve de vergelijking (4.16) componentsgewijs herschrijven als

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(a), \quad \text{en} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(a).$$

Deze vergelijkingen staan bekend als de *Cauchy-Riemann vergelijkingen.*

⊘

Lemma 4.32 *Laat $f : U \to \mathbb{C}$ een functie zijn, $U \subset \mathbb{C}$ open. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *f is complex differentieerbaar op U en f' is continu op U;*

(b) *f is partieel differentieerbaar op U, en de partiële afgeleiden D_1f en D_2f zijn continu en voldoen aan de Cauchy–Riemann vergelijkingen.*

Bewijs De implicatie '$(a) \Rightarrow (b)$' is in het bovenstaande reeds bewezen.

Veronderstel nu (b). Dan is f totaal differentieerbaar op U en voor de totale afgeleide Df geldt dat

$$Df(z)(i) = Df(z)(0,1) = D_2f(z) = iD_1f(z) = iDf(z)(1).$$

Combineren we dit met de lineariteit van $Df(z)$ over $\mathbb{R}$, dan zien we dat

$$Df(z)(u+iv) = uDf(z)(1) + vDf(z)(i) = (u+iv)Df(z)(1).$$

Hieruit volgt de complexe lineariteit van $Df(z)$ voor elke $z \in U$. Met Lemma 4.29 volgt nu dat (a) geldt. □

4.3 Differentieerbaarheid van machtreeksen

Een functie gedefinieerd door een machtreeks, kan gedifferentieerd worden door de machtreeks term voor term te differentiëren. De volgende twee lemmas dienen als voorbereiding op dit resultaat.

Lemma 4.33 *De machtreeks* $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ *heeft convergentiestraal* 1.

Bewijs Er geldt dat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1+1/n}=1.$$

Hieruit volgt met Gevolg 4.20 dat de convergentiestraal van de machtreeks gelijk is aan 1. □

Lemma 4.34 *Zij* ρ *de convergentiestraal van de machtreeks* $\sum_{n\geq 0}c_nz^n$. *Dan heeft de machtreeks*

$$\sum_{n\geq 1}nc_nz^{n-1} \tag{4.17}$$

die hieruit door termsgewijze differentiatie ontstaat ook convergentiestraal ρ.

Bewijs Stel dat $|z|<\rho$. Kies een willekeurig reëel getal r zo dat $|z|<r<\rho$. Uit de convergentie van $\sum_{n\geq 0}c_nr^n$ volgt dat $\lim_{n\to\infty}c_nr^n=0$, dus er bestaat een $M>0$ zo dat voor alle n geldt $|c_nr^n|\leq M$, ofwel

$$|c_n|\leq\frac{M}{r^n},$$

dus

$$|nc_nz^{n-1}|\leq n\frac{M}{r}\left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}.$$

Volgens Lemma 4.33 heeft de reeks $\sum nw^{n-1}$ convergentiestraal 1. Met het majorantiecriterium zien we nu dat de reeks (4.17) convergeert voor $|z|<r$. Dit geldt voor iedere $r<\rho$, dus de reeks (4.17) heeft convergentiestraal minstens ρ. De convergentiestraal kan echter niet groter dan ρ zijn. Want in dat geval zou er een z met $|z|>\rho$ bestaan waarvoor de reeks (4.17) absoluut convergeert. Wegens

$$|c_nz^n|\leq|nc_nz^{n-1}|$$

voor $n\geq|z|$ zou daaruit door toepassing van het majorantiekenmerk de absolute convergentie van de reeks $\sum_{n\geq 0}c_nz^n$ volgen, tegenspraak. □

Stelling 4.35 *Laat de machtreeks* $\sum_{n\geq 0}c_nz^n$ *convergentiestraal* $\rho>0$ *hebben. Dan is de functie* $f:D(0;\rho)\to\mathbb{C}$, *gedefinieerd door*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

complex differentieerbaar, met afgeleide gegeven door

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nz^{n-1}\quad(|z|<\rho).$$

Bewijs Fixeer z_0 met $|z_0| < \rho$; kies r zo dat $|z_0| < r < \rho$. We definiëren een rij functies $(g_n)_{n\geq 1}$ op de gesloten schijf $\bar{D}(0;r)$ door:

$$g_n(w) = c_n \frac{w^n - z_0^n}{w - z_0} \tag{4.18}$$

als $w \neq z_0$, en door $g_n(z_0) = nc_n z_0^{n-1}$. Zij voorts g_0 de constante functie 0. Dan is elke functie g_n continu in z_0. Verder is voor elke w met $|w| \leq r$:

$$|g_n(w)| = |c_n(w^{n-1} + w^{n-2}z_0 + ... + z_0^{n-1})| \leq n|c_n|r^{n-1}.$$

Uit het uniforme majorantiekenmerk gecombineerd met Lemma 4.34 volgt nu dat de reeks $\sum_{n\geq 0} g_n$ uniform convergeert op $|w| \leq r$. De somfunctie is derhalve continu in z_0, dus

$$\lim_{w\to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} = \lim_{w\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z_0).$$

Hieruit volgt dat f complex differentieerbaar is in z_0, met de gewenste afgeleide. □

Door herhaald toepassen van de bovenstaande stelling volgt direkt:

Gevolg 4.36 *Een machtreeks stelt binnen zijn convergentiecirkel een willekeurig vaak complex differentieerbare functie voor. Heeft $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ convergentiestraal $\rho > 0$ en is*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n, \qquad (|z| < \rho),$$

dan is $f^{(n)}(0) = n!c_n$.

Gevolg 4.37 *Zij $r > 0$ en veronderstel dat de complexe machtreeksen $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ en $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ convergent zijn op $D(0;r)$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *$a_n = b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$;*

(b) *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ voor alle $z \in D(0;r)$.*

Bewijs De implicatie '$(a) \Rightarrow (b)$' is evident. De andere implicatie is een direct gevolg van Gevolg 4.36. □

We kunnen Stelling 4.35 gebruiken om de *complexe e-macht* in te voeren.

Stelling 4.38 *Er is een unieke complex differentieerbare functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ met $f' = f$ en $f(0) = 1$. Deze functie voldoet aan*

$$f(z + w) = f(z)f(w), \qquad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{4.19}$$

en wordt gegeven door

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{4.20}$$

Bewijs Schrijf $c_n = 1/n!$. Dan geldt dat

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Met Gevolg 4.20 volgt hieruit dat de reeks (4.20) convergentiestraal ∞ heeft, dus convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$. Met Lemma 4.34 volgt hieruit weer dat f complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$, met afgeleide $f' = f$. Het is evident dat $f(0) = 1$, dus het bestaan van f is aangetoond.

We gaan nu de uniciteit van f en tegelijkertijd (4.19) aantonen. De functie $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$\varphi(z) := f(z)f(-z)$$

is complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$, met afgeleide gelijk aan:

$$\varphi'(z) = f'(z)f(-z) - f(z)f'(-z) = 0$$

(gebruik produkt en kettingregel). Wegens Gevolg 4.30 volgt hieruit dat $D_1\varphi = D_2\varphi = 0$, dus φ is constant op $\mathbb{C}$. Door $z = 0$ te substitueren vinden we dat $\varphi = 1$, dus $f(z)f(-z) = 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Hieruit concluderen we dat $f(z) \neq 0$ voor alle z en

$$f(z)^{-1} = f(-z).$$

Laat $w \in \mathbb{C}$ willekeurig, maar vast zijn. Laat $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar zijn en voldoen aan $g' = g$ en $g(0) = 1$. Dan is de functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$h(z) := f(z)^{-1}g(z + w)$$

complex differentieerbaar, met afgeleide

$$\begin{aligned} h'(z) &= -f(z)^{-2}f'(z)g(z+w) + f(z)^{-1}g'(z+w) \\ &= -f(z)^{-1}g(z+w) + f(z)^{-1}g(z+w) = 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat h constant is en gelijk aan $h(0) = g(w)$. We concluderen dat $g(z + w) = f(z)g(w)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Deze conclusie geldt voor iedere w, dus ook voor $w = 0$, en we zien dat $g = f$. Dus f is uniek, en tevens geldt (4.19). $\square$

Op grond van de bovenstaande stelling definiëren we de complexe e-macht door

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Voor $z \in \mathbb{R}$ komt deze definitie overeen met de vroeger gegeven definitie. Wegens bovenstaande stelling geldt dat

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z \qquad \text{op } \mathbb{C}.$$

Tevens gelden de volgende eigenschappen:

(a) $e^0 = 1$;

(b) $e^z e^{-z} = 1$;

(c) $e^{z+w} = e^z e^w$;

voor alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Over imaginaire e-machten merken we nog het volgende op.

Lemma 4.39 *Voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt $|e^{it}| = 1$. Bovendien is de functie $t \mapsto e^{it}, \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differentieerbaar, met afgeleide*

$$\frac{d}{dt} e^{it} = i e^{it}. \tag{4.21}$$

Bewijs Voor een complex getal $z = x + iy$ is de complex geconjugeerde gedefinieerd door $\bar{z} = x - iy$. We merken op dat de afbeelding $z \mapsto \bar{z}, \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continu is, en dat $z\bar{z} = |z|^2$ en

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \text{en} \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w},$$

voor alle $z, w \in \mathbb{C}$. Schrijf $s_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n/n!$. Dan is

$$\overline{s_N(z)} = s_N(\bar{z}).$$

Door de limiet voor $N \to \infty$ te nemen vinden we hieruit dat

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

In het bijzonder volgt hieruit dat

$$|e^{it}|^2 = \overline{e^{it}} e^{it} = e^{-it} e^{it} = 1, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Uit $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ volgt met behulp van de Cauchy-Riemann vergelijkingen dat

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} e^{x+iy} = e^{x+iy}.$$

Door hierin $x = 0$ te nemen vinden we (4.21). □

De kromme $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$ ligt wegens het bovenstaande lemma op de eenheidscirkel in het complexe vlak. De snelheidsvector in t wordt gegeven door

$$c'(t) = ic(t) = i(c_1(t) + ic_2(t)) = -c_2(t) + ic_1(t)$$

en wordt dus verkregen door op $c(t)$ de rotatie over hoek $\frac{\pi}{2}$ toe te passen. In het bijzonder heeft de snelheid grootte $|c'(t)| = |c(t)| = 1$. Aangezien $c(0) = e^0 = 1$, zien we dat e^{it} het punt op de eenheidscirkel is dat ontstaat door vanuit het punt $(1, 0)$ in positieve richting een afstand t over de eenheidscirkel af te leggen. We zijn nu gemotiveerd voor de volgende definitie.

Definitie 4.40 De functies $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ worden gedefinieerd door

$$\cos y = \mathrm{Re}(e^{iy}), \qquad \sin y = \mathrm{Im}(e^{iy}),$$

voor $y \in \mathbb{R}$. ⊘

Uit $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ en de bovenstaande definitie volgt de bekende *formule van Euler*, namelijk

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Tenslotte volgt uit de machtreeksontwikkeling voor de e-macht dat

$$e^{iy} = \sum_{n=0} i^n \frac{y^n}{n!}.$$

Door reëel en imaginair deel te nemen vinden we dat

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(i^{2k}) \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

en

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}(i^{2k+1}) \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Dit zijn de bekende Taylorreeksontwikkelingen voor sinus en cosinus.

Laat in het vervolg V een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn en $f : V \to \mathbb{C}$ een analytische functie. Volgens Definitie 4.22 betekent dit dat er voor elk punt $a \in V$ een in V gelegen open cirkelschijf D met middelpunt a bestaat zo dat f op D gegeven wordt door een machtreeks:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n \tag{4.22}$$

met $c_n \in \mathbb{C}$.

Wegens Stelling 4.35 en Gevolg 4.36 is de analytische $f : V \to \mathbb{C}$ willekeurig vaak complex differentieerbaar, en zijn de afgeleide functies $f^{(n)}$ weer analytisch. Verder moeten de coëfficiënten in (4.22) wegens Gevolg 4.36 gelijk zijn aan

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{4.23}$$

Derhalve is de machtreeksontwikkeling overal uniek bepaald door de functie.

Een belangrijk resultaat is de volgende stelling, die in schril contrast staat met de situatie voor differentieerbare functies van één reële variabele.

Stelling 4.41 *Zij $V \subset \mathbb{C}$ open, en $f : V \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar. Dan is f analytisch op V. In het bijzonder is f willekeurig vaak complex differentieerbaar op V.*

Voor het bewijs van deze bijzondere stelling, dat berust op een toepassing van de stelling van Cauchy voor gesloten lijn-integralen, verwijzen we naar de niveau 3 cursus Complexe Functies.

5 Fourier-reeksen

5.1 Integratie van complexwaardige en vectorwaardige functies

In deze paragraaf zullen we de integratie van vectorwaardige functies bespreken. Aangezien $\mathbb{C}$ opgevat kan worden als $\mathbb{R}^2$, met als extra structuur de complexe vermenigvuldiging, valt hieronder ook de integratie van complexwaardige functies. We starten met de theorie voor continue functies, waarvoor Riemann-integreerbaarheid gegarandeerd is.

Lemma 5.1 *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een continue functie. Dan is er precies één vector $I(f) \in \mathbb{R}^n$ met de eigenschap dat*

$$\langle I(f), v \rangle = \int_a^b \langle f(x), v \rangle \, dx,$$

voor alle $v \in \mathbb{R}^n$. In het bijzonder geldt voor iedere $1 \leq j \leq n$ dat

$$I(f)_j = \int_a^b f_j(x) \, dx \tag{5.1}$$

met $f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ de j-de component van de functie f.

Bewijs We merken op dat voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ de functie $f_v : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ continu, dus Riemann-integreerbaar is.

Door voor v achtereenvolgens de vectoren uit de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ te nemen, zien we dat $I(f)$ gegeven moet zijn door (5.1). Laat $I(f)$ door die formule gegeven zijn. Zij $v \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Dan is

$$\langle I(f), v \rangle = \sum_{j=1}^n v_j I(f)_j = \sum_{j=1}^n v_j \int_a^b f_j(x) \, dx = \int_a^b \sum_{j=1}^n v_j f_j(x) \, dx = \int_a^b f_v(x) \, dx.$$

$\square$

Definitie 5.2 Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een continue functie zijn. We definiëren de *vectorwaardige integraal* van f over $[a,b]$ als de unieke vector $I(f) \in \mathbb{R}^n$ uit Lemma 5.1, en noteren deze met

$$\int_a^b f(x) \, dx := I(f).$$

$\oslash$

Voor vectorwaardige integratie geldt de volgende *driehoeksongelijkheid.*

Lemma 5.3 *Zij $a, b \in \mathbb{R}$, met $a < b$. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continu. Dan is de functie $\|f\| : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ continu, dus Riemann-integreerbaar over $[a,b]$, en*

$$\left\| \int_a^b f(x) \, dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| \, dx.$$

Bewijs Schrijf $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Er bestaat een $v \in \mathbb{R}^n$ met $\|v\| = 1$, zo dat $\langle I(f), v\rangle = \|I(f)\|$. (Als $I(f) \neq 0$, dan kunnen we $v = I(f)/\|I(f)\|$ nemen.) Nu geldt

$$\begin{aligned}
\|I(f)\| = \langle I(f), v\rangle &= \int_a^b \langle f(x), v\rangle\,dx \\
&\leq \int_a^b |\langle f(x), v\rangle|\,dx \\
&\leq \int_a^b \|f(x)\|\|v\|\,dx \\
&= \int_a^b \|f(x)\|\,dx.
\end{aligned}$$

□

Gevolg 5.4 *Voor een continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ geldt dat*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Ook is $|f|$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Tenslotte eindigen we met de *fundamentaalstelling* voor vectorwaardige integratie.

Lemma 5.5 *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een continue functie, en zij $F : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een primitieve van f, dwz. een differentieerbare functie met $F' = f$. Dan geldt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.2}$$

Bewijs Dit komt omdat zowel integratie als differentiatie componentsgewijs uitgevoerd kunnen worden. Preciezer, schrijf $f = (f_1, \ldots, f_n)$ en $F = (F_1, \ldots, F_n)$. Dan geldt dat $F_j' = f_j$ voor elke $1 \leq j \leq n$. Dus geldt

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)_j = \int_a^b f_j(x)\,dx = F_j(b) - F_j(a) = (F(b) - F(a))_j.$$

De identiteit (5.2) geldt dus componentsgewijs. □

Voorbeeld 5.6 We beschouwen de functie $\epsilon_k : x \mapsto e^{ikx}$, voor $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dan is de functie $F(x) = (1/ik)\epsilon_k$ een primitieve van ϵ_k. Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dus:

$$\int_a^b e^{ikx}\,dx = \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}.$$

In het bijzonder is de integraal over $[-\pi, \pi]$ gelijk aan nul. ⊘

Ook voor complexwaardige (vectorwaardige) functies bestaat een zinvol algemeen begrip van Riemann-integreerbaarheid, zonder dat daarbij continuïteit van de integrand verlangd wordt. Voor details verwijzen we naar Appendix A.

5.2 Motivatie en elementaire theorie van Fourier-coëfficiënten

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt *periodiek* met periode 2π genoemd indien

$$f(x + 2\pi) = f(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

We merken op dat voor dergelijke functies f geldt dat

$$f(x + 2k\pi) = f(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Definiëren we op $\mathbb{R}$ de equivalentie-relatie $\sim$ door $x \sim y :\iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$, dan worden de equivalentieklassen voor $\sim$ gegeven door $[x] = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ is periodiek met periode 2π dan en slechts dan als f constant is op deze equivalentieklassen, maw, als f gezien kan worden als complexwaardige functies op $\mathbb{R}/\sim$.

We noteren met $\mathcal{F}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die constant zijn op deze equivalentieklassen, dus periodiek zijn met periode 2π. Voorts definiëren we de *ruimte van continue 2π-periodieke functies* door

$$C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) := C(\mathbb{R}) \cap F(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

De ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van de puntsgewijze optelling en complexe scalar vermenigvuldiging is complex lineair.

Uit het college Lineaire Algebra brengen we de volgende definitie van Hermite's inproduct in herinnering.

Definitie 5.7 Zij E een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$. Een *Hermite's inproduct op E* is een afbeelding

$$(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle : E \times E \to \mathbb{C},$$

met de volgende eigenschappen.

(a) Voor iedere $g \in E$ is $f \mapsto \langle f, g\rangle$ complex-lineair van E naar $\mathbb{C}$.

(b) Voor iedere $f, g \in E$ geldt dat $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$.

(c) Als $f \in E$ en $f \neq 0$, dan is $\langle f, f\rangle > 0$.

$\oslash$

Merk op dat uit (a) volgt dat $\langle 0, g\rangle = 0$, dus in het bijzonder is $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Eigenschap (c) laat het toe om te definiëren

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} \geq 0, \quad f \in E, \tag{5.3}$$

dit getal heet de *norm* van f met betrekking tot het Hermite'se inproduct.

Veronderstel nu dat E een eindig dimensionale complex lineaire ruimte is met daarop een Hermite's inproduct $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. We veronderstellen dat E opgespannen wordt door een orthonormaal systeem $e_1, \ldots, e_n$ van E. Dat laatste betekent dat

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Hierin is het Kronecker symbool δ_{ij} gedefinieerd door $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$ en door $\delta_{ii} = 1$.

Ter motivatie van de definitie van Fourier-coefficiënten brengen we het volgende bekende lemma in herinnering.

Lemma 5.8 *Laat, in de bovenstaande situatie een element $f \in E$ gegeven zijn. Dan zijn er unieke coëfficiënten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ zo dat $f = \sum_{j=1}^n c_j e_j$. De coëfficiënten worden gegeven door*

$$c_k = \langle f, e_k \rangle, \quad (1 \leq k \leq n).$$

In het bijzonder vormen de e_j een basis van E.

Bewijs Het bestaan van de coëfficiënten volgt uit het feit dat de e_j de ruimte E opspannen. Is $f = \sum_j c_j e_j$, dan is

$$\langle f, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n \langle c e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \langle e_j, e_k \rangle = c_k.$$

Hieruit volgt de uniciteit van de coëfficiënten. □

We keren terug naar de ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ van continue functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek zijn met periode 2π. Op deze ruimte definiëren we het *integraal-inproduct* door

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx, \qquad (f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})). \tag{5.4}$$

Merk op dat de integrand in deze definitie een complexwaardige continue functie is van een reële variabele. De integraal van een dergelijke functie is gedefinieerd in de vorige paragraaf.

Lemma 5.9 *Het integraal-inproduct (5.4) is een Hermite's inproduct op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.*

Bewijs Alle eigenschappen van Definitie 5.7 zijn gemakkelijk aan te tonen, behalve wellicht eigenschap (c). Die eigenschap tonen we als volgt aan.

Stel dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ niet de nul-functie is. Dan is de beperking van f tot $]-\pi, \pi[$ niet identiek gelijk aan nul. Er is dus een $x_0 \in \mathbb{R}$ met $-\pi < x_0 < \pi$ en $f(x_0) \neq 0$. De functie $x \mapsto f(x)\overline{f}(x)$ is gelijk aan $x \mapsto |f(x)|^2$, dus reëel-waardig, niet-negatief, en strikt positief in x_0. Uit de continuïteit van de functie volgt het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat $-\pi < x_0 - \delta < x_0 + \delta < \pi$ en zo dat $||f(x)|^2 - |f(x_0)|^2| < \frac{1}{2}|f(x_0)|^2$ voor alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Voor al dergelijke x geldt $|f(x)|^2 > \frac{1}{2}|f(x_0)|^2$. Hieruit leiden we af dat

$$\begin{aligned} 2\pi\langle f, f \rangle &= \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |f(x)|^2\, dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^2\, dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2}|f(x_0)|^2\, dx \\ &= \delta |f(x_0)|^2 > 0. \end{aligned}$$

Hiermee is eigenschap (c) van Definitie 6.23 aangetoond. □

Opmerking 5.10 We merken op dat voor $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en voor iedere $a \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)\, dx.$$

Dit is als volgt in te zien. Door gebruik te maken van de 2π-periodiciteit van f vinden we door substitutie van variabelen dat

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{a} f(x+2\pi)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx - \int_{\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx + \int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

In het bijzonder volgt hieruit dat het integraal-inproduct van twee functies $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ herschreven kan worden als

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

$\oslash$

Voor $k \in \mathbb{Z}$ definiëren we de functie $\epsilon_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$\epsilon_k(x) = e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{5.5}$$

Het is duidelijk dat de functie ϵ_k continu is en 2π periodiek, dus tot $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ behoort. Is $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan volgt direct uit de definitie van het integraal-inproduct dat

$$\langle f, \epsilon_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e^{ikx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx. \tag{5.6}$$

Lemma 5.11 *De functies $(\epsilon_n \mid n \in \mathbb{Z})$ vormen een orthonormaal systeem, dwz, voor alle $m, n \in \mathbb{Z}$ geldt*

$$\langle \epsilon_m, \epsilon_n\rangle = \delta_{mn}.$$

Hierbij hebben we een voor de hand liggende uitbreiding van de Kronecker delta gebruikt: $\delta_{mm} = 1$ en $\delta_{mn} = 0$ voor alle $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$.

Bewijs Voor alle $m, n \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\langle \epsilon_m, \epsilon_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx.$$

Uit Voorbeeld 5.6 volgt dat de derde integraal nul is voor $m \neq n$. Is $m = n$, dan is het duidelijk dat de integraal gelijk is aan 1. $\square$

Definitie 5.12 Onder een *Fourier-polynoom* zullen we in deze paragraaf een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ verstaan, die geschreven kan worden als eindige lineaire combinatie van de functies ϵ_k, met $k \in \mathbb{Z}$. Met andere woorden, er bestaan een $N \in \mathbb{N}$ en coëfficiënten $c_n \in \mathbb{C}$, $-N \leq n \leq N$ zo dat

$$f = \sum_{n=-N}^{N} c_n\epsilon_n. \tag{5.7}$$

De verzameling van dergelijke Fourier-polynomen wordt genoteerd met $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. $\oslash$

Merk op dat $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ een lineaire deelruimte is van de complex lineaire ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Lemma 5.13 *Zij f een Fourier-polynoom. Indien (5.7) geldt, dan worden de coefficienten c_n gegeven door*

$$c_n = \langle f, \epsilon_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx. \tag{5.8}$$

Voor $|n| > N$ geldt dat $\langle f, \epsilon_n \rangle = 0$.

Bewijs Zij E de eindig dimensionale complex lineaire ruimte van Fourier-polynomen van de vorm (5.7), voorzien van het integraalinproduct. Dan vormen de ϵ_j voor $|j| \leq N$ een orthonormaal systeem dat E opspant. Pas nu Lemma 5.8 toe. $\square$

5.3 Elementaire theorie van Fourier-reeksen

We zullen nu onderzoeken onder welke omstandigheden een 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ voorgesteld kan worden door een oneindige reeks functies van de vorm

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \epsilon_k. \tag{5.9}$$

Daarbij zouden we naar analogie met de situatie van een eindig dimensionale ruimte met Hermite's inproduct kunnen vermoeden dat de coëfficiënten gegeven worden door de formule (5.8). Het precieze antwoord op deze vragen zal subtiel blijken te zijn.

Reeksen van de vorm (5.9) zijn genoemd naar de Franse wiskundige J. Fourier (1768-1830), die ze introduceerde in zijn theorie over warmte (artikelen vanaf 1807, boek *Théorie de la Chaleur* uit 1822).

Definitie 5.14 Een *Fourier-reeks* is een reeks van functies van de vorm

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k\, e^{ikx} \;=\; a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \,\cos kx + \sum_{k \geq 1} b_k \,\sin kx \tag{5.10}$$

waarin de *coëfficienten* a_k, $k \geq 0$ en b_k, $k \geq 1$, resp. c_k, $k \in \mathbb{Z}$, complexe getallen zijn, en waarbij x een reële variabele is. $\oslash$

De identiteit tussen de twee gedaanten in (5.10) berust op de formule van Euler, waaruit volgt dat voor elke $k \in \mathbb{Z}$ geldt

$$e^{ikx} = \cos kx + i \,\sin kx, \quad \text{en} \quad e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx. \tag{5.11}$$

Hieruit volgt gemakkelijk dat de a_k en b_k in termen van de c_k uitgedrukt kunnen worden door

$$a_0 = c_0 \quad \text{en, voor } k \geq 1, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i\,(c_k - c_{-k})\,. \tag{5.12}$$

Uit dit laatste verband volgt dat de c_k in termen van de a_k en b_k gegeven worden door

$$c_0 = a_0 \quad \text{en, voor } k \geq 1, \quad c_k = \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}\,(a_k + ib_k)\,, \tag{5.13}$$

terwijl omgekeerd de a_k, b_k in termen van de c_k gegeven worden door (5.12).

Men spreekt van een *reëelwaardige Fourier-reeks* als de coëfficienten a_0, a_k en b_k allen reële getallen zijn. Met het oog op (5.13) is dit equivalent met de voorwaarde dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat c_k gelijk is aan de complex geconjugeerde $\overline{c_{-k}}$ van c_{-k}. Merk op dat dit impliceert dat c_0 reëel is. In het geval van een reëelwaardige Fourier-reeks noemt men de uitdrukking rechts van het gelijkteken in (5.10) de *reële gedaante* van de Fourier-reeks. Omdat, zelfs als de Fourier-reeks reëelwaardig is, de termen $c_k\, e^{ikx}$ met $c_k \neq 0$, $k \neq 0$ geen reëelwaardige functies van $x \in \mathbb{R}$ zijn, heet de uitdrukking links van het gelijkteken in (5.10) de *complexe gedaante* van de Fourier-reeks.

Men noemt de Fourier-reeks (5.10) voor een gegeven $x \in \mathbb{R}$ *symmetrisch convergent* als de rij van partiële sommen

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\, \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k\, \sin kx \tag{5.14}$$

convergent is voor $n \to \infty$. De limiet $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ heet dan de som van de Fourier reeks. Uit het hierboven genoemde verband tussen a_k, b_k en c_k is gemakkelijk af te leiden dat (5.14) gelijk is aan de symmetrische partiële som van de complexe gedaante van de Fourier-reeks

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}. \tag{5.15}$$

In Paragraaf 5.6 zullen we op deze vorm van convergentie terugkomen.

In het vervolg werken we voornamelijk met de complexe gedaante van de Fourier-reeks omdat die gemakkelijker te hanteren is. We gebruiken daarbij de volgende sterkere eis van (puntsgewijze) convergentie.

Definitie 5.15 De Fourier-reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ heet *puntsgewijs convergent* op een deelverzameling S van $\mathbb{R}$ indien voor elke $x \in S$ de beide reeksen

$$\sum_{k\geq 1} c_{-k} e^{-ikx} \quad \text{en} \quad \sum_{k\geq 0} c_k e^{ikx} \tag{5.16}$$

convergent zijn. Is dit het geval, dan noteert men de som van de reeks als

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikx} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad (s \in S).$$

$\oslash$

In geval de complexe Fourier-reeks convergent is in het punt $x \in \mathbb{R}$, dan is de rij van symmetrische partiële sommen (5.15) dat zeker. Voor de limiet schrijven we in dat geval

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, \sin kx, \tag{5.17}$$

en we spreken wederom van de *som van de Fourier-reeks*.

Naast puntsgewijze convergentie hanteren we in deze context ook het begrip uniforme convergentie.

Definitie 5.16 De Fourier-reeks (5.10), gezien als reeks van functies van $x \in \mathbb{R}$, heet *uniform convergent* indien de beide reeksen (5.16) uniform convergent zijn. $\oslash$

We zullen conclusies voornamelijk voor de complexe gedaante van de Fourier-reeks formuleren. Het verband tussen de (coëfficiënten van) de reële en de complexe vorm maken de vertaling naar de corresponderende resultaten voor de reële vorm tot een eenvoudige oefening.

Het is duidelijk dat een convergente Fourier-reeks van de vorm (5.10) een periodieke functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met periode 2π definieert.

Opmerking 5.17 In plaats van periodieke functies met periode 2π kan men ook *periodieke functies* beschouwen met een *andere periode* $\omega > 0$. Dit zijn functies $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan $g(y+\omega) = g(y)$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Het is duidelijk dat de substitutie

$$f(x) = g\left(\frac{\omega}{2\pi}\,x\right), \quad g(y) = f\left(\frac{2\pi}{\omega}\,y\right),$$

een ω-periodieke functie g overvoert in een 2π-periodieke functie f en vice versa. Om deze reden zijn alle resultaten in dit hoofdstuk representatief voor periodieke functies met een willekeurige periode. $\oslash$

In het vervolg zullen we regelmatig te maken krijgen met reeksen van de vorm

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k,$$

met v_k, $(k \in \mathbb{N})$, vectoren van een genormeerde lineaire ruimte, dwz. een lineaire ruimte V voorzien van een norm $\|\cdot\|$. Voorbeelden hiervan zijn $V = \mathbb{R}^n$ (waaronder $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) of $V = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van de sup-norm. Als generalisatie van eerdere definities noemen we een dergelijke reeks convergent indien de rij van partiële sommen $s_n := \sum_{k=0}^n v_k$ een limiet heeft in de metrische ruimte V; dwz. er bestaat een $s \in V$ zodat $\|s_n - s\| \to 0$ voor $n \to \infty$. De reeks heet *absoluut convergent* indien de reeks $\sum_{k\geq 0} \|v_k\|$ convergent is als reeks met waarden in $\mathbb{R}$.

Zoals we in het bovenstaande gezien hebben geven Fourier-reeksen algemener aanleiding tot reeksen van de vorm

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k \tag{5.18}$$

waarbij de sommatie zich uitstrekt over de index-verzameling $\mathbb{Z}$. In overeenstemming met tweezijdige integralen zullen we een dergelijke reeks convergent noemen indien de stukken $\sum_{k<0} v_k$ en $\sum_{k\geq 0} v_k$ beiden convergent zijn.

Definitie 5.18 Zij $(V, \|\cdot\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. Een reeks in V van de vorm (5.18) heet *convergent* indien beide reeksen

$$\sum_{k\geq 0} v_k \quad \text{en} \quad \sum_{k\geq 1} v_{-k} \quad \text{convergeren.}$$

In dat geval heet

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k := \sum_{k=1}^{\infty} v_{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

de som van de reeks. De reeks heet *absoluut convergent* indien $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|v_k\|$ convergent is als reeks met waarden in $\mathbb{R}$. $\oslash$

De bovenstaande definitie is in het bijzonder van toepassing op de ruimte $V = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voorzien van de sup-norm $\|\cdot\|_{\mathbb{R}}$. Een Fourier-reeks van de vorm

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \tag{5.19}$$

kan gezien worden als reeks met waarden in deze ruimte. Absolute convergentie van een reeks in deze context is eerder ook absoluut uniforme convergentie genoemd.

Lemma 5.19 *Zij $c_k \in \mathbb{C}$ voor $k \in \mathbb{Z}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De reeks* (5.19) *is absoluut uniform convergent.*

(b) *De reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ is convergent.*

(c) *Er is een $M > 0$ zo dat*

$$\sum_{k=-l}^{l} |c_k| \leq M \quad \text{voor alle} \quad l \geq 0.$$

Indien (a)-(c) *gelden, dan convergeert de de Fourier-reeks (5.19) uniform op $\mathbb{R}$ en behoort de somfunctie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{5.20}$$

tot $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Met andere woorden, f is continu en periodiek met periode 2π.

Bewijs In de notatie (5.5) kan de reeks (5.19) geschreven worden als $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\epsilon_k$ met waarden in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Zij $k \in \mathbb{Z}$, dan geldt $|\epsilon_k(x)| = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus de sup-norm van de corresponderende term wordt gegeven door

$$\|c_k\epsilon_k\|_{\mathbb{R}} = |c_k|.$$

Hieruit volgt de equivalentie van (a) en (b). Als (b) geldt, dan volgt (c) met $M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$. Veronderstel omgekeerd dat (c) geldt. Dan is de rij van partiële sommen $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} |c_k|$ monotoon stijgend en naar boven begrensd door M, dus convergent. Dus $\sum_{k\geq 0} |c_k|$ convergeert. Om dezelfde reden is $\sum_{k\geq 1} |c_{-k}|$ convergent. Hieruit volgt (b).

Veronderstel nu dat (a) - (c) gelden. Uit de absoluut uniforme convergentie van de Fourier-reeks volgt de uniforme convergentie, zie Lemma 3.33. Wegens Stelling 3.30 is de som-functie dus continu. Uit de uniforme convergentie volgt puntsgewijze convergentie van de reeks. Zij $f_n = \sum_{|k|\leq n} c_k\epsilon_k$. Dan geldt dat $f_n \to f$ puntsgewijs op $\mathbb{R}$. Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt $f_n(x) = f_n(x + 2\pi)$. Door de limiet te nemen voor $n \to \infty$ volgt hieruit dat $f(x) = f(x + 2\pi)$. □

Voorbeeld 5.20 De absoluut uniform convergente reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(k^2 x\right)$$

uit Voorbeeld 3.38 is een Fourier-reeks, waarvan de coëfficiënten a_j, b_j gedefinieerd zijn door $a_j = 0$ voor alle $j \geq 0$, $b_j = 0$ voor iedere $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ die niet gelijk is aan een kwadraat van een geheel getal, en tenslotte $b_j = 1/k^2$ als $j = k^2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Men noemt een Fourier-reeks *lacunair* als de verzameling van de rangnummers j waarvoor $c_j \neq 0$ 'steeds grotere gaten' vertoont voor grote $|j|$. Lacunaire Fourier-reeksen worden vaak gebruikt om er al te naïeve ideeën over het gedrag van functies mee te weerleggen. De plaatjes van Voorbeeld 3.38 illustreren dit. ⊘

Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan definiëren we *k-de Fourier-coëfficiënt* van f (voor $k \in \mathbb{Z}$) door

$$\mathcal{F}(f)_k = \langle f, \epsilon_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx. \tag{5.21}$$

Lemma 5.21 *Voor alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat*

$$|\mathcal{F}(f)_k| \leq \|f\|_{\mathbb{R}}. \tag{5.22}$$

Hierin staat $\|f\|_{\mathbb{R}}$ voor de sup-norm van f over $\mathbb{R}$. Vanwege de periodiciteit van f is deze gelijk aan $\|f\|_{[-\pi,\pi]}$.

Bewijs Er geldt dat

$$|\mathcal{F}(f)_k| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{\mathbb{R}}.$$

□

De volgende stelling van Euler (1777) en Fourier geeft aan hoe de coëfficiënten van een Fourier-reeks teruggevonden kunnen worden uit de som.

Stelling 5.22 *Veronderstel dat $c_k \in \mathbb{C}$ voor $k \in \mathbb{Z}$ en dat de Fourier-reeks* (5.19) *uniform convergeert, met somfunctie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegeven door* (5.20). *Dan geldt voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ dat*

$$c_k = \mathcal{F}(f)_k. \tag{5.23}$$

Bewijs We schrijven

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k \epsilon_k.$$

Dan geldt wegens de uniforme convergentie dat $f_n \to f$ uniform op $\mathbb{R}$, dus $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} \to 0$, voor $n \to \infty$. Uit de schatting (5.22) leiden we nu af dat $|\mathcal{F}(f_n)_k - \mathcal{F}(f)_k| = |\mathcal{F}(f_n - f)_k| \to 0$, dus

$$\mathcal{F}(f)_k = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n)_k.$$

We merken nu op dat f_n een Fourier polynoom is, en dat $\mathcal{F}(f_n)_k = c_k$ voor alle $n \geq k$, wegens Lemma 5.13. Hieruit concluderen we tenslotte dat $\mathcal{F}(f)_k = c_k$. □

In het vervolg noteren we met $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de collectie van functies $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Voorzien van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is dit een complexe lineaire ruimte. Aldus geldt voor $c, d \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$ dat

$$(c + d)(k) = c(k) + d(k) \quad \text{en} \quad (\lambda c)(k) = \lambda c(k).$$

De elementen van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ heten ook wel de rijen in $\mathbb{C}$ met index-verzameling $\mathbb{Z}$.

Definitie 5.23 Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. De rij $\mathcal{F}(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ gedefinieerd door $k \mapsto \mathcal{F}(f)_k$ heet ook wel de *Fourier-getransformeerde* van f. De bijbehorende reeks (5.19) met $c_k = \mathcal{F}(f)_k$, heet de *Fourier-reeks van de functie f*. ⊘

Uit de gegeven definitie volgt gemakkelijk dat de afbeelding $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ een complex lineaire afbeelding

$$\mathcal{F}: \quad C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \tag{5.24}$$

definieert. We noemen deze afbeelding de *Fourier transformatie.*

Al in de 18e eeuw werd het vermoeden uitgesproken dat de 'algemene, voldoend nette' functie gelijk is aan de som van een Fourier-reeks. In de 18e en het begin van de 19e eeuw vonden er verhitte discussies plaats tussen aanhangers van dit vermoeden en tegenstanders, die beargumenteerden dat de sommen van Fourier-reeksen een heel speciale klasse van functies vormen. Het vermoeden werd in 1829 door de Duitse wiskundige J. Dirichlet bevestigd. Voor een speciale klasse van 2π-periodieke functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bewees hij dat de rij van de symmetrische partiële sommen

$$s_l(x) := \sum_{k=-l}^{l} \mathcal{F}(f)_k \, e^{ikx}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{5.25}$$

voor iedere $x \in \mathbb{R}$ naar $f(x)$ convergeert als $l \to \infty$. We komen hier in paragraaf 5.6 op terug.

Opmerking 5.24 De eis dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ is *niet voldoende* voor convergentie. In 1876 construeerde P. du Bois Reymond een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en een aftelbare dichte deelverzameling D van $\mathbb{R}$, met de eigenschap dat voor iedere $x \in D$ de rij van de partiële sommen (5.25) onbegrensd is, dus zeker niet convergeert naar $f(x)$. Dat D dicht ligt in $\mathbb{R}$ betekent dat iedere $y \in \mathbb{R}$ een limietpunt van D is, dwz. voor iedere $\delta > 0$ geldt $]\, y - \delta, y + \delta\, [\cap D \neq \emptyset$. Voor meer informatie, zie bijvoorbeeld Vol. 1, Ch. VIII, §1 in A. Zygmund: Trigonometric Series. Cambridge University Press, 1968. $\oslash$

Stel dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan blijkt uit de bovenstaande opmerking dat we niet kunnen aannemen dat de bijbehorende Fourier-reeks $\sum_k c_k \epsilon_k$ puntsgewijs convergent is. Zelfs als we op de een of andere manier weten dat de coëfficiënten c_k voldoen aan conditie (b) van Lemma 5.19 dan kunnen we nog niet direct concluderen dat $f = \sum_k c_k \epsilon_k$. Wel garandeert Stelling 5.22 dat door $g = \sum_k c_k \epsilon_k$ een functie in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd wordt met Fourier-coëfficiënten die gegeven worden door $\mathcal{F}(g)_k = c_k = \mathcal{F}(f)_k$. Met andere woorden, g en f hebben dezelfde Fourier-getransformeerde. Om te kunnen concluderen dat $f = g$ is het volgende resultaat voldoende.

Stelling 5.25 *De Fourier-transformatie $\mathcal{F} : C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ is injectief.*

We zullen dit resultaat in de volgende paragraaf afleiden door middel van een benaderingstechniek die bekend staat als *Abel–Poisson benadering*. Deze paragraaf sluiten we af met het volgende belangrijke gevolg.

Stelling 5.26 *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continu en periodiek met periode 2π. Noteer de Fourier-coëfficiënten van f met c_k, voor $k \in \mathbb{Z}$. Als $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, dan geldt*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

met absoluut uniforme convergentie van de reeks op $\mathbb{R}$.

Bewijs Veronderstel dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, schrijf $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ en veronderstel dat $\sum |c_k| < \infty$. Dan is de Fourier reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \epsilon_k$ absoluut uniform convergent, wegens Lemma 5.19. Wegens Stelling 5.22 wordt door

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

een continue functie $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd met $\mathcal{F}g = c = \mathcal{F}f$. Uit de injectiviteit van de Fourier-transformatie volgt nu dat $f = g$. De functie f wordt dus gegeven door zijn Fourier-reeks. $\square$

Voorbeeld 5.27 De 2π-periodieke functie f op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = |x|$ als $x \in \,]-\pi,\, \pi]$, is continu. Maak een schets! De Fourier-coëfficiënten worden gegeven door

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2},$$

en voor $k \neq 0$ door

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, \frac{1}{-ik} \, \frac{d}{dx} e^{-ikx} \, dx.$$

De laatste integraal kunnen we schrijven als de som van de integraal over $[-\pi,\, 0]$ en de integraal over $[0,\, \pi]$. Op ieder van deze integralen passen we een partiële integratie toe, hetgeen uiteindelijk leidt tot

$$c_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi \, k^2}, \quad k \neq 0.$$

Hieruit leiden we af dat

$$|c_k| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2},$$

waaruit we zien dat $\sum |c_k|$ convergeert. We concluderen dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergeert. Opmerkend dat $c_k = 0$ als k even is en $k \neq 0$ en $c_k = -2/\pi k^2$ als k oneven is, krijgen we nu op grond van Stelling 5.26 dat

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos((2j-1)\, x)}{(2j-1)^2}, \quad |x| \leq \pi, \tag{5.26}$$

waarbij de convergentie uniform is op grond van Lemma 5.19.

Door $x = 0$ in te vullen vinden we in het bijzonder dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{5.27}$$

Noteren we

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

dan geeft splitsing van de som over $n = 2j$ en over $n = 2j - 1$, met $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, dat

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{s}{4} + \frac{\pi^2}{8}$$

dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{5.28}$$

Deze identiteit is afkomstig van Euler, uit het midden van de 18$^{\text{e}}$ eeuw. $\oslash$

We vatten de resultaten van deze paragraaf nog eens samen in termen van de Fourier transformatie opgevat als lineaire afbeelding als in (5.24). Met $l^1(\mathbb{Z})$ noteren we de deelverzameling van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$

bestaande uit de rijtjes $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ waarvoor de bijbehorende reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|$ convergeert. Men gaat gemakkelijk na dat $l^1(\mathbb{Z})$ een complex lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ is. Is $c \in l^1(\mathbb{Z})$, dan wordt door

$$\mathcal{S}(c) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \epsilon_k$$

een functie in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd, zie Lemma 5.19. Het is duidelijk dat de zo gedefinieerde afbeelding

$$\mathcal{S} : l^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

lineair is. Stelling 5.22 kunnen we nu herformuleren als

Stelling 5.22' $\mathcal{F} \circ \mathcal{S} = I$ *op* $l^1(\mathbb{Z})$.

Tenslotte kunnen we Stelling 5.26 als volgt herformuleren in termen van de afbeeldingen $\mathcal{F}$ en $\mathcal{S}$.

Stelling 5.26' *Als* $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *en* $\mathcal{F}f \in l^1(\mathbb{Z})$ *dan is* $f = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(f)$.

5.4 Abel–Poisson benadering

In deze paragraaf veronderstellen we dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dwz. f is een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodiek is. Door het in Opmerking 5.24 genoemde voorbeeld weten we dat de rij (5.25) van symmetrische partiële sommen van de Fourier-reeks niet convergent hoeft te zijn.

Anderzijds weten we door Lemma 5.21 wel dat de collectie Fourier-coëfficiënten $\mathcal{F}(f)_k$, voor $k \in \mathbb{Z}$, begrensd is door de sup-norm $\|f\|_{\mathbb{R}}$. Door de Fourier-coëfficiënten $c_k := (\mathcal{F}f)_k$ te vervangen door $r^{|k|}c_k$, met $0 < r < 1$ krijgen we een continue functie $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met een zelfs absoluut uniform convergente Fourier-reeks.

Ter voorbereiding geven we het volgende lemma.

Lemma 5.28 *Zij* $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *en zij* $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ *voor alle* $k \in \mathbb{Z}$. *Dan is de reeks* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}c_k\epsilon_k$ *absoluut uniform convergent voor iedere* $0 < r < 1$. *In het bijzonder wordt voor iedere* $0 < r < 1$ *door*

$$f_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}c_k\epsilon_k \tag{5.29}$$

een continue functie $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *gedefinieerd.*

Bewijs Laat $0 < r < 1$ en schrijf $d_k = r^{|k|}c_k$. Er geldt dat $|c_k| \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$, dus $|d_k| \leq \|f\|_{\mathbb{R}} r^{|k|}$. Voor alle $l \geq 0$ geldt

$$\sum_{k=-l}^{l} r^{|k|} = -1 + 2\sum_{k=0}^{l} r^k \leq -1 + \frac{2}{1-r} = \frac{1+r}{1-r} \tag{5.30}$$

dus

$$\sum_{k=-l}^{l} |d_k| \leq \frac{1+r}{1-r}\|f\|_{\mathbb{R}}.$$

De coëfficiënten van de reeks $\sum_k d_k\epsilon_k$ voldoen daarom aan conditie (c) van Lemma 5.19. Alle uitspraken volgen nu door toepassing van het genoemde lemma. $\square$

De volgende stelling zegt dat de functies f_r de gegeven functie f uniform benaderen voor $r \uparrow 1$. Dit staat bekend als de *Abel–Poisson benaderingsmethode*, genoemd naar de Noorse wiskundige N. Abel en de Franse wiskundige S. Poisson.

Stelling 5.29 *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Definieer de functies $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voor $0 < r < 1$ door* (5.29). *Dan geldt dat*

$$\lim_{r \uparrow 1} \|f - f_r\|_{\mathbb{R}} = 0.$$

Ter voorbereiding op het bewijs van deze stelling behandelen we eerst het convolutie-product op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, en vervolgens eigenschappen van de zogenaamde *Poisson kern.*

Het convolutie-product

Voor twee functies $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiëren een nieuwe functie $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$f * g\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\; dy, \tag{5.31}$$

voor $x \in \mathbb{R}$. De zo gedefinieerde functie $f * g$ heet het *convolutie-product* van f en g.

Uit de continuiteit van de functies $(x, y) \mapsto f(x-y)$ en $(x, y) \mapsto g(y)$ volgt met de productregel dat de integrand een continue functie van $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ is. Wegens Stelling 2.2 volgt hieruit dat de functie $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continu is. Het is evident dat $f * g$ periodiek is met periode 2π, dus $f * g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Door de substitutie $z = x - y$ uit te voeren in de integraal van het convolutieproduct zien we dat

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(x-z)\; dz = g * f(x).$$

Het convolutieproduct is dus commutatief. Uit toepassing van de driehoeksongelijkheid voor integratie leiden we direct af dat $|f * g(x)| \leq \|f\|_{\mathbb{R}} \cdot \|g\|_{\mathbb{R}}$, voor alle $x \in \mathbb{R}$, dus ook

$$\|f * g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}} \cdot \|g\|_{\mathbb{R}}. \tag{5.32}$$

Het convolutieproduct verhoudt zich op een bijzondere manier tot de Fouriertransformatie $\mathcal{F}$.

Lemma 5.30 *Laat $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan is $f * g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat*

$$\mathcal{F}(f * g)_k = (\mathcal{F}f)_k(\mathcal{F}g)_k.$$

Bewijs Zie een van de opgaven. □

Ook geldt het volgende lemma.

Lemma 5.31 *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt voor alle $k \in \mathbb{Z}$ dat*

$$f * \epsilon_k = (\mathcal{F}f)_k\, \epsilon_k.$$

Bewijs Zij $x \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned} f * \epsilon_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)\epsilon_k(x-z)\; dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{ik(x-z)}\; dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-ikz}\; dz\; \cdot e^{ikx} \\ &= (\mathcal{F}f)_k\, \epsilon_k(x). \end{aligned}$$

□

Eigenschappen van de Poisson-kern

Lemma 5.32 *Zij* $0 \leq r < 1$. *De reeks*

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx}. \tag{5.33}$$

convergeert absoluut uniform op $\mathbb{R}$ *en definieert een functie* $P_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Bewijs We passen Lemma 5.19 toe op de Fourier reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\epsilon_k$, met coëfficiënten $r^{|k|}$, voor $k \in \mathbb{Z}$. Uit de schatting (5.30) leiden we af dat deze reeks aan voorwaarde (c) van het genoemde lemma voldoet. De uitspraken volgen nu door toepassing van het lemma. □

Lemma 5.33 *Zij* $0 \leq r < 1$. *Zij* $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *en definieer* $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *als in (5.29). Dan is*

$$f_r = P_r * f. \tag{5.34}$$

Bewijs Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we het Fourier polynoom $P_{r,n}$ door

$$P_{r,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Uit het voorgaande lemma volgt dat $P_{r,n} \to P_r$ uniform op $\mathbb{R}$ voor $n \to \infty$, dus $\|P_{r,n} - P_r\|_{\mathbb{R}} \to 0$ voor $n \to \infty$. Door toepassing van de schatting (5.32) vinden we dat

$$\|P_{r,n} * f - P_r * f\|_{\mathbb{R}} = \|(P_{r,n} - P_r) * f\|_{\mathbb{R}} \leq \|P_{r,n} - P_r\|_{\mathbb{R}} \cdot \|f\|_R \to 0$$

voor $n \to \infty$, dus $P_{r,n} * f \to P_r * f$ uniform op $\mathbb{R}$ voor $n \to \infty$. Anderzijds geldt dat

$$P_{r,n} * f = \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|}\epsilon_k * f = \sum_{k=-n}^{n} r^{|k|} c_k \epsilon_k$$

dus $P_{r,n} * f \to f_r$ uniform op $\mathbb{R}$, voor $n \to \infty$. Uniforme limieten zijn uniek, dus (5.34) volgt. □

Lemma 5.34 *Zij* $0 \leq r < 1$. *Dan is*

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 2r(1 - \cos x)}, \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{5.35}$$

Bewijs Aangezien $|re^{ix}| < 1$ volgt door sommatie van de meetkundige reeks dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty} (re^{ix})^k = \frac{1}{1 - re^{ix}}.$$

Evenzo geldt dat

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} r^{|k|} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (re^{-ix})^k = \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}}.$$

Sommatie van deze reeksen leidt tot

$$P_r(x) = \frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} = \frac{1 - r^2}{(1 - re^{ix})(1 - re^{-ix})}.$$

Hieruit volgt gemakkelijk (5.35). □

Lemma 5.35

(a) *Voor alle* $0 \leq r < 1$ *geldt dat* $P_r(x) > 0$, $(\forall x \in \mathbb{R})$, *en dat*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\, dx = 1. \tag{5.36}$$

(b) *Zij* $0 < \delta < \pi$. *Dan convergeert* P_r *op* $V := [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ *uniform naar nul, voor* $r \uparrow 1$.

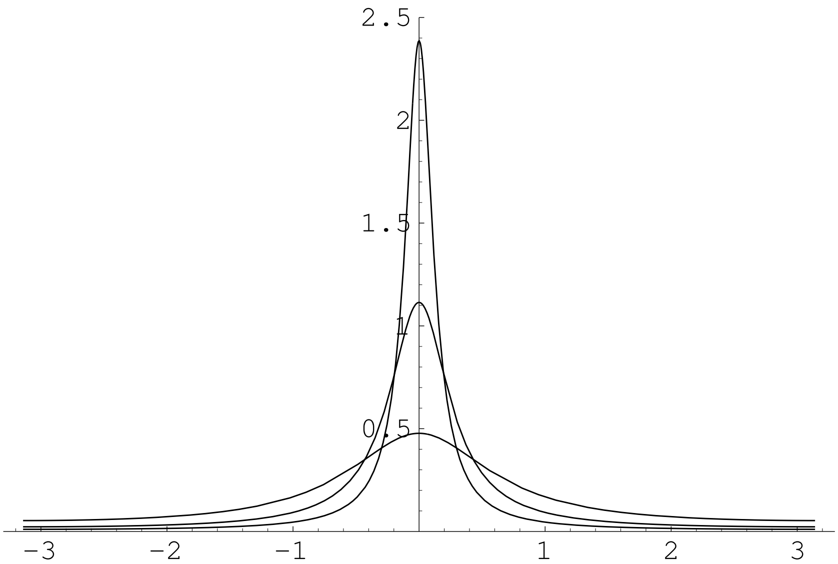
Bewijs We beginnen met (a). Uit $0 \leq r < 1$ en $|\cos x| \leq 1$ volgt dat teller en noemer in (5.35) strikt groter dan nul zijn, dus dat $P_r(x) > 0$.

Uit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} < \infty$ volgt dat $P_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met de definiërende reeks als Fourier reeks. In het bijzonder is de nulde Fourier coëfficiënt gelijk aan $r^0 = 1$. Hieruit volgt dat $\langle P_r, \epsilon_0 \rangle = 1$, dus (5.36).

Om (b) te bewijzen merken we op dat $1 - \cos x \geq 1 - \cos\delta$ voor $x \in V$, dus

$$0 < P_r(x) \leq \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 2r(1 - \cos\delta)}, \qquad (x \in V).$$

Het rechterlid heeft limiet nul voor $r \uparrow 1$. Hieruit volgt dat $\|P_r\|_V \to 0$. $\square$



De functies $v \mapsto P_r(v)$ voor $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{4}$ en $r = \frac{7}{8}$.

Omdat $f_r = P_r * f$, is de volgende stelling equivalent met Stelling 5.29.

Stelling 5.36 *Laat* $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. *Dan geldt dat* $P_r * f \to f$ *uniform op* $\mathbb{R}$, *voor* $r \uparrow 1$.

Bewijs We zullen dit afleiden puur door gebruik te maken van de in Lemma 5.35 geformuleerde eigenschappen van de Poisson-kern P_r. De redenatie is als volgt. We merken op dat

$$\begin{aligned} P_r * f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)P_r(y)\,dy - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y)-f(x)]P_r(y)\,dy. \end{aligned}$$

waarbij de tweede identiteit volgt door toepassing van (5.36). Hieruit volgt door toepassing van de driehoeksongelijkheid voor integralen dat

$$|P_r * f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)-f(x)|P_r(y)\,dy. \tag{5.37}$$

De functie f is continu dus uniform continu op $[-2\pi, 2\pi]$. Vanwege de periodiciteit is de functie ook uniform continu op $\mathbb{R}$. Er is dus een $0 < \delta < \pi$ zo dat voor $u, v \in \mathbb{R}$ geldt:

$$|u - v| \leq \delta \implies |f(u) - f(v)| < \epsilon/2.$$

Voor alle $x \in [-\pi, \pi]$ en alle $y \in [-\delta, \delta]$ volgt dus dat $|f(x-y) - f(x)| < \epsilon/2$. Anderzijds geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ dat

$$|f(x-y) - f(x)| \leq |f(x-y)| + |f(y)| \leq 2\|f\|_{\mathbb{R}}.$$

Splitsen we de bovenstaande integraal op in een stuk over het interval $[-\delta, \delta]$ en een stuk over de verzameling $V := [-\pi, \pi] \setminus\,]-\delta, \delta[$ dan vinden we

$$\begin{aligned} |P_r * f(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\epsilon}{2} P_r(y)\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_V 2\|f\|_{\mathbb{R}}\|P_r\|_V\,dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon}{2} P_r(y)\,dy + 2\|f\|_{\mathbb{R}}\|P_r\|_V \\ &= \epsilon/2 + 2\|f\|_{\mathbb{R}}\|P_r\|_V. \end{aligned}$$

Uit Lemma 5.35 (b) volgt nu dat er een $R < 1$ bestaat zo dat voor alle $r \in]R, 1[$ geldt $\|P_r\|_V < \epsilon/4(1 + \|f\|_{\mathbb{R}})$. Voor dergelijke r geldt dus de schatting

$$|P_r * f(x) - f(x)| \leq \epsilon, \qquad (\forall x \in [-\pi, \pi]),$$

dus ook $\|P_r * f - f\|_{[-\pi,\pi]} \leq \epsilon$. De uniforme convergentie volgt. □

Zij $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van Fourier polynomen, gedefinieerd als in Definitie 5.12.

Gevolg 5.37 *De ruimte $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ligt dicht in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ten aanzien van de sup-norm. Anders gezegd, zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan bestaat er voor iedere $\epsilon > 0$ een Fourier polynoom $p \in P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat $\|f - p\|_{\mathbb{R}} < \epsilon$.*

Bewijs Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan bestaat er wegens Stelling 5.29 een $0 < r < 1$ zo dat $\|f_r - f\|_{\mathbb{R}} < \epsilon/2$. Schrijf $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ en definieer

$$f_{r,n} = \sum_{|k| \leq n} r^{|k|} c_k \epsilon_k.$$

Dan geldt dat $f_{r,n} \to f_r$, uniform op $\mathbb{R}$. Er bestaat dus een $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$\|f_{r,N} - f_r\| < \epsilon/2.$$

Kies $p = f_{r,N}$, dan is p een Fourier polynoom, en er geldt dat

$$\|f - p\|_{\mathbb{R}} \leq \|f - f_r\|_{\mathbb{R}} + \|f_r - p\|_{\mathbb{R}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Aan het eind van de vorige paragraaf wezen we al op het belang van het volgende gevolg van Stelling 5.36.

Gevolg 5.38 *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en veronderstel dat $(\mathcal{F}f)_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Dan is $f = 0$.*

Bewijs Definieer f_r als in (5.29). Dan volgt uit het nul zijn van de Fourier coëfficiënten dat $f_r = 0$ voor elke $0 \leq r < 1$. Volgens Stelling 5.29 geldt dat $\lim_{r\uparrow 1} f_r = f$, uniform op $\mathbb{R}$. We concluderen dat $f = 0$. □

Hiermee is Stelling 5.25 bewezen, en daarmee ook zijn belangrijke gevolg, Stelling 5.26.

5.5 Differentiëren en Fourier-transformatie

Voor $p \in \mathbb{N}$ noteren we met $C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van functies $g \in C(R/2\pi\mathbb{Z})$ die bovendien C^p zijn, dwz. alle afgeleiden $g, g', \ldots, g^{(p)}$ bestaan en zijn continu. Met $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ noteren we de ruimte van alle functies $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die willekeurig vaak differentieerbaar zijn.

Lemma 5.39 *Als $g \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan geldt dat $g * h \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en*

$$\frac{d}{dx}(g * h) = \frac{dg}{dx} * h.$$

Bewijs Er geldt dat

$$g * h(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, y)\, dy,$$

met $\varphi(x, y) = g(x - y)h(y)$. Hieruit blijkt dat φ continu is op $\mathbb{R}^2$, en bovendien dat φ partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele, met partiële afgeleide

$$D_1\varphi(x, y) = g'(x - y)h(y).$$

Aangezien $D_1\varphi$ weer continu is, is differentiatie onder het integraalteken geoorloofd, zie Stelling 2.39, en we vinden:

$$\frac{d}{dx} g * h(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} D_1\varphi(x, y)\, dy = (g') * h(x).$$

Hieruit volgt dat $g*h$ differentieerbaar is met afgeleide $(g')*h$. Aangezien $g', h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, vinden we dat de afgeleide continu is. Dus $g * h$ is C^1, en de formule voor de afgeleide geldt. □

Gevolg 5.40 *Zij* $p \in \mathbb{N}$ *of* $p = \infty$. *Als* $g \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *en* $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, *dan is* $g * h \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Bewijs Dit volgt door herhaalde toepassing van het vorige lemma. □

Het onderstaande resultaat is een afzwakking van Gevolg 5.37. We geven toch nogmaals een bewijs, als illustratie van het gebruik van convolutie.

Gevolg 5.41 *Zij* $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. *Voor iedere* $\epsilon > 0$ *is er een functie* $g \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *met*

$$\|f - g\|_{\mathbb{R}} < \epsilon.$$

Opmerking 5.42 In de taal van de metrische ruimten betekent dit dat $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dicht ligt in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ten aanzien van de uniforme metriek. ⊘

Bewijs Voor elke $0 \leq r < 1$ is $P_r \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dus ook $P_r * f \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Pas nu Stelling 5.36 toe. Dan zien we dat de bewering geldt met $g = P_r * f$, voor r voldoende dicht bij 1. □

Het volgende resultaat is een interessant gevolg, dat verder in deze paragraaf geen rol meer zal spelen.

Gevolg 5.43 *Zij* $a < b$ *en* $\varphi \in C([a, b])$. *Dan bestaat er voor iedere* $\epsilon > 0$ *een functie* $\psi \in C^\infty([a, b])$ *met* $\|\varphi - \psi\|_{[a,b]} < \epsilon$.

Bewijs Door verschuiven en herschalen kunnen we reduceren tot het geval dat $a = 0$ en $b = \pi/2$. Laat $\varphi \in C([0, \pi/2]$ en $\epsilon > 0$. We definiëren nu een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $f|_{[0,\pi/2]} = \varphi$ als volgt

$$f(x) = \begin{cases} (x/\pi + 1)\varphi(0) & \text{voor} \quad -\pi \leq x \leq 0; \\ \varphi(x) & \text{voor} \quad 0 \leq x \leq \pi/2; \\ (2 - 2x/\pi)\varphi(\pi/2) & \text{voor} \quad \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

De functie f is continu op $[-\pi, \pi]$ terwijl $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Hieruit volgt dat f uit te breiden is tot een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Nu is er een $g \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat $\|f - g\|_{\mathbb{R}} < \epsilon$. Definieer $\psi = g|_{[a,b]}$. Dan is

$$\|\varphi - \psi\|_{[a,b]} \leq \|f - g\|_{\mathbb{R}} < \epsilon.$$

□

We gaan nu aantonen dat iedere continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie f op $\mathbb{R}$, die bovendien periodiek is met periode 2π, een absoluut uniform convergente Fourier-reeks heeft. Vanwege Stelling 5.26 is dan f gelijk aan zijn eigen Fourier-reeks. Hiermee is aangetoond dat de klasse van functies waarvoor we zeker zijn dat ze gelijk zijn aan hun eigen Fourier-reeks, behoorlijk groot is.

We beginnen met het principe dat, naarmate een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ vaker differentieerbaar is, zijn Fourier-getransformeerde $\mathcal{F}(f)_k$ harder naar nul gaat voor $|k| \to \infty$.

Lemma 5.44 *Zij f een continu differentieerbare en 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$. Dan geldt*

$$\mathcal{F}(f')_k = ik\,\mathcal{F}(f)_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bewijs Met partiële integratie volgt dat

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f')_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{i\,k}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \\ &= ik\mathcal{F}(f)_k\end{aligned}$$

waarbij de optredende randtermen tegen elkaar wegvallen vanwege de 2π-periodiciteit van de functies f en ϵ_{-k}. $\square$

Het bovenstaande resultaat heeft een uitbreiding naar functies $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die stuksgewijs C^1 zijn, iets wat in de praktijk vaak optreedt.

Definitie 5.45 Laat $a, b \in \mathbb{R}$ zijn met $a < b$. Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heet *stuksgewijs C^p*, voor $p \geq 0$, als er een verdeling $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ van het interval $[a, b]$ bestaat met de volgende eigenschap. Voor iedere $1 \leq j \leq n$ bestaat een $f_j \in C^p([a_{j-1}, a_j])$ zo dat $f = f_j$ op $]a_{j-1}, a_j[$. $\oslash$

Is een 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stuksgewijs C^p op $[-\pi, \pi]$, dan is hij vanwege de periodiciteit stuksgewijs C^p op ieder gesloten en begrensd interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. We noemen een dergelijk functie dan ook kortweg stuksgewijs C^p.

Nu volgt dan de beloofde uitbreiding van Lemma 5.44.

Lemma 5.46 *Laat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs C^1 zijn. Dan geldt voor elke $k \in \mathbb{Z}$ dat*

$$\mathcal{F}(f')_k = ik\mathcal{F}(f)_k \tag{5.38}$$

Bewijs Zij $-\pi = a_0 < a_1 < \cdots < a_d = \pi$ een verdeling van het interval $[-\pi, \pi]$ zo dat $f|_{]a_{j-1},a_j[}$ uit te breiden is naar een C^1-function op $[a_{j-1}, a_j]$, voor alle $1 \leq j \leq d$. Omdat f continu is moet deze uitbreiding gelijk zijn aan de beperking van f tot het interval $[a_{j-1}, a_j]$. We concluderen dat de beperking van f tot $[a_{j-1}, a_j]$ een C^1-functie is. Zij $k \in \mathbb{Z}$. Door partiële integratie volgt voor elke j dat

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(x)e^{-ikx}\, dx = f(x)e^{-ikx}\Big|_{a_{j-1}}^{a_j} + ik\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x)e^{-ikx}\, dx$$

Door sommatie over j vinden we hieruit dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\, dx = f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + ik\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx$$

Wegens de 2π periodiciteit van f volgt dat de eerste uitdrukking na het gelijkheidsteken gelijk is aan nul. Hieruit volgt (5.38). $\square$

Het volgende lemma zal ons in staat stellen om het vorige optimaal te benutten. Aan het integraal inproduct op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ koppelen we de *kwadraat integraal norm* $\|\cdot\|_2$ die gegeven wordt door

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

De definities van inproduct en norm breiden op voor de hand liggende manier uit naar 2π-periodieke functies f die stuksgewijs continu zijn.

Lemma 5.47 (Ongelijkheid van Bessel) *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een 2π-periodieke en stuksgewijs continue functie met Fourier-coëfficiënten $c_k = \mathcal{F}(f)_k$. Dan is*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2. \tag{5.39}$$

Bewijs Zij $n \in \mathbb{N}$. We merken op dat $c_k = \langle f, \epsilon_k\rangle$ en beschouwen het Fourier polynoom $p = \sum_{|k|\leq n} c_k\epsilon_k$ Dan is

$$\langle p, f-p\rangle = \sum_{|k|\leq n} c_k\langle \epsilon_k, f-p\rangle = 0,$$

dus

$$\|f\|_2^2 = \langle p + (f-p), p + (f-p)\rangle = \langle p, p\rangle + \langle f-p, f-p\rangle,$$

waaruit we afleiden dat

$$\sum_{|k|\leq n} c_k^2 = \langle p, p\rangle \leq \|f\|_2^2.$$

Uit de geldigheid van deze schatting, voor iedere $n \in \mathbb{N}$, volgt (5.39). □

Stelling 5.48 *Laat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs C^1 zijn, en schrijf $c_k = \mathcal{F}(f)_k$. Dan geldt:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty.$$

Bewijs Uit de aanname dat f stuksgewijs C^1 is volgt dat f' een 2π-periodieke stuksgewijs continue functie is, en dus is de kwadraat integraal norm $\|f'\|_2$ eindig. Hieruit volgt wegens de ongelijkheid van Bessel dat

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f')_k|^2 \leq \|f'\|_2^2 < \infty.$$

Door toepassing van Lemma 5.46 en van de Cauchy-Schwartz ongelijkheid concluderen we nu dat

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| &= |c_0| + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\mathcal{F}(f')_k|\frac{1}{|k|}\\ &\leq |c_0| + \|f'\|_2\ (2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2})^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

□

Door toepassing van Stelling 5.26 leiden we direct het volgende af.

Gevolg 5.49 *Laat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs C^1 zijn. Dan convergeert de Fourierreeks voor f absoluut uniform naar f.*

Voor de fijnproever leiden we nog het volgende sterkere resultaat af voor functies die stuksgewijs C^2 zijn.

Lemma 5.50 *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs C^2 en schrijf $c_k := \mathcal{F}(f)_k$. Dan is er een $C > 0$ zo dat*

$$|c_k| \leq C\,(1 + |k|^2)^{-1} \tag{5.40}$$

Bewijs Als in het bewijs van Lemma 5.46 concluderen we dat er een verdeling $-\pi = a_0 < a_1 < \cdots < a_d = \pi$ is zo dat de beperking f_j van f tot ieder van de deelintervallen $I_j := [a_{j-1}, a_j]$ een C^2-functie is. Op zo'n deelinterval hebben we

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} f''(x)e^{-ikx}\,dx = f'(x)e^{-ikx}\Big|_{a_{j-1}+}^{a_j} + ik\int_{a_{j-1}}^{a_j} f'(x)e^{-ikx}\,dx.$$

Door sommatie over j vinden we dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-ikx}\,dx = C_k + ik\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx.$$

met C_k een geschikte constante. Het is gemakkelijk in te zien dat

$$|C_k| \leq \sum_{j=1}^{d}\left(\lim_{\epsilon\downarrow 0}|f'(a_j - \epsilon)| + \lim_{\epsilon\downarrow 0}|f'(a_{j-1} + \epsilon)|\right) \leq 2dM(f'),$$

waarin

$$M(f') := \max_{1\leq j\leq d}\|f_j'\|_{I_j}.$$

Voor $k \neq 0$ vinden we dat

$$\mathcal{F}(f')_k = \frac{1}{ik}\left(\mathcal{F}(f'')_k - \frac{C_k}{2\pi}\right).$$

Combineren we dit met (5.38) dan vinden we dat

$$\mathcal{F}(f)_k = \frac{-1}{k^2}\left(\mathcal{F}(f'')_k - \frac{C_k}{2\pi}\right).$$

Aangezien f'' Riemann integreerbaar is op $[-\pi, \pi]$, volgt dat

$$|\mathcal{F}(f'')_k| \leq \|f''\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx.$$

We concluderen dat, voor $n \neq 0$,

$$|\mathcal{F}(f)_k| \leq \frac{1}{k^2}\left(\|f''\|_1 + \frac{d}{\pi}M(f')\right).$$

Combineren we dit met $1/k^2 \leq 2(1 + k^2)^{-1}$ voor $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dan volgt de schatting (5.40) met een geschikte constante $C > 0$. $\square$

Voorbeeld 5.51 We beschouwen nogmaals de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die voor $-\pi < x \leq \pi$ gegeven wordt door $f(x) = |x|$. Deze functie is continu en stuksgewijs C^2. In Voorbeeld 5.27 zagen we dat de Foerier-coefficiënten c_k gegeven worden door

$$c_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad c_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \quad k \neq 0.$$

Dit is in overeenstemming met Lemma 5.50 en Stelling 5.48 $\oslash$

5.6 Functies met sprongen en de Dirichlet kern

In deze paragraaf bestuderen we het gedrag van de Fourier-reeks van een 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ waarvan we niet meer zullen eisen dat hij continu is. Een dergelijke functie f heet *lokaal Riemann-integreerbaar* als hij Riemann-intergreerbaar is over ieder gesloten en begrensd interval. Vanwege de periodiciteit is dit het geval dan en slechts dan als f Riemann-integreerbaar is op een interval van de vorm $[a, a+2\pi]$. De ruimte van dergelijke 2π-periodieke lokaal Riemann-integreerbare functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt genoteerd met

$$\mathcal{R}\,(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

Het product van twee lokaal Riemann-integreerbare functies is weer lokaal Riemann-integreerbaar, zie Appendix. Daarom kunnen we het integraal-inproduct uitbreiden tot $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ door formule (5.4) te gebruiken voor $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Voor functies $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiëren we zoals voorheen de Fourier-getransformeerde $\mathcal{F}(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ door

$$\mathcal{F}(f)_k := \langle f, \epsilon_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Bovendien definiëren we voor $l \in \mathbb{N}$ de l-de bijbehorende symmetrische partiële som $s(f)_l$ van de Fourier-reeks door

$$s(f)_l(x) = \sum_{k=-l}^{l} c_k e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

met $c_k = (\mathcal{F}f)_k$. Voor een speciale ruimte van functies kan aangetoond worden dat de rij van symmetrische partiële sommen een limiet heeft voor $l \to \infty$.

We brengen de definitie van stuksgewijze C^1 functies $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ in herinnering, zie Definitie 5.45.

Definitie 5.52 In het vervolg noteren we met $C^{\text{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met

(a) $f(x + 2\pi) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;

(b) f is stuksgewijs C^1 op het interval $[-\pi, \pi]$.

$\oslash$

Vanwege de periodiciteit is elke functie $f \in C^{\text{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs C^1 op ieder gesloten en begrensd interval.

Laat $f \in C^{\text{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt voor elke $x \in \mathbb{R}$ dat de limieten

$$f(x-) := \lim_{h \downarrow 0} f(x - h), \quad \text{en} \quad f(x+) := \lim_{h \downarrow 0} f(x + h)$$

bestaan. Uiteraard geldt dat f continu is in x dan en slechts dan als $f(x+) = f(x-) = f(x)$, in welk geval $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = f(x)$.

Stelling 5.53 *Zij $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $x \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} s(f)_l(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

Voor punten $x \in \mathbb{R}$ waar de functie f uit de bovenstaande stelling continu is, geldt dus:

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \sum_{|k|\le l} (\mathcal{F}f)_k\, e^{ikx}$$

De rest van deze paragraaf zal gewijd zijn aan het bewijs van Stelling 5.53.

Voorbeeld 5.54 Beschouw de *zaagtandfunctie* f die ontstaat als de 2π-periodieke uitbreiding van de functie $f(x) = x$ op $]0,\, 2\pi[$. Voor de waarde $f(0) = f(2\pi)$ van f in het sprongpunt kunnen we iedere gewenste waarde nemen. Merk op dat voor iedere keuze geldt $f(0+) = 0$ en $f(0-) = f(2\pi-) = 2\pi$. De functie f behoort tot $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Maak een schets!

De Fourier-coëfficiënten worden gegeven door

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,(2\pi)^2 = \pi$$

terwijl we voor $k \neq 0$ met behulp van een partiële integratie krijgen dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,\frac{1}{-ik}\,\frac{d}{\mathrm{d}x}e^{-ikx}\,dx = -\frac{1}{ik}$$

Hiermee is de Fourier-reeks van f gegeven door

$$\pi - \sum_{k\ge 1} \frac{2\,\sin(kx)}{k}.$$

Voor $x = 0$ convergeert deze, op een flauwe manier, met som gelijk aan π, hetgeen precies midden tussen $f(0+) = 0$ en $f(0-) = 2\pi$ in ligt. Dit suggereert dat $f(0) = \pi$ de natuurlijke keuze is voor de waarde van f in het sprongpunt.

Stelling 5.53 impliceert anderzijds dat

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi, \tag{5.41}$$

een fraaie klassieke formule.

De in dit voorbeeld optredende complexe gedaante

$$\pi - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{ikx}}{ik}$$

van de Fourier-reeks is niet convergent voor $x = 0$, aangezien de reeks $\sum_{k\ge 1} 1/k$ divergent is, zie Lemma 3.22. De convergentie in Stelling 5.53 van de symmetrische Fouriersom impliceert dus in het algemeen niet dat de Fourier-reeks convergeert in de zin van Definitie 5.15.

$\oslash$

Het bewijs van Stelling 5.53

De eerste stap in het bewijs bestaat uit het herschrijven van de *symmetrische partiële Fourier-som* $s(f)_l$ in termen van een convolutie met een speciale functie.

Lemma 5.55 *Voor iedere* $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *en* $l \in \mathbb{N}$ *geldt dat*

$$s(f)_l = D_l * f,$$

met $D_l \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *gedefinieerd door*

$$D_l(x) = \sum_{k=-l}^{l} e^{ikx}.$$

Bewijs Het is gemakkelijk in te zien dat Lemma 5.31 doorgaat voor een functie $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Uit $D_l = \sum_{|k|\leq l} \epsilon_k$ volgt nu dat

$$D_l * f = \sum_{|k|\leq l} \epsilon_k * f = \sum_{|k|\leq l} \mathcal{F}(f)_k\, \epsilon_k = s(f)_l.$$

□

De functie D_l wordt ook wel de *Dirichlet-kern* genoemd. Uit zijn definitie volgt direct dat $D_l \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat de nulde Fourier coëfficiënt van D_l gelijk is aan 1. Dus

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_l(x)\, dx = 1, \qquad (l \in \mathbb{N}). \tag{5.42}$$

Lemma 5.56 *Voor elke* $l \in \mathbb{N}$ *geldt*

$$D_l(x) = \frac{\sin((l+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}. \tag{5.43}$$

Bewijs Zij $l \in \mathbb{N}$, en zij $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} D_l(x) &= \sum_{k=-l}^{l} e^{ikx} = e^{-ilx}\sum_{k=-l}^{l} e^{i(k+l)x} \\ &= e^{-ilx}\sum_{k=0}^{2l} (e^{ix})^k = e^{-ilx}\cdot\frac{1-e^{i(2l+1)x}}{1-e^{-ix}} \\ &= \frac{e^{-i(l+\frac{1}{2})x} - e^{i(l+\frac{1}{2})x}}{e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{\frac{1}{2}ix}}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de bovenstaande formule. □

Het meest cruciale ingredient van het bewijs van Stelling 5.53 is het lemma, genoemd naar de Duitse wiskundige B. Riemann en de Franse wiskundige H. Lebesgue.

Lemma 5.57 (Riemann–Lebesgue) *Zij $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stuksgewijs continu. Dan geldt*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_a^b f(x)\, e^{i\xi x}\, dx = 0.$$

Bewijs We veronderstellen eerst dat f een C^1-functie is. Dan volgt door partiële integratie dat, voor $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\, dx &= \frac{1}{i\xi}\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}e^{i\xi x}\, d\xi \\ &= -\frac{1}{i\xi}\int_a^b f'(x)e^{i\xi x}\, d\xi + \frac{1}{i\xi}\, f(x)e^{i\xi x}\Big|_a^b .\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\, dx\right| \leq \frac{1}{|\xi|}(\|f'\|_{[a,b]} + 2\|f\|_{[a,b]}).$$

Het rechterlid heeft limiet nul voor $|\xi| \to \infty$. Het resultaat volgt nu door toepassing van de insluitstelling.

We veronderstellen nu dat f continu is. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er wegens Gevolg 5.43 een $g \in C^1([a, b])$ zo dat $\|f - g\|_{[a,b]} < \epsilon/2(b - a)$. Hieruit volgt dat voor alle $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\left|\int_a^b [f(x) - g(x)]e^{i\xi x}\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leq (b - a)\|f - g\|_{[a,b]} < \epsilon/2.$$

Volgens het eerste deel van het bewijs is er een $R > 0$ zo dat voor alle ξ met $|\xi| > R$ geldt dat

$$\left|\int_a^b g(x)e^{i\xi x}\, dx\right| < \epsilon/2.$$

Nu volgt voor $|\xi| > R$ dat

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\, dx\right| \leq \left|\int_a^b g(x)e^{i\xi x}\, dx\right| + \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]e^{i\xi x}\, dx\right| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

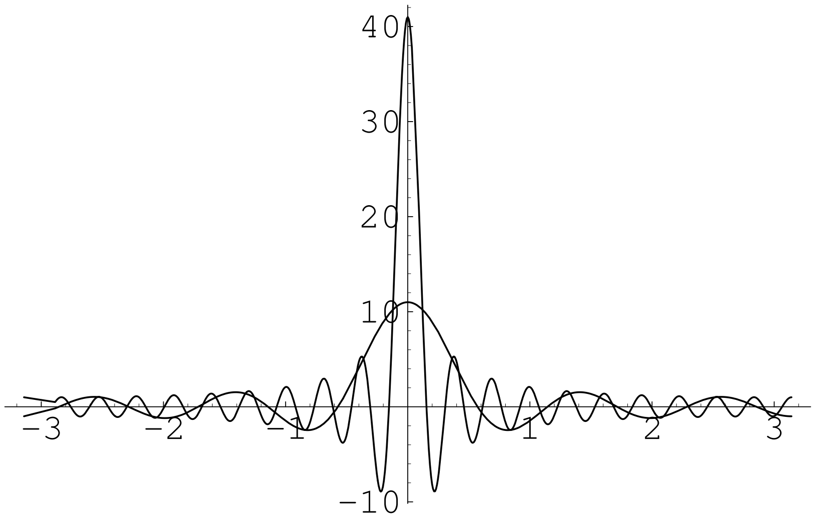
Tenslotte veronderstellen we nog algemener dat f stuksgewijs continu is. Dan is er een verdeling $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ van het interval $[a, b]$ zo dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ een $f_j \in C([a_{j-1}, a_j])$ bestaat zo dat $f = f_j$ op $]a_{j-1}, a_j[$. Derhalve geldt:

$$\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\, dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f_j(x)e^{i\xi x}\, dx \to 0$$

voor $|\xi| \to \infty$, wegens het tweede deel van het bewijs. □

Gevolg 5.58 *Laat $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, en zij $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stuksgewijs continu. Dan is*

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_a^b f(x)\, \sin(\xi x)\, dx = 0.$$



De functies $v \mapsto D_5(v)$ en $v \mapsto D_{20}(v)$.

Bewijs Dit volgt uit het bovenstaande lemma, omdat $\sin(\xi x) = \frac{1}{2i}(e^{i\xi x} - e^{-i\xi x})$. □

Het Riemann-Lebesgue lemma heeft het volgende belangrijke gevolg voor integreren tegen de Dirichlet kern.

Gevolg 5.59 *Laat* $g \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *en* $0 < \delta < \pi$. *Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} g(y)D_l(y)\, dy = 0.$$

Bewijs Zij $G(y) = g(y)/\sin(y/2)$, dan is G een stuksgewijze C^1-functie op zowel het interval $[-\pi,-\delta]$ als $[\delta,\pi]$. Nu is

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} g(y)D_l(y)\, dy = \int_{-\pi}^{-\delta} G(y)\sin((l+\frac{1}{2})y)\, dy + \int_{\delta}^{\pi} G(y)\sin((l+\frac{1}{2})y\, dy$$

en het resultaat volgt door toepassing van Gevolg 5.58. □

Gevolg 5.60 *Zij* $0 < \delta < 1$. *Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^{\delta} D_l(y)\, dy = \lim_{l\to\infty} \int_{-\delta}^{0} D_l(y)\, dy = \pi.$$

Bewijs De functie D_l is even, dus

$$\int_0^{\delta} D_l(y)\, dy = \int_{-\delta}^{0} D_l(y)\, dy = \frac{1}{2}\int_{-\delta}^{\delta} D_l(y)\, dy.$$

Daarom is het voldoende te bewijzen dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(y)\ dy = 1.$$

Dit volgt door combinatie van (5.42) en Gevolg 5.59 met g de constante functie 1. $\square$

Lemma 5.61 *Zij* $0 < \delta < \pi$ *en zij* $g \in C^1([0,\delta])$. *Dan is*

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^{\delta} g(y) D_l(y)\ dy = \pi g(0).$$

Bewijs Definieer de functie $\varphi : [0,\delta] \to \mathbb{C}$ door $\varphi(0) = g'(0)$ en door $g(y) - g(0) = y\varphi(y)$. Dan is φ continu op $[0,\delta[$. Er geldt dat

$$\int_0^{\delta} g(y) D_l(y)\ dy = g(0) \int_0^{\delta} D_l(y)\ dy + \int_0^{\delta} y\varphi(y) D_l(y)\ dy.$$

De eerste integraal achter het gelijkteken heeft limiet $\pi g(0)$ voor $l \to \infty$, wegens Gevolg 5.60. De tweede integraal kunnen we herschrijven als

$$\int_0^{\delta} \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)}\ \varphi(y)\ \sin((l + \frac{1}{2})y)\ dy.$$

Omdat $y \mapsto y(\sin(\frac{1}{2}y))^{-1}$ uitbreidt tot een continue functie op $[0,\delta]$ convergeert de laatste integraal naar nul voor $l \to \infty$, wegens Gevolg 5.58. Het resultaat volgt. $\square$

Bewijs van Stelling 5.53 We schrijven $g(y) = f(x+y)$ en merken op dat $g \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat $s(g)_l(0) = D_l * g(0) = D_l * f(x)$. Verder is $f(x+) = g(0+)$ en $f(x-) = g(0-)$. Het is dus voldoende te bewijzen dat

$$\lim_{l\to\infty} s(g)_l(0) = \frac{g(0-) + g(0+)}{2}.$$

Door verschuiving is hiermee het bewijs van de stelling gereduceerd tot het geval dat $x = 0$. We veronderstellen daarom dat $x = 0$.

Kies $0 < \delta < \pi$ zo dat f zowel op $]0,\delta]$ als op $[-\delta, 0[$ een C^1-functie is. We definiëren de functie $f_+ : [0,\delta] \to \mathbb{C}$ door

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{voor} \quad x \in]\,0,\delta], \\ f(0+) & \text{voor} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dan is f_+ een C^1-functie op $[0,\delta]$. Op soortgelijke wijze breiden we de functie $f|_{[-\delta,0[}$ uit tot een C^1-functie f_- op $[-\delta, 0]$, met $f_-(0) = f(0-)$.

Er geldt dat

$$\int_0^{\delta} f(-y) D_l(y)\ dy = \int_0^{\delta} f_-(-y) D_l(y)\ dy.$$

Door toepassing van Lemma 5.61 op de tweede integraal leiden we af dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} f(-y) D_l(y)\ dy = \frac{1}{2} f_-(0). \tag{5.44}$$

Op soortgelijke manier concluderen we dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{0} f(-y)D_l(y)\, dy = \frac{1}{2} f_+(0). \tag{5.45}$$

Uit Gevolg 5.59 leiden we af dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} f(-y)D_l(y)\, dy = 0. \tag{5.46}$$

Uit (5.44), (5.45) en (5.46) volgt met de optelregel voor limieten dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-y)D_l(y)\, dy = \frac{f_-(0) + f_+(0)}{2}.$$

Dit is de gewenste identiteit. $\square$

Voorbeeld 5.62 Door partiële integratie zien we dat voor $R > 1$ geldt

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_1^R \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \cos x\, dx = \cos 1 - \frac{1}{R} \cos R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

Hieruit blijkt door toepassing van het majorantiekenmerk op de laatste integraal dat de limiet van de eerste integraal voor $R \to \infty$ bestaat. Omdat $x \mapsto x^{-1} \sin x$ voortzetbaar is tot een continue functie op $[0, \infty[$, met waarde 1 in $x = 0$, volgt dat

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

bestaat.

We kunnen deze limiet berekenen door toepassing van Gevolg 5.60. Hiertoe merken we op dat

$$\begin{aligned} \int_0^{l+\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_0^1 \frac{\sin((l+\frac{1}{2})x)}{x}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{x}\, D_l(x)\, dx. \end{aligned}$$

De functie $x \mapsto x^{-1}\sin(\frac{1}{2}x)$ is voortzetbaar tot een continue functie $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{C}$, met waarde $\varphi(0) = \frac{1}{2}$. Met Gevolg 5.60 concluderen we dat

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{l\to\infty} \int_0^{l+\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \varphi(0)\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Dit is de bekende waarde die ons op een andere manier al bekend was uit een van de opgaven. $\oslash$

Uniforme convergentie en het verschijnsel van Gibbs

We zullen in deze paragraaf laten zien dat de convergentie in Stelling 5.53 uniform is op ieder gesloten en begrensd interval $I \subset \mathbb{R}$ dat geen discontinuïteit van de functie f bevat. Is omgekeerd de convergentie uniform op een dergelijk interval I, dan is de beperking $f|_I$ een continue functie wegens Stelling 3.15. In het bijzonder is de convergentie dus zeker niet uniform in een omgeving van een punt a waarin f niet-continu is. Aan het eind van de paragraaf zullen we het gedrag van de benaderende functie $s_l(f)(x)$ beschrijven, dat bekend staat als het *verschijnsel van Gibbs.*

Allereerst is hier het resultaat over de convergentie in punten van continuïteit.

Stelling 5.63 *Zij $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, en zij $[a, b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval waarop f continu is. Dan geldt $s(f)_l = D_l * f \to f$ uniform op $[a, b]$, voor $l \to \infty$.*

Opmerking 5.64 In het geval dat f continu is op $\mathbb{R}$, leiden we uit het bovenstaande af dat de $s_l(f)$ van symmetrische partiële Fourier-sommen op $\mathbb{R}$ uniform naar f convergeert. Dit is een zwakkere conclusie dan de conclusie van Stelling 5.48, namelijk dat de Fourier-reeks $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)_k \epsilon_k$ absoluut uniform convergeert met som f. $\oslash$

Het bewijs van Stelling 5.63 volgt de lijn van het bewijs van Stelling 5.53, met dien verstande dat er extra schattingen nodig zijn die de uniformiteit van de convergentie garanderen. In die schattingen speelt de volgende norm op $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ een belangrijke rol.

Voor $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ noteren we met $\operatorname{sing}(f)$ de verzameling van punten $x \in \mathbb{R}$ zo dat f niet C^1 is in een omgeving van x. We merken op dat $\operatorname{sing}(f)$ niet verandert door translatie over 2π en dat $[-\pi, \pi] \cap \operatorname{sing}(f)$ eindig is. Voorts definiëren we

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad \|f'\| = \sup_{x\in\mathbb{R}\setminus\operatorname{sing}(f)} |f'(x)|, \quad \|f\|_{\mathrm{st}} := \max(\|f\|, \|f'\|).$$

Dan is het gemakkelijk in te zien dat $\|\cdot\|_{\mathrm{st}}$ een norm op $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definieert. In het vervolg noteren we met $\operatorname{dc}(f)$ de verzameling van punten waar een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ niet continu is.

Het volgende lemma dient ter voorbereiding op de eerste schatting die we nodig zullen hebben.

Lemma 5.65 *Zij $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ continu op $[-\delta, \delta]$, waarin $\delta > 0$. Dan geldt*

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \|f\|_{\mathrm{st}}|t| \qquad (t \in [-\delta, \delta]). \tag{5.47}$$

Bewijs We bewijzen de schatting voor $t \in [0, \delta]$. De schatting voor $t \in [-\delta, 0]$ volgt dan door de bewezen schatting toe te passen op de functie $t \mapsto f(-t)$.

We beschouwen de verzameling W van punten $t_0 \in [0, \delta]$ zo dat de schatting (5.47) geldig is voor $t \in [0, t_0]$. Er geldt dat $0 \in W$, terwijl W naar boven begrensd is door δ. Hieruit volgt dat W een kleinste bovengrens $s = \sup W \leq \delta$ heeft. Stel dat $s < \delta$. Dan geldt de schatting op $[0, s[$. Omdat f continu is op W zien we gemakkelijk in dat de schatting (5.47) ook in s geldt, dus $s \in W$.

Omdat f continu en stuksgewijs C^1 is op $[-\delta, \delta]$ bestaat er een s_1 met $s < s_1 < \delta$ zo dat $f_\circ := f|_{[s,s_1]}$ van klasse C^1 is. Voor $t \in [s, s_1]$ geldt daarom dat

$$|f(t) - f(s)| = \left| \int_s^t (f_\circ)'(\tau)\, d\tau \right| \leq (t - s)\|f\|_{\mathrm{st}},$$

dus

$$|f(t)| \leq |f(s)| + (t-s)\|f\|_{\mathrm{st}} \leq |f(0)| + s\|f\|_{\mathrm{st}} + (t-s)\|f\|_{\mathrm{st}} = |f(0)| + t\|f\|_{\mathrm{st}}.$$

De schatting geldt dus voor alle $t \in [s, s_1]$, en we zien dat $s_1 \in W$. Dit is in tegenspraak met $s = \sup W$.

We concluderen dat $s = \delta$. Derhalve is $W = [0, \delta]$. De schatting geldt derhalve voor $t \in [0, \delta]$. □

De genoemde eerste schatting wordt gegeven in het volgende lemma.

Lemma 5.66 *Er is een $C_0 > 0$ zo dat voor alle $0 < \delta < \pi$ en alle $\varphi \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met φ continu op $[-\delta, \delta]$ en $\varphi(0) = 0$ geldt:*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(t)\varphi(t)\, dt \right| \leq \delta\, C_0\, \|\varphi\|_{\mathrm{st}} \qquad (\forall l \in \mathbb{N}).$$

Bewijs Uit het voorgaande lemma volgt dat

$$|\varphi(t)| \leq \|\varphi\|_{\mathrm{st}}|t|, \qquad (|t| \leq \delta).$$

Uit de definitie in Lemma 5.55 volgt dat de functie $t \mapsto tD_l(t)$ continu is op $[-\pi, \pi]$ en uit formule (5.43) volgt dat hij voldoet aan de schatting

$$|tD_l(t)| \leq C, \qquad (t \in [-\pi, \pi]),$$

met $C > 0$ een constante onafhankelijk van l. Combineren we de verkregen schattingen, dan zien we dat $|D_l(t)\varphi(t)| \leq C\|\varphi\|_{\mathrm{st}}$, voor $|t| \leq \delta$. Hieruit volgt weer

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(t)\varphi(t)\, dt \right| \leq \frac{\delta C}{\pi} \|\varphi\|_{\mathrm{st}}.$$

De gewenste schatting volgt dus met $C_0 = C/\pi$. □

Ter voorbereiding van een tweede schatting die we nodig zullen hebben dient het volgende lemma.

Lemma 5.67 *Zij $[a, b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval, en zij $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stuksgewijs C^1 en continu. Dan geldt voor iedere C^1-functie $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ dat*

$$\int_a^b \psi(x)\theta'(x)\, dx = \psi\theta\Big|_a^b - \int_a^b \psi'(x)\theta(x)\, dx.$$

Bewijs Er bestaat een verdeling $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ van het interval $[a, b]$ zo dat voor iedere $1 \leq j \leq k$ de functie $\psi|_{]a_{j-1}, a_j[}$ uitgebreid kan worden tot een C^1-functie $\psi_j : [a_{j-1}, a_j] \to \mathbb{R}$. Met partiële integratie volgt, voor $1 \leq j \leq k$, dat

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \psi(x)\theta'(x)\, dx = \psi_j\theta\Big|_{a_{j-1}}^{a_j} - \int_{a_{j-1}}^{a_j} \psi_j'(x)\theta(x)\, dx.$$

Uit de continuïteit van ψ en ψ_j op $[a_{j-1}, a_j]$ volgt dat $\psi = \psi_j$ op $[a_{j-1}, a_j]$. Daarom blijft het rechterlid van de bovenstaande identiteit gelijk als we overal ψ_j door ψ vervangen. Sommeren we vervolgens de ontstane identiteiten voor $1 \leq j \leq k$, dan vinden we de in het lemma gegeven identiteit. □

De tweede schatting die we in het bovenstaande op het oog hadden is de volgende.

Lemma 5.68 *Zij $\delta > 0$. Dan is er een $C_1 > 0$ zo dat voor elk interval $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ dat lege doorsnede heeft met $]-\delta,\delta[$ en elke $\varphi \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die continu is op $[a,b]$ geldt:*

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_a^b D_l(t)\varphi(t)\,dt\right| \leq \frac{C_1}{l+1}\|\varphi\|_{\mathrm{st}} \qquad (\forall l \in \mathbb{N}).$$

Bewijs Met het vorige lemma, toegepast op de functies $\psi : t \mapsto \sin(t/2)^{-1}\varphi(t)$ en $\theta : t \mapsto -(l+\frac{1}{2})^{-1}\cos([l+\frac{1}{2}]t)$, vinden we dat

$$\begin{aligned}\int_a^b D_l(t)\varphi(t)\,dt &= \int_a^b \frac{\varphi(t)}{\sin(t/2)}\sin([l+\tfrac{1}{2}]t)\,dt \\ &= (l+\tfrac{1}{2})^{-1}\left[\frac{-\varphi(t)}{\sin(t/2)}\cos([l+\tfrac{1}{2}]t)\bigg|_a^b + \int_a^b \psi'(t)\cos([l+\tfrac{1}{2}]t)\,dt\right] \qquad (5.48)\end{aligned}$$

met

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)\sin(t/2) - \frac{1}{2}\varphi(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)^2}.$$

Er is een $C > 0$ zo dat $|\sin(t/2)|^{-1} \leq C$ voor alle t met $\delta \leq |t| \leq \pi$. Uit de uitdrukking voor $\psi'(t)$ volgt voor $t \in [a,b]$ de schatting

$$|\psi'(t)| \leq C^2\left(\sup_{[a,b]}|\varphi| + \sup_{[a,b]}|\varphi'|\right) \leq 2C^2\|\varphi\|_{\mathrm{st}}.$$

Ook geldt voor $t \in [a,b]$ de schatting

$$\left|\frac{\varphi(t)}{\sin(t/2)}\right| \leq C\|\varphi\|_{\mathrm{st}}.$$

Door toepassing van de driehoeksongelijkheid op de integralen en de som in (5.48) vinden we nu

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b D_l(t)\varphi(t)\,dt\right| &\leq (l+\tfrac{1}{2})^{-1}[2C\|\varphi\|_{\mathrm{st}} + 2|b-a|C^2\|\varphi\|_{\mathrm{st}}] \\ &\leq \frac{4}{2l+1}\left[C + \pi C^2\right]\|\varphi\|_{\mathrm{st}}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt de gewenste schatting met $C_1 = 2C/\pi + 2C^2$. □

We zijn nu gereed voor het bewijs van Stelling 5.63.

Bewijs van Stelling 5.63 Laat $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, en veronderstel dat f continu is in alle punten van een gesloten en begrensd interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Omdat de verzameling $\mathrm{dc}(f)$ slechts eindig veel punten in $[a-1,b+1]$ bevat, is er een $\delta_0 > 0$ zo dat f continu is in alle punten van $[a-\delta_0, b+\delta_0]$. In het vervolg veronderstellen we $0 < \delta \leq \delta_0$. Zij $x \in [a,b]$. We schrijven

$$s_l(f)(x) - f(x) = D_l * f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_l(t)\varphi_x(t)\,dt, \qquad (5.49)$$

waarbij de functie $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd is door

$$\varphi_x(t) = f(x-t) - f(x).$$

Het is gemakkelijk in te zien dat $\varphi_x \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat $\|\varphi_x\|_{\mathrm{st}} \leq 2\|f\|_{\mathrm{st}}$. Bovendien is φ_x continu op $[-\delta_0, \delta_0]$, terwijl $\varphi_x(0) = 0$.

Door de integraal over $[-\pi, \pi]$ in (5.49) te splitsen in integralen over $[-\delta, \delta]$, $[-\pi, -\delta]$ en $[\delta, \pi]$, vinden we door toepassing van Lemmas 5.66 en 5.68 op de functie φ_x in plaats van φ de schatting

$$|s_l(f)(x) - f(x)| \leq 2(\delta C_0 + \frac{2C_1}{l+1})\|f\|_{\mathrm{st}}.$$

Hierbij is de constante C_0 onafhankelijk van $x \in [a, b]$ en van δ. De constante C_1 is onafhankelijk van $x \in [a, b]$, maar afhankelijk van δ.

Zij nu $\epsilon > 0$. Dan kunnen we in het bovenstaande $\delta > 0$ voldoende klein kiezen zo dat bovendien voldaan is aan $\delta C_0\|f\|_{\mathrm{st}} < \epsilon/6$. Vervolgens kiezen we een positief geheel getal N met $2C_1\|f\|_{\mathrm{st}}/(N+1) < \epsilon/6$. Dan geldt voor alle $l \geq N$ en alle $x \in [a, b]$ dat

$$|s_l(f)(x) - f(x)| \leq 2(\epsilon/6 + \epsilon/6) = 2\epsilon/3.$$

We concluderen dat voor $l \geq N$ geldt dat

$$\sup_{x\in[a,b]} |s_l(f)(x) - f(x)| \leq 2\epsilon/3 < \epsilon.$$

Derhalve geldt $s_l(f) \to f$ uniform op $[a, b]$, voor $l \to \infty$. $\square$

We besluiten deze paragraaf met de beschrijving van $s_l(f)(x) - f(x)$ voor x in een omgeving van een punt $a \in \mathbb{R}$ waarin $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ discontinu is. Men kan laten zien dat in dit geval de functie $s_l(f)(x) - f(a+)$ voor $x \downarrow a$ na een geschikte van l afhankelijke herschaling een vast limiet-patroon heeft voor $l \to \infty$. Dit limietpatroon wordt gegeven door de spronggrootte $f(a+) - f(a-)$ maal de functie

$$I : y \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{\sin z}{z}\, dz - \frac{1}{2}.$$

Deze functie voldoet aan $I(0) = -1/2$, $I(y) \to 0$ voor $y \to \infty$. Hij heeft locale extrema in de punten $y_k = k\pi$, voor $k \in \mathbb{N}$, waarbij sprake is van een lokaal minimum voor k even en een lokaal maximum voor k oneven. Tussen twee opeenvolgende y_k is de functie strikt monotoon en heeft hij precies één nulpunt. Dit oscillerende gedrag is goed zichtbaar in de onderstaande figuur. Tenslotte is het lokale maximum van I in π absoluut en gelijk aan

$$I(\pi) = 0.08949\ldots.$$

Dit beschreven verschijnsel is vernoemd naar de Amerikaanse fysicus J.W. Gibbs. De precieze formulering van het verschijnsel van Gibbs, die we zonder bewijs zullen geven, is als volgt.

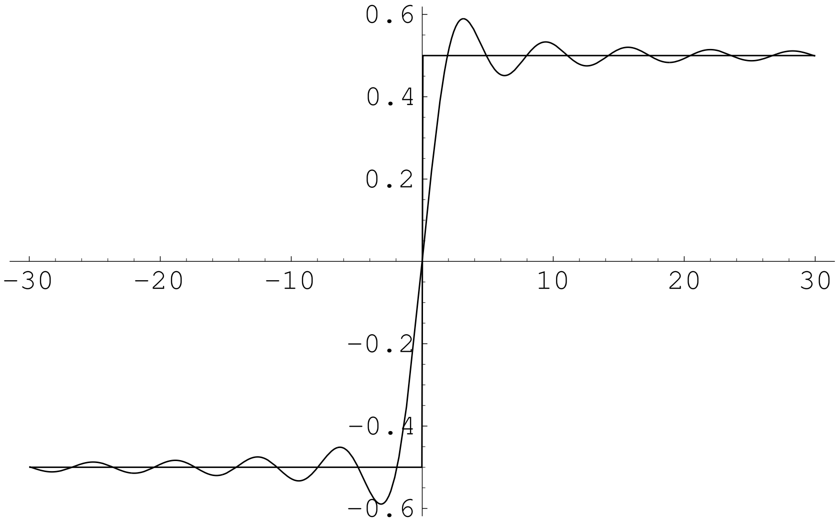
Stelling 5.69 (Het verschijnsel van Gibbs) *Zij $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt voor iedere $a \in \mathbb{R}$ dat*

$$\lim_{l\to\infty} s(f)_l(a + \frac{y}{l+\frac{1}{2}}) = f(a+) + [f(a+) - f(a-)]I(y).$$

uniform ten aanzien van $y \in [0, C]$, voor alle $C > 0$.

Opmerking 5.70 Door spiegeling ten aanzien van a verkrijgt men een soortgelijk resultaat voor het gedrag van de functie $s(f)_l(x) - f(a-)$ voor $x \uparrow a$. Preciezer,

$$\lim_{l\to\infty} s(f)_l(a - \frac{y}{l+\frac{1}{2}}) = f(a-) - [f(a+) - f(a-)]I(y),$$



De functies $y \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z$ en $z \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{sgn} z$.

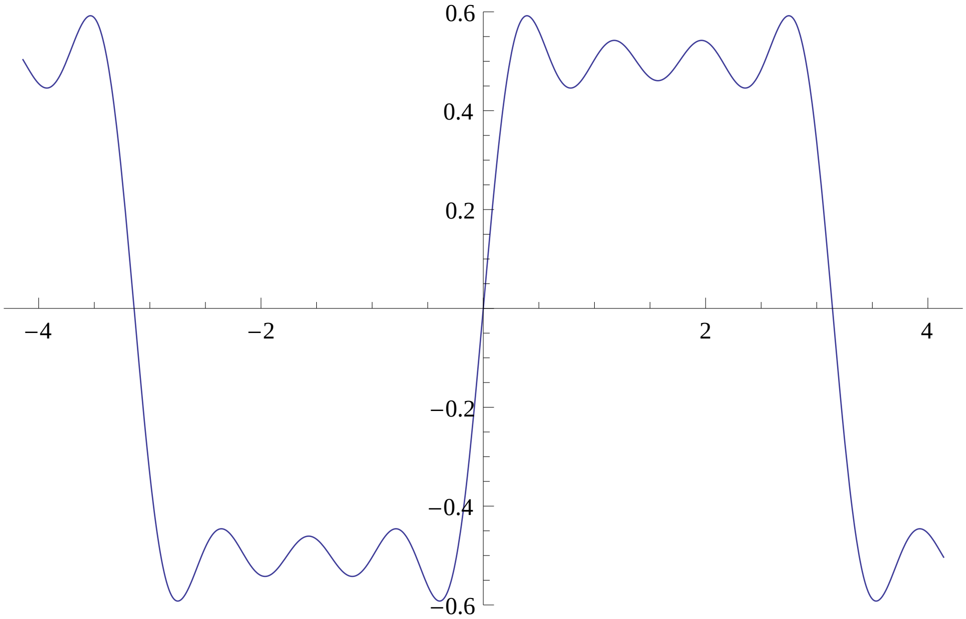
uniform ten aanzien van $y \in [0, C]$, voor iedere $C > 0$. $\oslash$

We zien hieraan dat $s_l(f)$ op ieder interval $[a, a + \delta[$ boven f blijft uitschieten als $l \to \infty$ met een maximale uitwijking die $I(\pi)$ maal de spronggrootte $f(a+) - f(a-)$ bedraagt, dus ongeveer 9 procent van de spronggrootte.

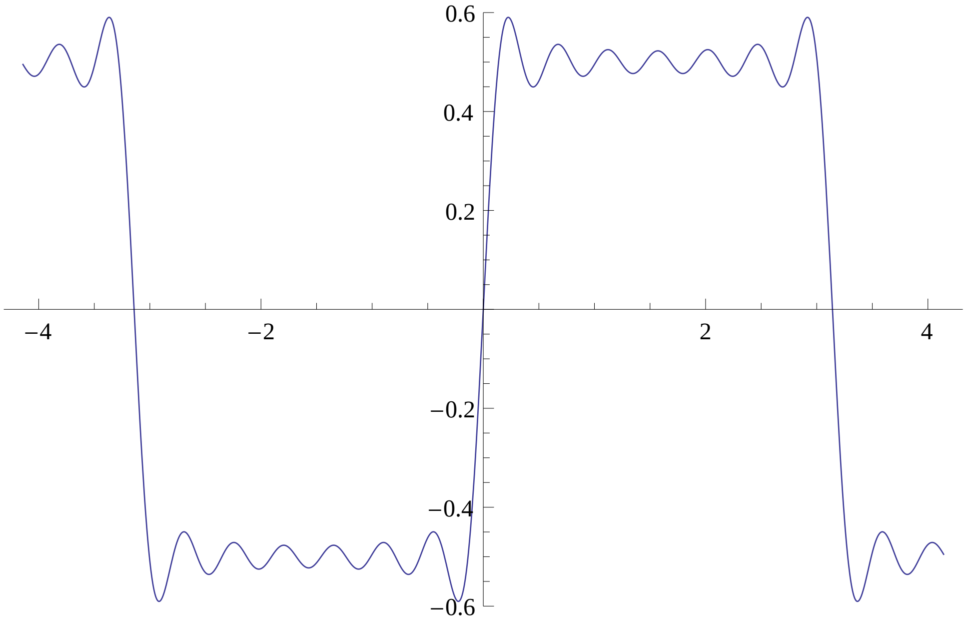
Het verschijnsel van Gibbs wordt treffend geïllustreerd door met Mathematica de som $s(f)_l$ te plotten voor $l = 3, 6, 10, 40$ met $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gegeven door $f = -1/2$ op $]-\pi, 0[$, $f = 1/2$ op $]0, \pi[$ en $f(0) = f(\pi) = 0$. Het is gemakkelijk na te rekenen dat deze som gegeven wordt door

$$s(f)_l = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1},$$

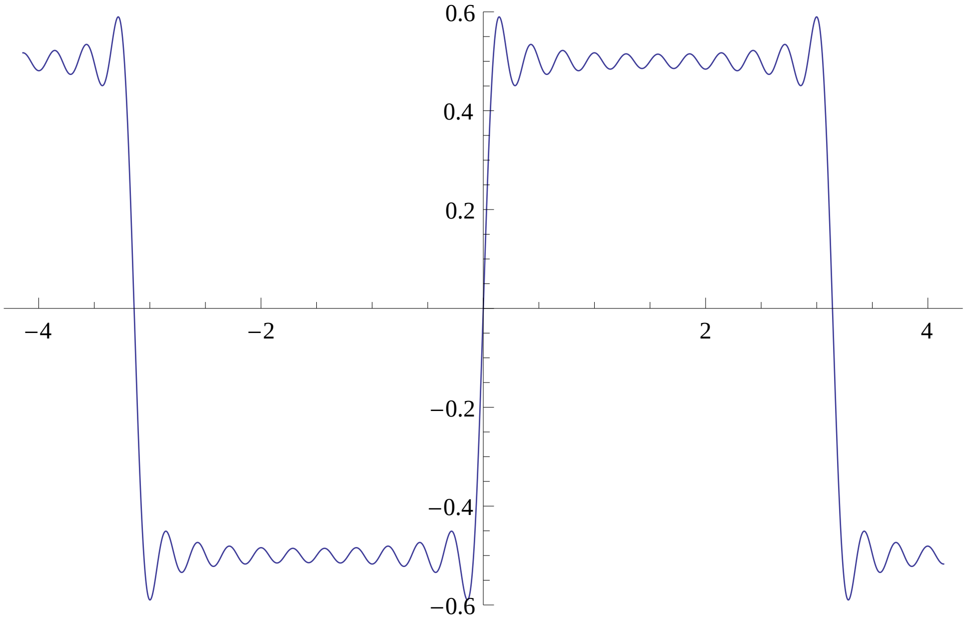
met $[(l-1)/2]$ het grootste gehele getal niet groter dan $(l-1)/2$. Zie de plaatjes op de volgende twee bladzijden.



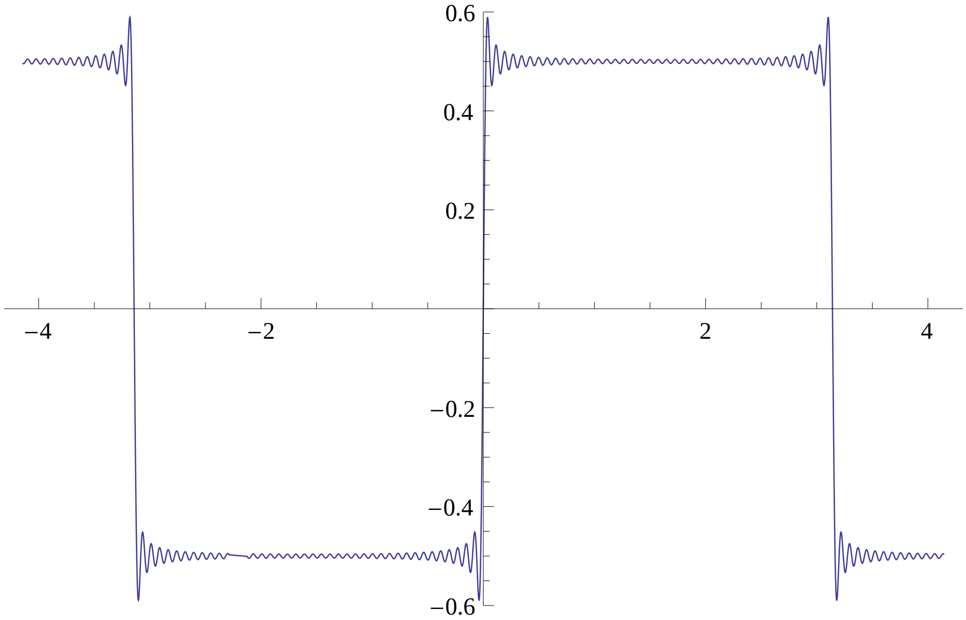
$$s(f)_3 = \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right]$$



$$s(f)_6 = \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right]$$



$$s(f)_{10} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{4} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$



$$s(f)_{40} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{19} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

6 De gelijkheid van Parseval, orthonormale stelsels

6.1 Orthonormale stelsels

Een belangrijke motivatie voor de huidige paragraaf is de volgende fraaie en belangrijke stelling, die bekend staat als de *gelijkheid van Parseval* voor Fourier-reeksen.

Stelling 6.1 (De gelijkheid van Parseval) *Zij $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dat wil zeggen, f is een lokaal Riemann integreerbare functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodiek is. Noteer $c_k = (\mathcal{F})_k$, voor $k \in \mathbb{Z}$. Dan geldt dat*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \tag{6.1}$$

Voorbeeld 6.2 We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $]-\pi,\pi]$ gedefinieerd wordt door $f(x) = x$. Er geldt dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\cdot\frac{\pi^2}{6}.$$

De Fourier coëfficiënten c_k van f berekenen we als volgt. Het is evident dat $c_0 = 0$. Met partiële integratie vinden we voor $k \neq 0$ dat

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-ik}\left[\, x\,e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\,dx\right] \\ &= \frac{(-1)^k}{-ik}. \end{aligned}$$

Derhalve

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

De bovenstaande gelijkheid van Parseval leidt in dit geval dus tot de bekende identiteit

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

$\oslash$

In het vervolg zullen we vanuit een geschikt meetkundig gezichtspunt de identiteit (6.1) opvatten als een oneindig dimensionale versie van de stelling van Pythagoras.

Startpunt van onze beschouwing is een complexe lineaire ruimte E, met daarop een *Hermite's inproduct* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Voor de definitie hiervan verwijzen we naar Definitie 5.7. Een dergelijk paar $(E, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ heet een *pre-Hilbert ruimte*. In het vervolg zullen wij de basistheorie ervan ontwikkelen.

Voorbeeld 6.3 Wij zullen de genoemde basistheorie vooral gebruiken voor de specifieke ruimte $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van het Hermite'se inproduct

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{6.2}$$

$\oslash$

De idee is dat we zo veel mogelijk theorie ontwikkelen voor een algemene pre-Hilbertruimte $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, die puur gebaseerd is op eigenschappen van het inproduct. Door deze abstractie krijgt de theorie een universele geldigheid die in tal van situtaties in de wiskunde van pas komt.

In termen van het Hermite's inproduct definiëren we de afbeelding $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ op E door:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te verifiëren: voor alle $f \in E$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt:

(a) $\|f\| \geq 0$ en $\|f\| = 0 \implies f = 0$;

(b) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.

Het is een algemeenheid dat het inproduct voldoet aan de *ongelijkheid van Cauchy-Schwartz*:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \qquad (f, g \in E). \tag{6.3}$$

Uit deze ongelijkheid volgt de volgende driehoeksongelijkheid, voor alle $f, g \in E$:

(c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Vanwege de eigenschappen (a) - (c) is $\| \cdot \|$ een *norm* op de ruimte E. In termen van deze norm definiëren we de functie $d : E \times E \to \mathbb{R}$ door

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Het is een algemeenheid dat hierdoor een *metriek* of *afstand* op E gedefinieerd wordt. Dit maakt (E, d) tot een metrische ruimte. Dit betekent dat de in Inleiding Analyse ontwikkelde terminologie van open bollen, open en gesloten verzamelingen, limieten en continuïteit tot onze beschikking staan.

In het bijzonder heeft het begrip convergentie van een rij betekenis. Een rij $(f_k)_{k \geq 0}$ in E convergeert naar $f \in E$ met betrekking tot de metriek d als $\|f_k - f\| \to 0$ voor $k \to \infty$.

Een *Hilbert ruimte* is een pre-Hilbert ruimte E waarvoor de metriek d volledig is, dwz. iedere Cauchy-rij in E is convergent naar een element van E. De theorie van deze Hilbert ruimten is een belangrijk onderwerp uit de functionaalanalyse, waarop wij in het kader van deze cursus niet verder in zullen gaan.

Opmerking 6.4 Ter volledigheid geven we voor een pre-Hilbert ruimte $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ de bewijzen van de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz en de driehoeksongelijkheid.

Voor de eerste merken we op: als $g = 0$ dan is (6.3) evident waar. Veronderstel daarom $g \neq 0$. Dan is $\langle g, g \rangle > 0$. Voor iedere $c \in \mathbb{C}$ geldt dat

$$0 \leq \langle f + c\,g,\, f + c\,g \rangle = \langle f,\, f \rangle + c\,\langle g,\, f \rangle + \overline{c}\,\langle f,\, g \rangle + |c|^2\,\langle g,\, g \rangle.$$

Substitueer in de bovenstaande ongelijkheid $c = -\langle f,\, g \rangle / \langle g,\, g \rangle$ dan volgt (6.3).

Toepassing van de (6.3) geeft nu

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f,\, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f,\, g \rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\| + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2, \end{aligned}$$

waaruit de driehoeksongelijkheid volgt. $\oslash$

Voorbeeld 6.5 We zullen de norm op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die hoort bij het inproduct (6.2) ook noteren met $\|\cdot\|_2$. Dus, voor $f \in C(\mathbb{R}/2\pi Z)$ geldt dat

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

$\oslash$

Definitie 6.6 'Loodrecht'

(a) Als $f, g \in E$ dan zeggen we dat f *loodrecht* op g staat, notatie $f \perp g$, indien $\langle f, g\rangle = 0$.

(b) Is $V \subset E$ een lineaire deelruimte, en $f \in E$, dan zeggen we dat f loodrecht op V staat, notatie $f \perp V$, indien $f \perp g$ voor alle $g \in V$.

(c) Zijn V, W twee lineaire deelruimten van E, dan zeggen we dat V en W loodrecht op elkaar staan, notatie $V \perp W$, indien $f \perp g$ voor ale $f \in V$ en $g \in W$.

$\oslash$

Het volgende lemma staat bekend als de *stelling van Pythagoras* voor het Hermite'se inproduct.

Lemma 6.7 *Als $f, g \in E$ en $f \perp g$, dan geldt*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Bewijs $\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2.$ $\square$

Definitie 6.8 Onder een *orthonormaal stelsel* in E verstaan we een afbeelding $K \to E$, $k \mapsto \epsilon_k$, met K een index-verzameling, die voldoet aan de volgende eigenschappen:

(a) Voor alle $k, l \in K$ met $k \neq l$ geldt $\epsilon_k \perp \epsilon_l$.

(b) Voor alle $k \in K$ geldt $\|\epsilon_k\| = 1$.

$\oslash$

Voorbeeld 6.9 Laat $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voorzien zijn van het Hermite'se inproduct (6.2). Neem $K = \mathbb{Z}$, en definieer $\epsilon_k : x \mapsto e^{ikx}$. Dan is $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ een orthonormaal stelsel van functies in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. $\oslash$

In het vervolg veronderstellen we steeds dat $k \mapsto \epsilon_k, K \to E$ een orthonormaal stelsel in E is.

Gevolg 6.10 *Is $J \subset K$ een eindig deel, en $\{c_j \mid j \in J\}$ een collectie complexe getallen, dan is*

$$\|\sum_{j\in J} c_j\epsilon_j\|^2 = \sum_{j\in J} |c_j|^2.$$

Bewijs Dit volgt door herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras. $\square$

Is $J \subset K$ eindig dan noteren we het lineaire opspansel van de vectoren $\{\epsilon_j \mid j \in J\}$ met E_J. Als $f \in E$, dan schrijven we bovendien

$$f_J = \sum_{j\in J} \langle f, \epsilon_j\rangle \epsilon_j.$$

We merken op dat $f_J \in E_J$ en dat $f - f_J \perp E_J$. Om deze reden noemen we f_J de orthogonale projectie van f op E_J. We merken op dat uit de stelling van Pythagoras volgt dat

$$\|f\|^2 = \|f_J\|^2 + \|f - f_J\|^2. \tag{6.4}$$

Lemma 6.11 *Zij $f \in E$. Dan neemt de functie $g \mapsto d(f,g) = \|f-g\|$, $E_J \to [0,\infty[$ zijn minimum aan in een uniek punt, namelijk $g = f_J$.*

Bewijs Veronderstel dat $g \in E_J$. Dan geldt dat $g - f_J \in E_J$, dus $f - f_J \perp g - f_J$. Hieruit volgt met behulp van de stelling van Pythagoras dat

$$\|f-g\|^2 = \|(f-f_J)\|^2 + \|g - f_J\|^2.$$

Als $g \neq f_J$, dan volgt hieruit dat $\|f-g\| > \|f - f_J\|$. □

Op grond van het bovenstaande lemma interpreteren we $\|f - f_J\|$ als de afstand van f to E_J.

Lemma 6.12 *Zij $f \in E$. Dan geldt voor iedere eindige deelverzameling $J \subset K$ dat*

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Bewijs Uit (6.4) volgt dat

$$\|f\|^2 \geq \|f_J\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2.$$

□

Op grond van het bovenstaande zouden we graag willen schrijven dat $\sum_{k \in K} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2$. Dit is niet zonder meer mogelijk, omdat K een oneindige verzameling kan zijn. Vandaar eerste de volgende definitie.

Definitie 6.13 Zij $(V, \|\cdot\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. Zij voorts K een verzameling en $v : K \to V, k \mapsto v_k$ een functie. We zeggen dat functie $k \mapsto v_k$ *sommeerbaar* is in V, indien er een $s \in V$ bestaat met de volgende eigenschap.

Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat voor elk eindig deel $J \subset K$ met $J \supset J_0$ geldt:

$$\|s - \sum_{j \in J} v_j\| < \epsilon.$$

⊘

Lemma 6.14 *Veronderstel, met de notatie van de bovenstaande definitie, dat $k \mapsto v_k$ sommeerbaar is. Dan is er precies één $s \in V$ met de bovenstaande eigenschap.*

Bewijs Laat ook t de bovenstaande eigenschap hebben. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een deel J_0 bij s, ϵ als boven, en een deel J_1 bij t, ϵ als boven. Neem $J = J_0 \cup J_1$, dan is J eindig, en

$$\|s - t\| \leq \|s - \sum_{j \in J} v_j\| + \|\sum_{j \in J} v_j - t\| < 2\epsilon.$$

Dit geldt voor elke $\epsilon > 0$, dus $\|s - t\| = 0$, dus $s = t$. □

In het vervolg zullen we met

$$s = \sum_{k \in K} v_k$$

(in V) bedoelen dat de functie $k \mapsto v_k$ sommeerbaar is, terwijl $s \in V$ het unieke element is met de eigenschap van Definitie 6.13.

Lemma 6.15 *Zij K een verzameling, en $t : K \to \mathbb{R}$ een afbeelding met $t_k \geq 0$ voor alle $k \in K$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De functie $k \mapsto t_k$ is sommeerbaar.*

(b) *Er is een $M > 0$ zo dat voor alle eindige $J \subset K$ geldt $\sum_{j \in J} t_j \leq M$.*

Als (a) en (b) gelden, dan geldt bovendien dat $\sum_{k \in K} t_k \leq M$.

Bewijs Veronderstel eerst dat (a) geldt, en dat $t = \sum_{k \in K} t_k$. Dan is er een eindig deel $L_0 \subset K$ zo dat voor ieder eindig deel $L \subset K$ met $L \supset L_0$ geldt $|\sum_{l \in L} t_l - t| < 1$, dus ook $|\sum_{l \in L} t_l| \leq t + 1$. Zij

$$M = t + 1 + \sum_{l \in L_0} t_l$$

en laat $J \subset K$ een willekeurig eindig deel zijn. Dan geldt

$$\sum_{l \in J} t_j = |\sum_{l \in J \cup L_0} t_j - \sum_{l \in L_0 \setminus J} t_j| \leq \sum_{l \in J \cup L_0} t_j + \sum_{l \in L_0 \setminus J} t_j \leq M.$$

Dus (b) geldt.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt. Dan is de verzameling $S \subset [0, \infty[$ bestaande uit alle getallen $\sum_{j \in J} t_j$ met $J \subset K$ eindig naar boven begrensd door M. De verzameling S heeft dus een supremum t. Zij $\epsilon > 0$. Dan is $t - \epsilon$ geen bovengrens van S, dus er is een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat $\sum_{j \in J_0} t_j > t - \epsilon$. Voor elke eindige deelverzameling $J \subset K$ met $J \supset J_0$ geldt nu:

$$t - \epsilon \sum_{j \in J_0} t_j \leq \sum_{j \in J} t_j \leq t.$$

Hieruit volgt dat $\sum_{k \in K} t_k = t$ in de zin van Definitie 6.13.

Als (b) geldt, dan blijkt uit de bovenstaande redenering dat $t \leq M$, waaruit de laatste bewering volgt. □

Na deze bespreking van het begrip sommeerbaarheid kunnen we het volgende resultaat afleiden, dat bekend staat als de ongelijkheid van Bessel. We veronderstellen dat $(\epsilon_k)_{k \in K}$ een orthonormaal stelsel in E is.

Lemma 6.16 (De ongelijkheid van Bessel) *Voor elke $f \in E$ geldt dat*

$$\sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Bewijs Uit Lemma 6.12 volgt dat $\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$ voor elk eindig deel $J \subset K$. De gewenste ongelijkheid volgt nu door toepassing van Lemma 6.15. □

Definitie 6.17 Het orthonormale stelsel $(\epsilon_k)_{k \in K}$ in E heet *volledig* indien het lineaire opspansel E_K dicht ligt in E. ⊘

We brengen in herinnering dat het dichtliggen van E_K in E betekent dat de afsluiting van E_K ten aanzien van $\| \cdot \|$ gelijk is aan E. Dit betekent precies dat ieder punt van E limietpunt van E_K is. Ofwel, voor iedere $f \in E$ en iedere $\epsilon > 0$ bestaat een $g \in E_K$ zo dat

$$\|f - g\| < \epsilon.$$

We merken op dat er een eindig deel $J \subset K$ en een afbeelding $c : J \to \mathbb{C}$ bestaan zo dat $g = \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j$. De bovenstaande schatting kan dus ook geformuleerd worden als

$$\|f - \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j\| < \epsilon,$$

voor een eindige deelverzameling $J \subset K$ en een $c \in \mathbb{C}^J$.

Stelling 6.18 *De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:*

(a) *Het orthonormale stelsel $(\epsilon_k)_{k \in K}$ is volledig.*

(b) *Voor iedere $f \in E$ geldt*
$$f = \sum_{k \in K} \langle f, \epsilon_k \rangle \epsilon_k,$$
in E ten aanzien van de norm $\| \cdot \|$.

(c) *Voor iedere $f \in E$ geldt*
$$\|f\|^2 = \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2.$$

Bewijs We zullem de implicaties '(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a)' bewijzen.

Veronderstel eerst dat (a) geldt. Zij $f \in E$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een g in het lineaire opspansel E_K van de ϵ_k zo dat $\|f - g\| < \epsilon$. Er is een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat $g \in E_{J_0}$. Zij nu $J \subset K$ eindig, met $J \supset J_0$. Schrijf $f_J = \sum_{j \in J} \langle f, \epsilon_j \rangle \epsilon_j$. Dan is $f - f_J \perp g$ en $f - f_J \perp f_J$, dus $f - f_J \perp f_J - g$. Hieruit volgt dat

$$\|f - g\|^2 = \|(f - f_J) + (f_J - g)\|^2 = \|f - f_J\|^2 + \|f_J - g\|^2 \geq \|f - f_J\|^2.$$

We concluderen dat
$$\|f - f_J\| \leq \|f - g\| < \epsilon.$$

Hiermee is aangetoond dat (b) geldt.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een eindig deel $J \subset K$ zo dat $\|f - f_J\|^2 < \epsilon$. Hieruit volgt dat
$$\|f_J\|^2 = \|f\|^2 - \|f - f_J^2\| > \|f\|^2 - \epsilon.$$

Dit impliceert dat
$$\|f\|^2 - \epsilon \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2 \leq \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

We concluderen dat (c) geldt.

Veronderstel tenslotte dat (c) geldt, en dat $f \in E$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een eindig deel $J \subset K$ zo dat
$$\sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2 \geq \|f\|^2 - \epsilon^2,$$

dus $\|f_J\|^2 > \|f\|^2 - \epsilon^2$. We concluderen dat

$$\|f_J - f\|^2 = \|f\|^2 - \|f_J\|^2 < \epsilon^2,$$

dus $\|f_J - f\| < \epsilon$. Aangezien $f_J \in E_J \subset E_K$ is hiermee aangetoond dat f tot de afsluiting van E_K behoort. Aangezien dit voor willekeurige $f \in E$ geldt, concluderen we (a). $\square$

Deze in algemeenheid ontwikkelde theorie gaan we toepassen op $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van het Hermite'se inproduct (6.2). We nemen $K = \mathbb{Z}$ en voor $k \in \mathbb{Z}$ definiëren we de functie $\epsilon_k \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ door $\epsilon_k(x) = e^{ikx}$. We hebben reeds gezien dat het stelsel $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ orthonormaal is. Merk op dat voor elke $f \in E$ geldt dat

$$\langle f, \epsilon_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = (\mathcal{F}f)_k.$$

In het volgende lemma worden supnorm en kwadraat integraalnorm op E vergeleken.

Lemma 6.19 *Voor alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geldt $\|f\|_2 \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$.*

Bewijs Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan is

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\mathbb{R}}^2\, dx = \|f\|_{\mathbb{R}}^2.$$

□

Lemma 6.20 *Het orthonormale stelsel $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ is volledig in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ten aanzien van $\|\cdot\|_2$.*

Bewijs We passen de ontwikkelde theorie toe op $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voorzien van de norm $\|\cdot\|_2$ en merken op dat $E_{\mathbb{Z}}$ precies gelijk is aan de ruimte $P(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ van Fourier polynomen.

Veronderstel nu dat $f \in E$ en laat $\epsilon > 0$. Volgens Gevolg 5.37 een Fourier polynoom p zo dat $\|f - p\|_{\mathbb{R}} < \epsilon$. Wegens Lemma 6.19 volgt hieruit dat $\|f - p\|_2 < \epsilon$. Er bestaat dus een $p \in E_{\mathbb{Z}}$ zo dat $\|f - p\| < \epsilon$. We concluderen dat $E_{\mathbb{Z}}$ dicht ligt in E. □

Door toepassing van Stelling 6.18 concluderen we nu dat het volgende geldt.

Stelling 6.21 (Identiteit van Parseval) *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan is*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)_k\, \epsilon_k$$

met convergentie ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_2$.

Bovendien geldt de volgende identiteit van Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\mathcal{F}f)_k|^2.$$

We hebben hiermee niet alleen de gelijkheid van Parseval bewezen voor een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ maar ook dat een dergelijke f gegeven wordt door zijn Fourier reeks als we dit interpreteren met convergentie ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_2$. In Opmerking 5.24 vermeldden we reeds dat dit zeker niet algemeen geldt voor puntsgewijze of uniforme convergentie. Blijkbaar is convergentie ten aanzien van de kwadraat integraal norm $\|\cdot\|_2$ natuurlijker in de context van Fourier reeksen.

6.2 Uitbreiding naar lokaal Riemann-integreerbare functies

In het vervolg zullen we door limietovergang laten zien dat Stelling 6.21 algemener waar is voor iedere lokaal Riemann-integreerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek is met periode 2π. De ruimte van deze functies noteren we als voorheen met $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Ter voorbereiding maken we een aantal opmerkingen. Allereerst laat het Hermite'se inproduct op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zich met dezelfde integraalformule voortzetten tot een Hermite'se bilineaire vorm op $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die positief semidefiniet is. Hiermee bedoelen we dat $\langle f, f\rangle \geq 0$, maar het is mogelijk dat $\langle f, f\rangle = 0$ terwijl $f \neq 0$. Een voorbeeld van een functie met de laatste eigenschap is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(2k\pi) = 1$, voor alle $k \in \mathbb{Z}$, terwijl $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

We zetten de norm $\|\cdot\|_2$ voort tot een afbeelding $\|\cdot\|_2 : \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to [0, \infty[$ die de bekende eigenschappen van een norm heeft, met uitzondering van de eigenschap $\|f\|_2 = 0 \implies f = 0$. Een dergelijke afbeelding heet ook wel een *seminorm* op $\mathcal{R}$. Tenslotte merken we op dat voor $f, g \in \mathcal{R}$ met $f \perp g$ geldt dat $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Het volgende lemma dient ook ter voorbereiding.

Lemma 6.22 *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ een Riemann-integreerbare functie. Dan is er voor iedere $\epsilon > 0$ een continue functie $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ met $\|g\|_{[a,b]} \leq \|f\|_{[a,b]}$ en zo dat*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon.$$

Bewijs Voor $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ een Riemann-integreerbare functie schrijven we

$$\|\varphi\|_1 := \int_a^b |\varphi(x)|\, dx.$$

We merken op dat $\|\cdot\|_1$ voldoet aan de driehoeksongelijkheid.

We behandelen eerst het speciale geval waarin f gelijk is aan de karakteristieke functie $1_{[c,d]}$ van een deelinterval $[c, d] \subset [a, b]$. Dus, $f(x) = 1$ voor $x \in [c, d]$, en $f(x) = 0$ voor $x \in [a, b] \setminus [c, d]$. Zij $\epsilon > 0$. We definiëren de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g = 1$ op $[c, d]$, door $g = 0$ buiten $[c - \epsilon/2, d + \epsilon/2]$ en door

$$g(x) = \begin{cases} 2(x - c + \epsilon/2)/\epsilon & \text{als} \quad c - \epsilon/2 \leq x < c, \\ 2(d + \epsilon/2 - x)/\epsilon & \text{als} \quad d < x \leq d + \epsilon/2. \end{cases}$$

Dan is g continu, en er geldt dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{[a,b]}$. Verder geldt:

$$\|f - g\|_1 \leq \int_{c-\epsilon/2}^{c} 2(x - c + \epsilon/2)/\epsilon\, dx + \int_d^{d+\epsilon/2} 2(x + \epsilon/2 - x)/\epsilon\, dx = \epsilon/2 < \epsilon.$$

De stelling is dus waar voor $f = 1_{[c,d]}$. Zij nu $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ een willekeurige Riemann-integreerbare functie, en zij $M = \|f\|_{[a,b]}$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een verdeling $V = \{x_0 < \ldots < x_n\}$ van het interval $[a, b]$ zo dat

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}_{I(j)}\, f \cdot (x_j - x_{j-1}) < \epsilon/2.$$

Hierin staat $\mathrm{var}_{I(j)}\, f$ voor de variatie van f over het j-de deelinterval $I(j) = [x_{j-1}, x_j]$:

$$\mathrm{var}_{I(j)}\, f = \sup_{x,y \in I(j)} |f(x) - f(y)|.$$

Kies $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, dan is $|f(x) - f(\xi_j)| \leq \mathrm{var}_{I(j)}\, f$ voor alle $x \in I(j)$, dus

$$\int_a^b |f(x) - f(\xi_j)| 1_{I(j)}(x)\, dx \leq \mathrm{var}_{I(j)}(x_j - x_{j-1}).$$

Zij $s = \sum_j f(\xi_j) 1_{I(j)}$, dan is s Riemann-integreerbaar, en

$$\|f - s\|_1 \leq \sum_j \|(f - f(\xi_j)) 1_{I(j)}\|_1 < \epsilon/2.$$

Voor iedere j is er een continue functie $g_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ met $\|g\|_{[a,b]} \leq 1$, zo dat

$$\|g_j - 1_{I(j)}\|_1 \leq \epsilon/(2Mn + 1).$$

Definieer $g = \sum_j f(\xi_j) g_j$. Dan is g continu, $\|g\|_{[a,b]} \leq \|f\|_{[a,b]}$ en

$$\|s - g\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)| \|1_{I(j)} - g_j\|_1 \leq Mn\epsilon/(2Mn + 1) < \epsilon/2.$$

Er volgt dat

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - s\|_1 + \|s - g\|_1 \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

$\square$

Lemma 6.23 *Zij $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en*

$$\|f - g\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon.$$

Bewijs Er bestaat een $h \in C([-\pi, \pi])$ met $\|h\|_{[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ zo dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h(x)|\, dx < \pi\epsilon.$$

Hierbij bestaat een $g \in C([-\pi, \pi])$ met $\|g\|_{[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_\infty$, en met $g(-\pi) = g(\pi)$ zo dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - g(x)|\, dx < \pi\epsilon.$$

De functie g laat zich uniek voortzetten tot een functie $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Wegens de bovenstaande schattingen geldt voor deze voortzetting dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en

$$\|f - g\|_1 < \epsilon.$$

$\square$

Gevolg 6.24 *Laat $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $\epsilon > 0$. Dan bestaat er een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat*

$$\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

Bewijs Er bestaat een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en $\|f - g\|_1 < \epsilon^2/(2\|f\|_{\mathbb{R}} + 1)$. Hiervoor geldt:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\|f\|_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \, dx \\ &= 2\|f\|_{\mathbb{R}} \|f - g\|_1 < \epsilon^2. \end{aligned}$$

□

Stelling 6.25 *Zij $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan gelden de uitspraken van Stelling 6.21.*

Bewijs Voor elke eindige deelverzameling $J \subset \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\|f\|_2^2 = \|f_J\|_2^2 + \|f - f_J\|_2^2,$$

dus in het bijzonder

$$\|f_J\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Zij $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt dat $\|g_J - f_J\|_2 \leq \|g - f\|_2$, dus

$$\|f - f_J\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - g_J\|_2 + \|g_J - f_J\| \leq 2\|f - g\|_2 + \|g - g_J\|.$$

Er bestaat een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $\|f - g\|_2 < \epsilon/4$. Hiervoor geldt dus

$$\|f - f_J\|_2 \leq \epsilon/2 + \|g - g_J\|_2.$$

Vanwege de geldigheid van de stelling voor g bestaat er een eindig deel $J_0 \subset \mathbb{Z}$ zo dat voor alle eindige $J \subset \mathbb{Z}$ met $J \supset J_0$ geldt: $\|g - g_J\|_2 < \epsilon/2$. Voor al dergelijke J geldt dus

$$\|f - f_J\|_2 < \epsilon. \tag{6.5}$$

Hieruit volgt dat

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)_k \epsilon_k,$$

in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ten aanzien van de norm $\| \cdot \|_2$.

Uit de schatting (6.5) volgt ook dat

$$\|f_J\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f - f_J\|_2^2 > \|f\|_2^2 - \epsilon^2.$$

Hieruit concluderen we de gelijkheid van Parseval:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(\mathcal{F}f)_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

□

Appendix: Riemann-integreerbaarheid voor vectorwaardige functies

In de vectorwaardige context is het werken met onder- en bovensommen minder geschikt. In plaats daarvan werken we met Riemann-sommen.

Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een begrensde functie, dwz. er bestaat een $M > 0$ zo dat $\|f(x)\| \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$. Onder een verdeling van het interval $I = [a, b]$ verstaan we een eindige verzameling $V \subset I$ met $a, b \in V$. Zij $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de ordening naar grootte van de elementen van V. We schrijven ook

$$V = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b\}.$$

Onder een verzameling Ξ van strooipunten bij V verstaan we een collectie punten $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\} \subset I$ met $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ voor alle $1 \leq j \leq p$. Bij V en Ξ definiëren we de Riemann-som $S(f, V, \Xi)$ door

$$S(f, V, \Xi) := \sum_{j=1}^{p} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

De definitie van Riemann-integreerbaarheid kan als volgt gegeneraliseerd worden van scalaire functies naar vectorwaardige functies.

Definitie A.1 De functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heet Riemann-integreerbaar indien de volgende condities vervuld zijn:

(a) f is begrensd;

(b) voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat een verdeling V van $[a, b]$ zo dat voor elk tweetal collecties Ξ_1, Ξ_2 van strooipunten bij V geldt dat

$$\|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\| < \epsilon. \tag{A.1}$$

$\oslash$

Lemma A.2 *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een begrensde functie zijn. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De functie f is Riemann-integreerbaar.*

(b) *Voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ geldt dat de functie $f_v : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle f(x), v\rangle$ Riemann-integreerbaar is.*

(c) *Er bestaat een unieke vector $I(f) \in \mathbb{R}^n$ met de volgende eigenschap. Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat een verdeling V van $[a, b]$ zo dat voor elke collectie Ξ van strooipunten bij V geldt dat*

$$\|S(f, V, \Xi) - I(f)\| < \epsilon. \tag{A.2}$$

Bewijs Voor $n = 1$ is dit resultaat bewezen in Inleiding Analyse. We veronderstellen nu dat algemener $n \geq 1$. Veronderstel dat (a) geldt en zij $v \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt voor iedere verdeling V en iedere collectie strooipunten Ξ daarbij dat

$$\langle S(f, V, \Xi), v\rangle = S(f_v, V, \Xi).$$

Zij $\epsilon > 0$. Wegens (a) bestaat er een verdeling V zo dat (A.1) geldt voor alle collecties strooipunten Ξ_1, Ξ_2 bij V, met $\epsilon/(\|v\| + 1)$ in plaats van ϵ. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} |S(f_v, V, \Xi_1) - S(f_v, V, \Xi_2)| &= |\langle S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2), v\rangle| \\ &\leq \|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\|\|v\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de Riemann-integreerbaarheid van f_v.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $e_1, \ldots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ en schrijf $f = (f_1, \ldots, f_n)$, dan is $f_j = f_{e_j}$. Met (b) volgt dat iedere component f_j Riemann-integreerbaar is. Definieer $I(f) \in \mathbb{R}^n$ door $I(f)_j = \int_a^b f_j(x)\, dx$. Dan volgt voor iedere j het bestaan van een verdeling V_j van $[a, b]$ zo dat

$$\overline{S}(f_j, V_j) - \underline{S}(f_j, V_j) < \epsilon/n.$$

Deze schatingen gelden ook met V_j vervangen door de gemeenschappelijke verfijning $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Voor iedere collectie Ξ van strooipunten bij V geldt nu dat $S(f_j, V, \Xi)$ en $I(f)_j$ tussen $\underline{S}(f_j, V)$ en $\overline{S}(f_j, V)$ liggen, dus ook

$$|S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| < \epsilon/n.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \|S(f, V, \Xi) - I(f)\| &\leq \sum_{j=1}^{n} |S(f, V, \Xi)_j - I(f)_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| < n\epsilon/n = \epsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de uitspraak over de existentie in (c).

Voor de uniciteit redeneren we als volgt. Stel dat $I(f) \in V$ de geformuleerde eigenschap heeft. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een verdeling V van $[a, b]$ zo dat voor elke collectie strooipunten Ξ bij V geldt dat (A.2). Hieruit volgt voor de j-de component dat

$$|S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| = |S(f, V, \Xi)_j - I(f)_j| < \epsilon.$$

Hieruit volgt dat f_j Riemann-integreerbaar is, met integraal $I(f)_j$. Dus $I(f)$ is uniek.

Veronderstel tenslotte dat (c) geldt. Zij $\epsilon > 0$. Er bestaat een verdeling V zo dat (A.2) geldt met $\epsilon/2$ in plaats van ϵ. Is Ξ_1, Ξ_2 een tweetal collecties strooipunten bij V, dan volgt

$$\begin{aligned} &\|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\| \\ &\quad \leq \|S(f, V, \Xi_1) - I(f)\| + \|I(f) - S(f, V, \Xi_2)\| < 2\epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Dus f is Riemann-integreerbaar. □

Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integreerbaar, dan noemen we de unieke $I(f) \in \mathbb{R}^n$ die voldoet aan conditie (c) om voor de hand liggende redenen de Riemann-integraal van f over $[a, b]$, en we schrijven

$$\int_a^b f(x)\, dx = I(f).$$

Uit het bovenstaande volgt dat de integraal bepaald is door componentsgewijze integratie:

$$I(f)_j = \int_a^b f_j(x)\, dx, \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Opmerking A.3 In het bijzonder geldt dat iedere continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integreerbaar is. In Paragraaf 5.1 hebben we deze relatie niet hoeven leggen, omdat we de integraal direct konden definiëren. ⊘

We hebben nu voldoende achtergrond ontwikkeld om de driehoeksongelijkheid voor vectorwaardige Riemann-integralen te bewijzen.

Lemma A.4 *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een Riemann-integreerbare functie $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. Dan is ook de functie $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ Riemann-integreerbaar op $[a,b]$, en er geldt*

$$\left\| \int_a^b f(x)\ dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\ dx.$$

Bewijs We tonen eerst aan dat $\|f\|$ Riemann-integreerbaar is. Dit is het lastigste deel van het bewijs. De rest van het bewijs is hetzelfde als dat voor een continue functie f, zie de vorige paragraaf.

Zij $\epsilon > 0$. Voor iedere $1 \leq k \leq n$ bestaat een verdeling V_k zo dat

$$\overline{S}(f_k, V_k) - \underline{S}(f_k, V_k) < \epsilon/n.$$

Voor de gemeenschappelijke verfijning $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ van deze verdelingen gelden deze schattingen met V in plaats van V_k. Schrijf $V = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_p\}$ en zij $\Xi_1 = \{\xi_{1j}\}$ en $\Xi_2 = \{\xi_{2j}\}$ een tweetal collecties van strooipunten bij V. Dan geldt

$$\begin{aligned}
S(\|f\|, V, \Xi_1) - S(\|f\|, V, \Xi_2) &= \sum_{j=1}^{p} (\|f(\xi_{1j})\| - \|f(\xi_{2j})\|)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \|f(\xi_{1j}) - f(\xi_{2j})\|(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |f_k(\xi_{1j}) - f_k(\xi_{2j})|(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (\sup_{I(j)} f_k - \inf_{I(j)} f_k)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (\overline{S}(f_k, V) - \underline{S}(f_k, V)) < n\epsilon/n = \epsilon.
\end{aligned}$$

Deze schatting geldt ook met verwisseling van Ξ_1 en Ξ_2, dus

$$|S(\|f\|, V, \Xi_1) - S(\|f\|, V, \Xi_2)| < \epsilon.$$

We concluderen dat $\|f\|$ inderdaad Riemann-integreerbaar is. Schrijf $I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$. Er bestaat een $v \in \mathbb{R}^n$ met $\|v\| = 1$, zo dat $\langle I(f), v \rangle = \|I(f)\|$. (Als $I(f) \neq 0$, dan kunnen we $v = I(f)/\|I(f)\|$ nemen.) Nu geldt

$$\begin{aligned}
\|I(f)\| = \langle I(f), v \rangle &= \int_a^b \langle f(x), v \rangle\ dx \\
&\leq \int_a^b |\langle f(x), v \rangle|\ dx \\
&\leq \int_a^b \|f(x)\| \|v\|\ dx \\
&= \int_a^b \|f(x)\|\ dx.
\end{aligned}$$

□

Voorbeeld A.5 Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ is Riemann-integreerbaar indien zowel $f_1 = \mathrm{Re} f$ als $f_2 = \mathrm{Im} f$ Riemann-integreerbaar zijn. Bovendien is in dat geval

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + i \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Ook is $|f|$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

$\oslash$

Voorbeeld A.6 Schrijf ϵ_k voor de functie $x \mapsto e^{ikx}$. Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een lokaal Riemann integreerbare functie, die periodiek is met periode 2π, dan zijn zowel de functies $f_1 = \mathrm{Re} f$ als $f_2 = \mathrm{Im} f$ lokaal Riemann-integreerbaar, en ook de functies $x \mapsto f_1 \cos kx + f_2 \sin kx$ en $x \mapsto -f_1(x) \sin kx + f_2(x) \cos kx$. Dit zijn het reële en het imaginaire deel van de functie

$$x \mapsto f(x) e^{-ikx}.$$

Deze functie is dus ook lokaal Riemann-integreerbaar. Er geldt dat

$$|(\mathcal{F} f)_k| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{\mathbb{R}},$$

waar $\|f\|_{\mathbb{R}}$ staat voor de supnorm van f over $\mathbb{R}$. $\oslash$

Product van Riemann-integreerbare functies

In Hoofdstukken 5 en 6 van dit dictaat maken we regelmatig gebruik van het volgende resultaat voor Riemann-integreerbare functies.

Lemma A.7 *Veronderstel dat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ een tweetal Riemann-integreerbare functies zijn. Dan is ook de productfunctie $fg : x \mapsto f(x)g(x)$, $[a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar.*

Bewijs Deel van de eis van Riemann-integreerbaarheid is dat f en g begrensd zijn. De sup-normen geven we aan met $M_f = \|f\|_{[a,b]}$ en $M_g = \|g\|_{[a,b]}$. Zij $I \subset [a, b]$ een deelinterval. Dan geldt voor alle $x, y \in I$ dat

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)| \\ &\leq \|f\|_{[a,b]} |g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)| \|g\|_{[a,b]} \\ &\leq \mathrm{var}_I\, f \cdot \|g\|_{[a,b]} + \mathrm{var}_I\, g \cdot \|f\|_{[a,b]} \\ &\leq (\mathrm{var}_I\, g + \mathrm{var}_I\, f)(M_f + M_g). \end{aligned}$$

Hierin zijn de variaties $\mathrm{var}_I\, f$ en $\mathrm{var}_I\, g$ gedefinieerd als in het dictaat Inleiding Analyse. Zij $\epsilon > 0$. Uit de Riemann-integreerbaarheid van f en g volgt het bestaan van een verdeling $V = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ van $[a, b]$, zo dat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \epsilon / 2(M_f + M_g + 1), \qquad \overline{S}(g, V) - \underline{S}(g, V) < \epsilon / 2(M_f + M_g + 1)$$

(gebruik een gemeenschappelijke verfijning). Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
\overline{S}(fg,V) - \underline{S}(fg,V) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}_{I(j)}(fg)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq (M_f + M_g) \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{var}_{I(j)}\, f + \mathrm{var}_{I(j)}\, g)(x_j - x_{j-1}) \\
&= (M_f + M_g)(\overline{S}(f,V) - \underline{S}(f,V) + \overline{S}(g,V) - \underline{S}(g,V)) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Gevolg A.8 *Laat $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, en laat $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integreerbaar zijn. Dan is de functie $fg : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integreerbaar.*

Bewijs Schrijf $f = f_1 + if_2$ en $g = g_1 + ig_2$ met f_1, f_2, g_1, g_2 reëelwaardig. Door toepassing van het bovenstaande lemma volgt dat $f_1g_1 - f_2g_2$ en $f_1g_2 + f_2g_1$ Riemann-integreerbaar zijn. Hieruit volgt dat $fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1)$ Riemann-integreerbaar is. □

Index