Opgaven Functies en Reeksen

E.P. van den Ban

Herzien, Juli 2019

1 Opgaven bij Hoofdstuk 1

Opgave 1.1 Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar iedere variabele en zij $\operatorname{grad} f(x) = 0$ voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat f constant is. $\oslash$

Opgave 1.2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x, y) = \left(1 - x^2\right) \left(1 - y^2\right)$.

a) Bereken alle stationaire punten van f.

b) Onderzoek in alle stationaire punten of f een lokaal maximum, een lokaal minimum of geen van beide heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau van f en de gebieden waar $f > 0$, resp. $f < 0$.

$\oslash$

Opgave 1.3 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x, y) = x\,y\,(x + y - 1)$.

a) Bewijs dat f vier stationaire punten heeft.

b) Bewijs dat f in precies één van deze punten een extremum heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau van f en de gebieden waar $f > 0$, resp. $f < 0$.

$\oslash$

Opgave 1.4 Beschouw de veeltermfunctie

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x + x\,y^2$$

van twee variabelen. Bereken de partiële afgeleiden $\partial f(x, y)/\partial x$ en $\partial f(x, y)/\partial y$ en bepaal de stationaire punten. Onderzoek of f zijn maximum en/of minimum aanneemt op het rechter halfvlak

$$V_+ = \{(x, y) \mid x \geq 0\},$$

respectievelijk op het linker halfvlak

$$V_- = \{(x, y) \mid x \leq 0\}.$$

Is dit zo, bepaal dan ook het maximum, resp. minimum. Beantwoord tenslotte dezelfde vragen met $f(x, y)$ vervangen door $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x - x\,y^2$. $\oslash$

Opgave 1.5 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$. Neem aan dat voor iedere $1 \leq i \leq n$ de functie f partieel differentieerbaar is naar de i-de variabele en dat de functie $D_i f$ begrensd is op U.

a) Bewijs dat f continu is.

b) Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die in $(0, 0)$ niet continu is, maar wel de eigenschap heeft dat beide eerste orde partiële afgeleiden in een omgeving van $(0, 0)$ bestaan. Merk op dat a) impliceert dat noodzakelijkerwijze één van de partiële afgeleiden onbegrensd is op iedere omgeving van $(0, 0)$. Verifieer dat dit bij uw voorbeeld het geval is.

$\oslash$

Opgave 1.6 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door: $f(x,\, y) = x\, y^3 + \mathrm{e}^{x\, y}$. Laat zien dat f in het punt $(1,\, 1)$ richtingsdifferentieerbaar is in iedere richting $v \in \mathbb{R}^2$. Geef een formule voor $D_v f(1,\, 1)$. $\oslash$

Opgave 1.7 We definiëren de functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $\varphi(x,\, y) = x\, y$. Laten $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbare functies zijn. Gebruik de kettingregel voor differentiëren langs een kromme om

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\varphi(f(t),\, g(t))$$

uit te drukken in f, g en hun afgeleiden f' en g'. Kunt u het gevonden resultaat ook op een andere manier begrijpen? Formuleer en bewijs een productregel voor differentiatie van een product van n functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\oslash$

Opgave 1.8 Laat $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ zijn en $m \in \mathbb{R}$. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

a) $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = m f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

b) $f(t\, x) = t^m\, f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en $t > 0$.

Hint: Onderzoek de afgeleide naar t van de functie:

$$t^{-m}\, f(t\, x) = t^{-m} f\left(t\, x_1,\, \ldots,\, t\, x_n\right).$$

De functie heet *positief homogeen van de graad* m als zij aan b) voldoet. De vergelijking in a) heet de *differentiaalvergelijking van Euler.*

Bewijs dat als f aan a) of b) voldoet, dan is f eenduidig vastgelegd door zijn waarden op de sfeer

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$$

met middelpunt in de oorsprong en straal gelijk aan 1. (Hint: zoek t waarvoor $\|t\, x\| = 1$.) $\oslash$

Opgave 1.9

a) Zij $f(x) = \varphi(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, waarin $\varphi :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ een nader te bepalen tweemaal differentieerbare functie is. Bewijs dat $\partial\|x\|/\partial x_j = x_j/\|x\|$. Bepaal de functies φ waarvoor

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial {x_i}^2} = 0$$

op $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Hint: herken een Euler differentiaalvergelijking voor de functie $\psi(r) = \varphi'(r)$.

b) Voor een differentieerbaar vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$ in een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ definieert men de *divergentie* $\operatorname{div} v : U \to \mathbb{R}$ door middel van de formule

$$(\operatorname{div} v)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}, \quad x \in U.$$

Zij nu $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en v gedefinieerd door $v_i(x) = \|x\|^{-n}\, x_i$, voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ en iedere $1 \leq i \leq n$. Gebruik uw berekening in a) om aan te tonen dat $\operatorname{div} v = 0$.

$\oslash$

Opgave 1.10 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(0,0) = 0$ en door

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{voor} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Toon aan dat f totaal differentieerbaar is in $(0,0)$ en bepaal $Df(0,0)$.

(b) Bepaal de richtingsafgeleide $D_v f(0,0)$ voor iedere $v \in \mathbb{R}^2$.

$\oslash$

Opgave 1.11 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(0,0) = 0$ en door

$$f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^4}, \quad \text{voor} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Toon aan dat f richtingsdifferentieerbaar in $(0,0)$ in iedere richting $v \in \mathbb{R}^2$. Bepaal tevens $D_v f(0,0)$.

(b) Toon aan dat f niet totaal differentieerbaar is in $(0,0)$. Hint: veronderstel dat f totaal differentieerbaar is in $(0,0)$, bepaal $Df(0,0)$ en bestudeer vervolgens $f(t^2,t)$.

$\oslash$

Opgave 1.12 Gegeven zijn de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f(t) = (t,\, \cos t), \qquad g(x,\, y) = \mathrm{e}^x \, \cos y.$$

Bereken de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren:

a) Door een formule voor $g \circ f$ te bepalen en die te differentiëren.

b) Door de kettingregel toe te passen.

$\oslash$

Opgave 1.13 Gegeven zijn de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t), \qquad g(x,\, y,\, z) = (x+y)^2 - z^2.$$

Bereken de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren:

a) Door een formule voor $g \circ f$ te bepalen en die te differentiëren.

b) Door de kettingregel toe te passen.

$\oslash$

Opgave 1.14

a) Gegeven zijn differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Bewijs dat $\operatorname{grad}(f \circ g) = (f' \circ g) \operatorname{grad} g$.

b) Gegeven zijn een differentieerbare functie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en een C^1 functie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Bewijs dat de i-de component van $\mathrm{grad}(f \circ g)(x)$ gelijk is aan het inproduct in $\mathbb{R}^p$ van de vector $(\mathrm{grad}\, f)(g(x))$ met de vector $\partial g(x)/\partial x_i$.

$\oslash$

Opgave 1.15 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f : U \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Zij $a,\, b \in U$ en onderstel dat het *lijnstuk*

$$L(a,\, b) := \{\, a + t\,(b-a) \mid\; t \in [0,\, 1]\,\}$$

van a naar b in zijn geheel bevat is in U. Defnieer $g(t) := f(a + t\,(b-a))$.

a) Bewijs dat er een $t \in]0,\, 1[$ is, waarvoor $g(1) - g(0) = g'(t)$. Laat zien dat bijgevolg

$$f(b) - f(a) = \langle \mathrm{grad}\, f(a + t\,(b-a)),\, b - a \rangle$$

en dat

$$|f(b) - f(a)| \le \|\mathrm{grad}\, f(a + t\,(b-a))\|\; \|b - a\|.$$

b) Bewijs dat als $\mathrm{grad}\, f$ begrensd is op $L(a,\, b)$, dan is

$$|f(b) - f(a)| \le M\,\|b - a\|, \quad \text{waarin} \quad M := \sup_{x \in L(a,\, b)} \|\mathrm{grad}\, f(x)\|.$$

c) Een deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ heet *convex* als voor iedere $a,\, b \in U$ geldt dat $L(a,\, b) \subset U$. Bewijs dat als U convex is en $\mathrm{grad}\, f$ is begrensd op U, dan is er een constante C met de eigenschap dat voor iedere $a,\, b \in U$ geldt $|f(b) - f(a)| \le C\,\|b - a\|$.

d) Bewijs: als U convex is en $\mathrm{grad}\, f = 0$ op U, dan is f constant op U.

$\oslash$

Opgave 1.16

a) Bewijs dat de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door $f(x,\, y) = (x + y, x^2 + y^2, x\,y)$, in ieder punt van $\mathbb{R}^2$ totaal differentieerbaar is en bereken de Jacobi-matrix van f.

b) Overeenkomstige vragen voor $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x,\, y,\, z) = x\,y\,z + x\,y + x$.

c) Idem voor $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $\varphi(x) = (1,\, x,\, x^2)$.

$\oslash$

Opgave 1.17 Gegeven zijn twee vaste vectoren b en c in $\mathbb{R}^n$. Bewijs dat elk der onderstaande afbeeldingen in ieder punt van $\mathbb{R}^n$ totaal differentieerbaar is. Bereken, voor iedere $x,\, v \in \mathbb{R}^n$ de afgeleide $Df(x)\,v = D_v f(x)$, *zonder gebruik te maken van coördinaten.*

a) $f(x) = \langle b,\, x \rangle$,

b) $f(x) = \langle b,\, x \rangle\, \langle c,\, x \rangle$,

c) $f(x) = \langle x, x \rangle$,

d) $f(x) = \langle b, x \rangle\, b$,

e) $f(x) = \langle x, x \rangle\, x$.

$\oslash$

Opgave 1.18 Zij $m \in \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ positief homogeen van de graad m, zie Vraagstuk 1.8. Neem aan dat f begrensd is op S en niet identiek gelijk aan nul.

a) Bewijs dat als $f(x)$ convergeert voor $x \to 0$, dan is $m \geq 0$. Bewijs dat omgekeerd, als $m > 0$, dan geldt dat $f(x) \to 0$ als $x \to 0$ terwijl, als $m = 0$, dan convergeert $f(x)$ voor $x \to 0$ dan en slechts dan als f constant is.

b) Zij nu $m > 0$ en definieer $f(0) = 0$. Bewijs dat als f richtingsdifferentieerbaar is in 0 in iedere richting, dan is $m \geq 1$. Is omgekeerd $m > 1$, dan is f richtingsdifferentieerbaar in het punt 0 in iedere richting en heeft richtingsafgeleide gelijk aan nul.

c) f is totaal differentieerbaar in het punt 0 dan en slechts dan als ofwel $m > 1$, in welk geval $Df(0) = 0$, ofwel $m = 1$ en f is een lineaire functie.

$\oslash$

Opgave 1.19 Gegeven is dat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ totaal differentieerbare functies zijn. Bewijs dat $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $F(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, een totaal differentieerbare functie is en bewijs dat de totale afgeleide DF gegeven wordt door de formule:

$$DF(x)(v) = \langle Df(x)(v), g(x) \rangle + \langle f(x), Dg(x)(v) \rangle, \qquad x, v \in \mathbb{R}^n.$$

Hierin is $v \in \mathbb{R}^n$ en $Df(x) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, dus $Df(x)(v) = (Df(x))(v) \in \mathbb{R}^p$, etcetera. $\oslash$

Opgave 1.20 Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ een totaal differentieerbare functie en $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ een lineaire afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn.

a) Voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$ is $Df(x) = L$.

b) Er is een $c \in \mathbb{R}^p$ met de eigenschap dat $f(x) = L(x) + c$ voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$.

Aanwijzing voor a) $\Rightarrow$ b): pas Vraagstuk 1.1 toe op $f - L$. $\oslash$

Opgave 1.21 Van $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven dat

$$(\mathrm{grad}\, f)(x, y) = (y\, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x - \frac{1}{y^2 + 1}).$$

Bereken alle f die hieraan voldoen. $\oslash$

Opgave 1.22 Van $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de Jacobi-matrix gegeven door

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2\, \mathrm{e}^x & 2y\, \mathrm{e}^x \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

Bereken f als ook nog gegeven is dat $f(0,\, 1) = (1\,, 0)$. $\oslash$

Opgave 1.23 De afbeeldingen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$g(x,\, y,\, z) = (x\,z,\, \log(y^2 + \mathrm{e}^z)), \quad h(x,\, y) = (x + y,\, x\,y).$$

Bereken de Jacobi-matrix van $h \circ g$ op twee manieren:

a) rechtstreeks, dat wil zeggen door $h \circ g$ te berekenen en de definitie van de Jacobi-matrix te gebruiken;

b) met behulp van de kettingregel.

$\oslash$

Opgave 1.24 De afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$f(x,\, y) = (x^2,\, y,\, x\,y), \quad g(x,\, y,\, z) = (x\,y\,z,\, z\,\sin(x\,y)).$$

Bereken de Jacobi-matrices van $f \circ g$ en $g \circ f$. $\oslash$

Opgave 1.25 Gegeven zijn differentieerbare afbeeldingen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Noem de componenten van g respectievelijk $g_1,\, \ldots,\, g_n$. Geef de Jacobi-matrices van $f \circ g$ en $g \circ f$ in termen van de partiële afgeleiden van f en de afgeleiden van de g_j. $\oslash$

Opgave 1.26 Gegeven is een differentieerbare functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. We definiëren $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $F(x,\, y) = f(x + y,\, x - y)$.
Geef een formule die $D_1F + D_2F$ uitdrukt in D_1f en D_2f. $\oslash$

Opgave 1.27 We beschouwen een differentieerbare functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. De functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $g(\rho,\, \phi) = f(\rho\,\cos\phi,\, \rho\,\sin\phi)$.

a) Geef een formule die de partiële afgeleiden van g uitdrukt in ρ, ϕ en de partiële afgeleiden van f.

b) Geef een formule die de partiële afgeleiden van f uitdrukt in ρ, ϕ en de partiële afgeleiden van g.

c) Geef een formule die

$$D_1{}^2 f + D_2{}^2 f$$

uitdrukt in ρ, ϕ en de (eventueel hogere orde) partiële afgeleiden van g.

$\oslash$

Opgave 1.28 De functie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$F(r,\, \theta,\, \phi) = (r\,\sin\theta\,\cos\phi,\, r\,\sin\theta\,\sin\phi,\, r\,\cos\theta).$$

Bereken de Jacobi-matrix van F. In welke punten is de determinant van deze matrix gelijk aan nul? $\oslash$

Opgave 1.29 Laten V en W open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn. Zij $f : V \to W$ bijectief en differentieerbaar en zij $f^{-1} : W \to V$ differentieerbaar. Bewijs dat voor iedere $a \in V$ de afgeleide $Df(a)$ bijectief is en dat $Df(a)^{-1} = D(f^{-1})(f(a))$. ⊘

Opgave 1.30 De verzameling van alle inverteerbare $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ wordt met $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ aangeduid, deze heet de *algemene lineaire groep in n reële variabelen*. Bewijs dat $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ een open deelverzameling is van $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en dat de afbeelding $A \mapsto A^{-1}$ continu is van $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ naar $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
Aanwijzing: gebruik dat als $A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, dan is $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dan en slechts dan als $\det A \neq 0$. Gebruik verder de *formule van Cramer* voor A^{-1}, die zegt dat

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{i+j}\,\frac{\det\left(A^{(ji)}\right)}{\det A}.$$

Hierin is $A^{(ji)}$ de $(n-1) \times (n-1)$-matrix die uit de matrix van A is verkregen door de i-de rij en de j-de kolom van de matrix van A te schrappen. ⊘

Opgave 1.31 Laten X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn en $f : X \to Y$ een bijectieve afbeelding met inverse afbeelding g. Zij ξ een inwendig punt van X en veronderstel dat voldaan is aan de volgende voorwaarden:

a) de afbeelding f is differentieerbaar in ξ en $Df(\xi)$ is bijectief,

b) $\eta := f(\xi)$ is inwendig punt van Y en g is continu in het punt η.

Bewijs dat g differentieerbaar is in $f(\xi)$ en dat $(Dg)(f(\xi)) = (Df(\xi))^{-1}$.
Aanwijzing: Zij $f(x) - f(\xi) = L(x)(x - \xi)$ als in Stelling 1.30. Bewijs dat als $y = f(x)$, $x \in X$ en $L(x)$ is inverteerbaar, dan is

$$g(y) = g(\eta) + L(g(y))^{-1}\,(y - \eta).$$

Pas nu Vraagstuk 1.30 toe. ⊘

Opgave 1.32 We beschouwen de functie $\gamma : t \mapsto (\cos t,\, \sin t)$.

a) Toon aan dat γ differentieerbaar is, en bepaal de afgeleide γ'.

b) Toon aan dat er geen $\tau \in [0,\, \pi]$ bestaat met de eigenschap dat

$$\gamma(\pi) - \gamma(0) = \pi\,\gamma'(\tau).$$

c) Toon aan dat er wel een $\tau \in [0, \pi]$ bestaat waarvoor

$$\|\gamma(\pi) - \gamma(0)\| \leq \pi\,\|\gamma'(\tau)\|.$$

Het analogon van de middelwaardestelling geldt dus in het algemeen niet voor vectorwaardige functies.

De schatting in c) is de in Vraagstuk 1.15, a) verkregen 'middelwaardeschatting' voor vectorwaardige functies. ⊘

Opgave 1.33 Laat zien dat

$$\|A\| \quad := \quad \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

een norm definieert op de ruimte $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ van lineaire afbeeldingen en dat voor alle $v \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $\|Av\| \leq \|A\| \|v\|$. Aanwijzing: ga eerst na dat

$$\|A\| \quad = \quad \sup_{\|v\|=1} \|Av\| \ .$$

$\oslash$

Opgave 1.34 Zij $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval. Toon aan dat voor $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de volgende uitspraken over het gedrag van f in $\xi \in I$ equivalent zijn.

1. De limiet

   $$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

   bestaat.

2. Er bestaat een $m \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat de functie $\rho : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

   $$\rho(h) \quad = \quad f(\xi + h) \ - \ f(\xi) \ - \ hm$$

   voldoet aan

   $$\lim_{h \to 0} \frac{|\rho(h)|}{|h|} \quad = \quad 0 \ .$$

3. Er bestaat een functie $L : I \longrightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die continu is in het punt ξ en waarvoor

   $$f(x) \quad = \quad f(\xi) \ + \ L(x) \cdot (x - \xi)$$

   voor alle $x \in I$.

Wat is het preciese verband tussen $m \in \mathbb{R}$, $L(\xi) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en de afgeleide van f in ξ ? $\oslash$

Opgave 1.35 Zij $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, differentieerbaar en $a \neq b$ met $L(a,b) \subseteq U$. Laat zien dat

$$\frac{\|h(b) - h(a) \ - \ Dh(\xi) \cdot (b - a)\|}{\|b - a\|} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{p} \sup_{x \in L(a,b)} \| \operatorname{grad} h_i(x) - \operatorname{grad} h_i(\xi) \|$$

voor alle $\xi \in [a, b]$. Hierbij hanteren we de conventie dat $\sup_{x \in L(a,b)} \|f(x)\| = \infty$ als f onbegrensd is op $L(a, b)$. Hint: beschouw $g(x) := h(x) - Dh(\xi) \cdot x$ en gebruik Opgave 1.15. $\oslash$

Opgave 1.36 Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en convex, $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ differentieerbaar en de afgeleide $Dh : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ een begrensde afbeelding. Toon aan dat er een constante $C > 0$ bestaat met de eigenschap, dat voor alle $a, b \in U$ geldt dat $\|h(b) - h(a)\| \leq C \cdot \|b - a\|$. $\oslash$

Opgave 1.37 Zij $h \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ met $h(0) = 0$ en de eigenschap, dat alle tweede partiële afgeleiden in alle punten nul zijn, ofwel $D^2 h = 0$. Bewijs dat h lineair is. $\oslash$

2 Opgaven bij Hoofdstuk 2

Opgave 2.1 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$\begin{aligned} f(x,\,y) &= \frac{2x\,y}{x^2+y^2} \quad \text{als} \quad (x,\,y) \neq (0,\,0) \\ f(0,\,0) &= 0. \end{aligned}$$

a) Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\,0)\}$.

b) Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ de functie $y \mapsto f(x,y)$ continu is en dat voor iedere $y \in \mathbb{R}$ de functie $x \mapsto f(x,y)$ continu is.

c) Schets de niveauverzamelingen van f voor de functiewaarden $-1,\,-\frac{1}{2},\,0,\,\frac{1}{2},\,1$. Hint: substitueer poolcoördinaten $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$. Welke waarden kan f aannemen?

d) Bewijs dat f niet continu is in $(0,\,0)$.

e) Bewijs dat desondanks

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,\,y) = f(0,\,0) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\,y).$$

$\oslash$

Opgave 2.2 Gegeven is een C^2 functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en een twee keer differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Toon aan dat

$$\frac{\partial^2 f(g(x,\,y))}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(g(x,\,y))}{\partial y\,\partial x}.$$

Waarschuwing: we hebben niet verondersteld dat de tweede orde afgeleide f'' van f continu is. $\oslash$

Opgave 2.3 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(0,0) = 0$ en door

$$f(x,y) = \frac{|x|xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{als} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Toon aan dat $D_1 f(0,y)$ bestaat voor alle $y \in \mathbb{R}$ en bepaal de functie $y \mapsto D_1 f(0,y)$.

(b) Toon aan dat $D_2 f(x,0)$ bestaat voor voor alle $x \in \mathbb{R}$ en bepaal de functie $x \mapsto D_2 f(x,0)$.

(c) Toon aan dat $D_2 D_1 f(0,0)$ en $D_1 D_2 f(0,0)$ bestaan maar niet gelijk zijn aan elkaar.

$\oslash$

Opgave 2.4 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^3$. Als $f : U \to \mathbb{R}$ een differentieerbare reëlwaardige functie is op U, dan is de gradiënt $\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^3$ van f een vectorveld in U. Als $v : U \to \mathbb{R}^3$ een differentieerbaar vectorveld is, dan is de *divergentie* $\operatorname{div} v : U \to \mathbb{R}$ van v gedefinieerd als

$$(\operatorname{div} v)(x) := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}.$$

Verder definieert

$$(\operatorname{rot} v)_1 = D_2 v_3 - D_3 v_2, \quad (\operatorname{rot} v)_2 = D_3 v_1 - D_1 v_3, \quad (\operatorname{rot} v)_3 = D_1 v_2 - D_2 v_1$$

een vectorveld $\operatorname{rot} v : U \to \mathbb{R}^3$ op U, dat de *rotatie* van v genoemd wordt.

a) Laat zien dat voor elke C^2 functie f op U geldt: $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

b) Laat zien dat voor elk C^2–vectorveld v op U geldt: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$.

⊘

Opgave 2.5 Zij $f(x, y) = e^{-x\,y}\, y$. Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$, dat voor iedere $y \geq 0$ de oneigenlijke integraal

$$F(y) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,y}\; y\, dx$$

bestaat, maar dat de functie $F : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ niet continu is in het punt 0.
Stelling 2.2 is dus niet zonder meer goed voor oneigenlijke integralen. ⊘

Opgave 2.6

a) Bereken $\int_0^A (x^2 + t)^{-2}\, dx$ voor $t > 0$ door differentiatie naar t van $\int_0^A (x^2 + t)^{-1}\, dx$.

b) Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty (x^2 + t)^{-2}\, dx$ en verifieer dat deze gelijk is aan min de afgeleide naar t van de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty (x^2 + t)^{-1}\, dx$.

c) Bereken $\int_0^\infty (x^2 + 1)^{-2}\, dx$ en $\int_0^\infty (x^2 + 1)^{-3}\, dx$.

⊘

Opgave 2.7 Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door:

$$f(a) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)/2}}{1 + t^2}\, dt.$$

a) Bewijs dat $f(0) = \pi/4$. Bewijs door differentiatie naar a, gevolgd door een substitutie van variabelen, dat geldt:

$$f'(a) = -\mathrm{e}^{-a^2/2} \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2/2}\; dx, \quad a > 0.$$

Definieer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door:

$$g(a) = f(a) + \left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2/2}\; dx \right)^2 /2.$$

b) Bewijs dat $g' = 0$ op $\mathbb{R}$. Concludeer dat $g(a) = g(0) = \pi/4$, voor alle $a \in \mathbb{R}$.

c) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}$ geldt dat $0 \leq f(a) \leq \mathrm{e}^{-a^2/2}$. Bewijs dat $f(a) \to 0$ als $a \to \infty$. Bewijs hiermee tenslotte dat

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\; dx = \sqrt{2\pi}.$$

Dit is een bekende formule van Gauss. ⊘

Opgave 2.8 Zij

$$F(x) := \int_0^{\pi/2} \log(1 + x\cos^2\theta)\, d\theta, \quad x > -1.$$

Bewijs door middel van differentiatie naar x en de substitutie $t = \sin\theta/\cos\theta$ dat

$$F'(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1+x}\right) dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt{1+x}}.$$

Bereken $F(x)$.
Hint: schrijf $G(u) = F\left(u^2-1\right)$ en onderzoek $G'(u)$. Wat is $F(0)$? $\oslash$

Opgave 2.9 Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu. Veronderstel dat f differentieerbaar is naar de eerste variabele en dat $D_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continu is. Definieer

$$F(x) = \int_a^x f(x,\, y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bewijs dat F continu differentieerbaar is en dat

$$F'(x) = f(x,\, x) + \int_a^x \frac{\partial f(x,\, y)}{\partial x}\, dy,\ x \in \mathbb{R}.$$

b) Bewijs dat

$$\int_a^c f(c,\, y)\, dy = \int_a^c f(x,\, x)\, dx + \int_a^c \int_a^x \frac{\partial f(x,\, y)}{\partial x}\, dy\, dx.$$

$\oslash$

Opgave 2.10 In de situatie van Gevolg 2.41, bewijs dat voor iedere $1 \le l \le k$ geldt dat

$$\frac{\partial^l q(x,\, \xi)}{\partial x^l}\Big|_{x=\xi} = \frac{f^{(l+1)}(\xi)}{l+1}.$$

In de notatie van Voorbeeld 2.42, bereken $\sigma'(0)$ en $\sigma''(0)$. $\oslash$

Opgave 2.11 Bewijs achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-x\,\sin t}\,\cos(x\,\cos t)\right) &= \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{-x\,\sin t}\,\sin(x\,\cos t)\right), \quad (x \neq 0),\\
\frac{d}{dx}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x\,\sin t}\,\cos(x\,\cos t)\, dt &= -\frac{\sin x}{x}, \quad (x \neq 0),\\
\int_0^y \frac{\sin x}{x}\, dx &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-y\,\sin t}\,\cos(y\,\cos t)\, dt, \quad (y > 0),\\
\left|\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-y\,\sin t}\,\cos(y\,\cos t)\, dt\right| &\le \int_0^\epsilon \mathrm{e}^{-y\,\sin t}\, dt + \int_\epsilon^{\pi/2} \mathrm{e}^{-y\,\sin t}\, dt\\
&\le \epsilon + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-y\,\sin\epsilon}, \quad (0 < \epsilon < \pi/2),\\
\lim_{y\to\infty}\int_0^y \frac{\sin x}{x}\, dx &= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Commentaar: in het latere hoofdstuk van het dictaat over Fourierreeksen wordt de limiet op een heel andere manier uitgerekend. $\oslash$

Opgave 2.12

a) Toon aan dat de functie $(x,\, y) \mapsto y/(x^2 + y^2)$ continu is op $[0,\, 1] \times [1,\, 2]$.

b) Controleer d.m.v. een direkte berekening dat

$$\int_1^2 \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy\, dx.$$

$\oslash$

Opgave 2.13 Gegeven zijn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < b$ en $0 < c < d$.

a) Toon aan dat de functie $f : (x,\, y) \mapsto 1/(x + y)$ continu is op $[a,\, b] \times [c,\, d]$.

b) Controleer d.m.v. een rechtstreekse berekening dat

$$\int_a^b \int_c^d \frac{1}{x + y}\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b \frac{1}{x + y}\, dx\, dy.$$

$\oslash$

Opgave 2.14 Gegeven is een continue functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Toon aan dat de integraal

$$\int_0^1 f(t)\, t^x (1 - t)^y\, dt$$

convergent is voor $x, y > -1$, en op dat gebied een continue functie van (x, y) definieert. $\oslash$

Opgave 2.15 Gegeven is een continue functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ met $f(0) = 1$. Toon aan dat de integraal

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\, dt$$

divergeert. $\oslash$

Opgave 2.16 Toon aan de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\, dt$$

convergeert. $\oslash$

Opgave 2.17

(a) Toon aan dat de oneigenlijke integraal

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

convergeert.

(b) Toon aan dat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$$

convergeert. Hint: dit lukt niet met het majorantie-criterium. Beschouw de integraal $\int_1^\beta \frac{\sin t}{t}\, dt$ en gebruik partiële integratie om de integraal te vergelijken met de integraal in (a).

⊘

Opgave 2.18 We bekijken nogmaals de volgende oneigenlijke integraal uit Vraagstuk 2.6:

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{1}{x^2+t}\, dx, \qquad (t > 0).$$

Gebruik in de volgende onderdelen direct de behandelde stellingen over oneigenlijke integratie.

(a) Laat zien dat de integraal convergeert voor iedere $t > 0$.

(b) Bewijs dat de functie F continu differentieerbaar is, met afgeleide

$$F'(t) = -\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+t)^2}\, dx.$$

(c) Toon aan dat voor $k \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^{k+1}}\, dx = \frac{(2k)!\pi}{2^{2k+1}(k!)^2}.$$

⊘

Opgave 2.19

(a) Laat zien dat door

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\cos(xt)\, dt$$

een continu differentieerbare functie gedefinieerd wordt.

(b) Toon aan dat $xf(x) = -2f'(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Toon aan dat

$$f(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4},$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Hint: differentieer de functie $g(x) = f(x)e^{x^2/4}$.

⊘

Opgave 2.20 Laat zien dat voor alle multi-indices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ geldt

$$D^\alpha x^\beta|_{x=0} = \begin{cases} \alpha! & \text{als} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{als} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Hierbij is $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ $\oslash$

Opgave 2.21 Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ open, en $\xi \in X$, $v \in \mathbb{R}^n$ zodat voor alle $t \in [0, r]$ geldt $\xi + tv \in X$. Zij $f : X \to \mathbb{R}$ een C^1-functie.

(a) Toon aan dat voor $0 \leq t \leq r$ geldt:

$$\frac{d}{dt} f(\xi + tv) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(\xi + tv) v_j.$$

(b) Toon met inductie aan: als $f \in C^k$, dan is

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} f(\xi + tv) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi + tv)\, v^\alpha, \qquad (0 \leq t \leq r).$$

Hierbij is de sommatie over multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Verder is gebruik gemaakt van de multi-index notaties:

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \qquad v^\alpha = v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}.$$

Hint: toon eerst met behulp van inductie aan dat de uitdrukking in het linkerlid van de gevraagde uitdrukking gelijk is aan

$$\frac{1}{k} \sum_{|\beta|=k-1} \sum_{j=1}^{n} D^{(\beta+e_j)} f(\xi + tv)\, v^{(\beta+e_j)}.$$

Hierin hebben we de notatie e_j voor de j-de standaard basisvector gebruikt, opgevat als multi-index.

(c) Veronderstel nu dat het lijnstuk $[\xi, \xi + v]$ bevat is in X en toon de volgende multi-dimensionale formule van Taylor aan. Als $f \in C^{k+1}$, dan

$$f(\xi + v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi)\, v^\alpha + R_k(v),$$

met

$$R_k(v) = \sum_{|\beta|=k+1} \frac{1}{\beta!} D^\beta f(\xi + \tau v)\, v^\beta$$

voor een $0 < \tau < 1$.

$\oslash$

Opgave 2.22 Toon aan dat de volgende identiteit geldt, voor alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k!}(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Hierbij is de multi-index notatie uit de voorgaande opgave gebruikt. Hint: gebruik de multi-dimensionale formule van Taylor.
Merk op dat de formule gezien kan worden als generalisatie van de binomiaalformule. $\oslash$

Opgave 2.23 In deze opgave zullen we laten zien dat de integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

niet absoluut convergent is. We doen dit door middel van een tegenspraak. Veronderstel dus dat de integraal wel absoluut convergent is.

(a) Toon aan dat uit de aanname volgt dat de integraal

$$\int_1^\infty \frac{(\sin x)^2}{x}\,dx$$

convergent is.

(b) Toon aan dat voor alle $R > 1$ geldt dat

$$\int_1^R \frac{(\sin x)^2}{x}\,dx \ge \int_{1+\pi/2}^{R+\pi/2} \frac{(\cos x)^2}{x}\,dx.$$

(c) Toon aan dat uit de aanname ook volgt dat de integraal

$$\int_1^\infty \frac{(\cos x)^2}{x}\,dx$$

convergeert.

(d) Laat zien dat (a) en (c) tot een tegenspraak leiden.

$\oslash$

3 Opgaven bij Hoofdstuk 3

Opgave 3.1 Voor $k \geq 1$ beschouwen we de functie $f_k : x \mapsto \sin(x/k)$. Toon aan dat $f_k \to 0$ uniform op $[-R, R]$ voor iedere $R > 0$. $\oslash$

Opgave 3.2 Zij V een verzameling. Een functie $f : V \to \mathbb{C}$ heet begrensd indien er een $M > 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in V$. Zij $B(V, \mathbb{C})$ de lineaire ruimte van begrensde functies $f : V \to \mathbb{C}$.

Voor $f \in B(V, \mathbb{C})$ definiëren we

$$\|f\|_V = \sup_{x \in V} |f(x)| = \sup\{|f(x)| \mid x \in V\}.$$

Dit getal heet ook wel de sup-norm van de functie f op V.

(a) Toon aan dat door $\| \cdot \|_V$ inderdaad een norm op $B(V, \mathbb{C})$ gedefinieerd wordt.

Als gevolg hiervan wordt door $d_V(f, g) := \|f - g\|_V$ een afstand op V gedefinieerd.

(b) Toon aan dat voor een rij $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $B(V, \mathbb{C})$ en een functie $f \in B(V, \mathbb{C})$ geldt dat de volgende uitspraken gelijkwaardig zijn:

- De rij f_k convergeert op V uniform naar f.
- In de metrische ruimte $(B(V, \mathbb{C}), d)$ geldt $\lim_{k \to \infty} f_k = f$.

(c) Veronderstel nu dat $V \subset \mathbb{R}^n$, en zij $C_b(V, \mathbb{C})$ de ruimte van begrensde continue functies $f : V \to \mathbb{C}$. Toon aan dat $C_b(V, \mathbb{C})$ een gesloten deelverzameling van $B(V, \mathbb{C})$ is.

$\oslash$

Opgave 3.3 Het doel van deze opgave is de volgende verscherping van Gevolg 3.13 te bewijzen. Zij $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval, en $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ een rij Riemann-integreerbare functies $I \to \mathbb{R}$. Veronderstel dat de rij f_k op I uniform convergeert naar een functie $f : I \to \mathbb{R}$. Dan is f Riemann-integreerbaar en

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Bewijs:

(a) Per definitie van Riemann-integreerbaarheid geldt dat iedere functie f_k begrensd is. Toon aan dat f begrensd is.

(b) Zij $V = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\}$ een verdeling van I. Toon aan dat voor de bovensommen van f en f_k ten aanzien van V geldt dat

$$|\overline{S}(f, V) - \overline{S}(f_k, V)| \leq \|f - f_k\|_I (b - a).$$

(c) Geef een soortgelijke schatting voor de ondersommen.

(d) Toon aan dat bij iedere $\epsilon > 0$ een $k \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor elke verdeling V van $[a, b]$ geldt dat:

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) \leq \overline{S}(f_k, V) - \underline{S}(f_k, V) + \frac{\epsilon}{2}.$$

(e) Toon aan dat f Riemann-integreerbaar op $[a, b]$ is.

$\oslash$

Opgave 3.4 Zij $I = [a, \infty[$, met $a \in \mathbb{R}$. Zij $g : I \to \mathbb{R}$ een niet-negatieve oneigenlijk Riemann-integreerbare functie en zij voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een lokaal Riemann-integreerbare functie $f_k : I \to \mathbb{R}$ gegeven met $|f_k| \leq g$ op I. Veronderstel tenslotte dat $f : I \to \mathbb{R}$ een functie is zodat $f_k \to f$ uniform op ieder deelinterval $[a, \beta] \subset I$.

(a) Toon aan dat de functie f lokaal Riemann integreerbaar op I is. Hint: gebruik de vorige opgave.

(b) Toon aan dat $|f| \leq g$. Waarom mag u nu concluderen dat f oneigenlijk Riemann-integreerbaar op I is?

(c) Toon aan dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een element $\beta_0 \in I$ bestaat zo dat

$$0 \leq \int_{\beta_0}^{\infty} g(t)\, dt < \epsilon/4$$

(d) Toon aan dat voor alle $\beta \in [\beta_0, \infty[$ geldt dat

$$\left| \int_{\beta}^{\infty} f(t)\, dt \right| < \epsilon/4, \quad \text{en} \left| \int_{\beta}^{\infty} f_k(t)\, dt \right| < \epsilon/4, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

(e) Toon aan dat

$$\int_a^{\infty} f(t)\, dt = \lim_{k \to \infty} \int_a^{\infty} f_k(t)\, dt.$$

$\oslash$

Opgave 3.5 Zij I een begrensd interval in $\mathbb{R}$ en zij f_n, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, een rij van continu differentieerbare complexwaardige functies op I.

(a) Neem aan dat de rij van afgeleiden $f_n{}'$ uniform convergeert naar de functie g en dat er een $a \in I$ en $c \in \mathbb{C}$ is, waarvoor $f_n(a)$ naar c convergeert als $n \to \infty$. Bewijs dat er een continu differentieerbare functie f op I is, waarvoor f_n uniform naar f convergeert als $n \to \infty$ en verder $f' = g$, $f(a) = c$.

Hint: gebruik de hoofdstelling van de integraalrekening en schrijf, voor iedere $x \in I$,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(y)\, dy$$

en bewijs dat dit voor $n \to \infty$ convergeert naar $c + \int_a^x g(y)\, dy$.

(b) Neem aan dat de reeks van functies $\sum_{k \geq 1} f_k{}'$ uniform convergent is en dat de reeks van getallen $\sum_{k \geq 1} f_k(a)$ convergeert. Bewijs dat de reeks van functies $\sum_{k \geq 1} f_k$ uniform convergeert, dat de som een continu differentieerbare functie is en dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_k(x), \quad x \in I.$$

Men noemt dit de *regel van differentiatie onder het somteken*.

$\oslash$

Opgave 3.6 Definieer de rij van functies $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, door

$$f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_k f_k(x)$ convergent is en bereken de som $s(x)$. Behandel hierbij het geval dat $x = 0$ apart. Is $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu? Bewijs dat de reeks $\sum_k f_k(x)$ niet uniform convergent is op $\mathbb{R}$.

(b) Zij $\delta > 0$. Bewijs dat de reeks $\sum_k f_k(x)$ uniform convergent is op $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \delta\}$.

$\oslash$

Opgave 3.7 We beschouwen een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in een metrische ruimte (V, d). Onder een **limietpunt** van de rij verstaan we een punt $a \in V$ met de eigenschap dat voor iedere $\varepsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $a_n \in B(a; \varepsilon)$. Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn, voor elke $a \in V$.

(a) Er bestaat een deelrij $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

(b) Het punt a is een limietpunt van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

We beperken ons vanaf nu tot $V = \mathbb{R}$ en nemen aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ begrensd is. We definiëren een nieuwe rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door

$$b_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

(c) Bespreek waarom dit een correcte definitie is.

(d) Toon aan dat de rij (b_n) monotoon dalend is.

(e) Toon aan dat de rij (b_n) convergent is.

De limiet van de rij (b_n) wordt ook wel genoteerd met

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

In het vervolg schrijven we $\lambda := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(f) Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat er voor elke $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $b_n - \varepsilon < \lambda \leq b_n$. Toon aan dat hierbij een $k \geq n$ bestaat zo dat $b_n - \varepsilon < a_k \leq b_n$.

(g) Toon aan dat λ een limietpunt is van de rij (a_n).

(h) Zij μ een limietpunt van de rij (a_n). Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $b_N < \lambda + \frac{1}{2}\varepsilon$. Toon aan dat hierbij een $k \geq N$ bestaat zo dat $\mu < a_k + \frac{1}{2}\varepsilon$. Toon aan dat $\mu \leq \lambda + \varepsilon$. Bewijs dat $\mu \leq \lambda$.

Zij L de verzameling limietpunten van de rij (a_n).

(i) Toon aan dat $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \max L$.

(j) Definieer en bespreek een vergelijkbare limiet $\liminf_{n\to\infty} a_n$. Merk in het bijzonder op dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min L.$$

$\oslash$

Opgave 3.8

(a) Toon aan dat door

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sin kx$$

een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

(b) Toon aan dat door

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{x^{2k}+1}$$

een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

$\oslash$

Opgave 3.9 Beschouw de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ in $\mathbb{R}$ met $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$.

(a) Bewijs dat de reeks convergent is.

(b) Bewijs dat de reeks niet absoluut convergent is.

(c) Construeer een bijectie $k \mapsto n(k)$ van $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ op zichzelf, zo dat de reeks

$$\sum_{k\geq 1} a_{n(k)}$$

convergent is met som 0.

$\oslash$

Opgave 3.10 Definieer de functie $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f_k(x) = (\sin x)^k$ en beschouw de reeks

$$\sum_{k\geq 0} f_k \qquad (*)$$

(a) Bepaal de verzameling S van punten $x \in \mathbb{R}$ waarin de reeks (*) puntsgewijs convergent is. Bepaal de bijbehorende somfunctie $g : S \to \mathbb{R}$.

(b) Op welke in S gelegen intervallen $I \subset \mathbb{R}$ convergeert (*) uniform met som g?

$\oslash$

Opgave 3.11 Gegeven zijn twee rijen $(f_k)_{k\geq 0}$ en $(g_k)_{k\geq 0}$ van functies $[0,1] \to \mathbb{R}$. Gegeven is verder dat $|f_k(x)| \leq g_k(x)$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ en $x \in [0,1]$.

Toon aan: als $\sum_{k\geq 0} g_k$ uniform convergent is op $[0,1]$, dan is ook $\sum_{k\geq 0} f_k$ uniform convergent op $[0,1]$. $\oslash$

4 Opgaven bij Hoofdstuk 4

Opgave 4.1 Definieer $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ als $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en $f(0) = 1$. Bewijs dat f geheel analytisch is. Bepaal de Taylor-reeks van f in het punt $z = 0$ en bepaal zijn convergentiestraal. $\oslash$

Opgave 4.2 Zij $c \in \mathbb{R}$ en zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1 + c\,x^2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zij $c \neq 1$. Bepaal, voor iedere $a \in \mathbb{R}$, de convergentiestraal van de Taylor-reeks van f in het punt a. Wat gebeurt er voor $c = 1$ met de convergentiestraal? $\oslash$

Opgave 4.3 Neem aan dat $\sum_{k \geq 0} c_k\,(z - a)^k$ convergentiestraal $\rho > 0$ heeft.

(a) Bewijs dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z} \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z - a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,k\,(z - a)^{k-1}, \quad |z - a| < \rho,$$

waarbij de machtreeks in het rechterlid convergentiestraal gelijk aan ρ heeft. Anders gezegd: machtreeksen mogen termsgewijs gedifferentieerd worden in hun open convergentieschijf.

(b) Differentieer de machtreeksen in (4.9), (4.10), (4.11) en (4.12) in het dictaat termsgewijs en identificeer de daarmee verkregen machtreeksen.

(c) Bepaal de machtreeks voor $(1 - z)^{-2}$ in $z = 0$. Wat is de convergentiestraal?

(d) Zij $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Bepaal de machtreeks voor $(1 - z)^{-1-m}$ in $z = 0$.

$\oslash$

Opgave 4.4 Er geldt de volgende *inverse-functiestelling voor complex differentieerbare functies*, waarvan we het bewijs hier niet geven, maar die u in het vervolg van dit vraagstuk mag gebruiken. Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar, $z_0 \in U$ en $f'(z_0) \neq 0$. Dan is er een open omgeving U_0 van z_0 in U, met de eigenschap dat de beperking f_0 van f tot U_0 een bijectieve afbeelding definieert van U_0 naar een open deelverzameling V_0 van $\mathbb{C}$, terwijl verder de inverse $g_0 : V_0 \to U_0$ van f_0 complex differentieerbaar is.

Zij $\sum_{k \geq 0} a_k\,(z - z_0)^k$ een machtreeks met positieve convergentiestraal in het punt z_0 en neem aan dat $a_1 \neq 0$. Bewijs dat er een éénduidig bepaalde machtreeks $\sum_{k \geq 0} b_k\,(w - a_0)^k$ met positieve convergentiestraal in het punt a_0 is, met de eigenschappen dat $b_0 = z_0$ en dat als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k, \quad g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(w - a_0)^k,$$

dan is $g(f(z)) = z$ voor alle z in een omgeving van $z = z_0$.

Bereken b_1 in termen van a_1 en bereken b_2 in termen van a_1 en a_2. $\oslash$

Opgave 4.5 Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en zij $f : U \to \mathbb{C}$ en $g : U \to \mathbb{C}$ complex analytisch. Zij verder $a \in U$ en z_j een rij in U met $z_j \neq a$ voor iedere j en $z_j \to a$ als $j \to \infty$. Neem tenslotte aan dat voor iedere j geldt dat $f(z_j) = g(z_j)$. Bewijs dat voor iedere $z \in U$ geldt dat $f(z) = g(z)$.

Hint: schrijf $h(z) = f(z) - g(z)$. Bewijs met volledige inductie over l dat voor iedere $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat $h^{(l)}(a) = 0$. Maak daarbij gebruik van de Taylor-ontwikkeling van $h(z)$ rond het punt a, en deel door een geschikte macht van $(z - a)$. $\oslash$

Opgave 4.6 Zij U een samenhangende en open deelverzameling van $\mathbb{C}$, die symmetrisch is ten aanzien van de spiegeling om de reële as, dat wil zeggen, als $z \in U$ dan is $\overline{z} \in U$. Zij verder $a \in U \cap \mathbb{R}$ en zij $f : U \to \mathbb{C}$ complex analytisch. Bewijs dat de volgende uitspraken a) – c) equivalent zijn.

(a) Als $x \in U \cap \mathbb{R}$ dan is $f(x) \in \mathbb{R}$.

(b) Voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$.

(c) Voor iedere $z \in U$ geldt dat $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Hint voor b) $\Rightarrow$ c): bewijs eerst dat de functie g, gedefinieerd door

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in U,$$

complex analytisch is in U. $\oslash$

Opgave 4.7

(a) Bewijs dat, als $z \neq 1$ en $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k + \frac{z^n}{1-z}.$$

Substitueer $z = -y^2$, integreer over y van 0 tot x en bewijs dat

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^n R_n(x),$$

waarin

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{y^{2n}}{1+y^2} \, dy.$$

(b) Bewijs dat de machtreeks

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad (*)$$

niet absoluut uniform convergent is op $[0, 1]$. Hint: bewijs dat deze uitspraak equivalent is met de uitspraak dat $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} = \infty$. Waarom is dit laatste waar?

(c) Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ en $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt dat

$$\frac{1}{1+x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Bewijs dat de machtreeks $(*)$ uniform convergent is op $[0, 1]$. Wat is de convergentiestraal? Wat is de som?

(d) Bewijs dat

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^n\, r_n, \quad \text{met} \quad \frac{1}{2}\,\frac{1}{2n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Bewijs dat $r_n \to 0$, ofwel $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \to \pi/4$ als $n \to \infty$. Daarbij laat de eerste ongelijkheid echter zien dat de convergentie uitermate langzaam is: als je een benadering met 6 nauwkeurige decimalen wilt hebben, dan moet je al zo'n half miljoen termen sommeren. Voor iedere extra nauwkeurige decimaal zijn 10 maal zoveel termen nodig.

Een stuk sneller gaat de benadering van $\pi/2^m$ met behulp van de partiële sommen van (*), als we $x = a_m = \tan(\pi/2^m)$ nemen met m een geheel getal dat groter is dan 2; de benadering gaat des te sneller naarmate m groter is. Hierbij kunnen de a_m inductief bepaald worden door $a_2 = 1$ en door a_{m+1} te bepalen als de positieve oplossing x van de vergelijking $a_m\, x^2 + 2x - a_m = 0$. Deze x kan zeer snel met zeer grote nauwkeurigheid bepaald worden met behulp van Newton's benaderingsprocedure.

⊘

Opgave 4.8 Het *convergentiecriterium van Dirichlet* zegt het volgende. Zij a_n, $n \geq 1$, een monotoon niet-stijgende rij van reële getallen die naar 0 convergeert als $n \to \infty$. Zij b_n, $n \geq 1$, een rij van complexwaardige functies op een verzameling V waarvan de partiële sommen uniform begrensd zijn, in de zin dat er een positieve constante M is met de eigenschap dat voor iedere $p \geq 0$ en iedere $z \in V$ geldt dat

$$\left| \sum_{n=1}^{p} b_n(z) \right| \leq M.$$

Dan is er een functie f op V waarvoor

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{p} a_n\, b_n(z) = f(z), \quad \text{uniform voor} \quad z \in V.$$

(a) Om dit te bewijzen, schrijf $s_p(z) = \sum_{n=1}^{p} a_n\, b_n(z)$ en $B_p(z) = \sum_{n=1}^{p} b_n(z)$. Bewijs met volledige inductie over q dat voor iedere $q > p \geq 1$ geldt dat

$$s_q(z) - s_p(z) = \sum_{n=p+1}^{q} (a_n - a_{n+1})\, B_n(z) - a_{p+1}\, B_p(z) + a_{q+1}\, B_q(z).$$

(Deze truc wordt ook wel *partiële sommatie*, of *Abel-sommatie* genoemd.) Gebruik nu dat $a_n - a_{n+1} \geq 0$ en $a_n \geq 0$ om aan te tonen dat

$$|s_q(z) - s_p(z)| \leq \sum_{n=p+1}^{q} (a_n - a_{n+1})\, M + a_{p+1}\, M + a_{q+1}\, M = 2a_{p+1}\, M.$$

Toon hiermee aan dat de functies $s_p(z)$ een uniforme Cauchy-rij vormen en maak het bewijs van Dirichlet's convergentiecriterium af.

(b) Als toepassing nemen we nu $b_n(z) = z^n$, en voor $V = V_\delta$ de verzameling der complexe getallen z, waarvoor $|z| \leq 1$ en $|1 - z| > \delta$, waarbij δ een strikt positief reëel getal is. Bewijs dat als a_n een rij van positieve reële getallen is die monotoon naar nul convergeert, dan is voor iedere $\delta > 0$ de machtreeks $\sum_{n \geq 1} a_n\, z^n$ uniform convergent op V_δ. (Deze conclusie geldt natuurlijk ook als we een willekeurige constante term a_0 aan de reeks toevoegen.)

Zij V_0 de verzameling der $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \leq 1$ en $z \neq 1$. Bewijs dat het voorgaande impliceert dat voor iedere $z \in V_0$ de machtreeks $\sum_{n \geq 1} a_n\, z^n$ convergeert en dat de functie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n$$

continu is op V_0.

(c) Neem nu $a_n = 1/n$ in b). Bewijs dat in dit geval de machtreeks niet absoluut convergeert als $|z| = 1$, hoewel zij wel voor iedere $\delta > 0$ uniform convergeert op V_δ.

Bewijs dat als $|z| < 1$, dan is $f(z)$ complex differentieerbaar, $f'(z) = 1/(1 - z)$ en $f(0) = 0$. Bewijs hiermee dat $f(z) = -\log(1 - z)$ als $|z| < 1$, waarbij we de standaardkeuze voor de hoekfunctie gebruiken. Gebruik tenslotte de continuïteit van $f(z)$ op V_0 om aan te tonen dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \log \frac{1}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1,\ z \neq 1.$$

Bewijs dat de reeks divergeert als $|z| > 1$ en ook als $z = 1$.

$\oslash$

Opgave 4.9 Het eerste onderdeel dient als voorbereiding voor de rest van de opgave.

(a) Zij $x > 0$. Toon aan dat $\lim_{k \to \infty} x^{1/k} = 1$. Hint: schrijf x als een e-macht.

We beschouwen nu een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van positieve reële getallen zo dat

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = S,$$

Hierbij is $S \in [0, \infty]$. We veronderstellen eerst dat $S < \infty$.

(b) Zij $\epsilon > 0$. Toon dat er een N bestaat zo dat $n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq S + \epsilon$.

(c) Toon aan dat voor alle $k \geq N$ geldt dat

$$a_k \leq a_N (S + \epsilon)^{k - N}$$

(d) Toon aan dat $\limsup_{k \to \infty} (a_k)^{1/k} \leq S + \epsilon$. Concludeer dat geldt

$$\limsup_{k \to \infty} (a_k)^{1/k} \leq S.$$

Dit geldt uiteraard ook als $S = \infty$.

(e) Toon aan dat

$$\limsup_{k \to \infty} (a_k)^{1/k} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Op soortgelijke wijze kan men een ongelijkheid voor liminf bewijzen. Dit leidt tot de volgende schattingen:

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \liminf_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

(f) Bewijs het volgende. Laat $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ een complexe machtreeks zijn met $c_k \neq 0$ voor alle $k \geq 0$. Veronderstel dat

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = L.$$

Dan is de convergentiestraal van de machtreeks gelijk aan $1/L$. (Laat zien dat deze uitspraak ook een natuurlijke en correcte interpretatie heeft in het geval dat $L = 0$ of $L = \infty$).

$\oslash$

Opgave 4.10 Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

(a) $\sum_{k\geq 0} k^2 z^k$

(b) $\sum_{k\geq 0} (-1)^k k(k-i) z^k$

(c) $\sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k^3}$

(d) $\sum_{k\geq 0} \frac{(z-i)^k}{k!}$

(e) $\sum_{k\geq 0} \frac{k! z^k}{2}$

(f) $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ (pas hier op: $a_k = 0$ voor k oneven).

$\oslash$

Opgave 4.11 Toon aan dat als $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ partieel differentieerbaar zijn en aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoen, dan voldoet ook de productfunctie $h = fg$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. $\oslash$

Opgave 4.12 Gegeven is een open deel $U \subset \mathbb{C}$, een punt $a \in U$ en een functie $f : U \to \mathbb{C}$ die complex differentieerbaar is in a.

(a) Toon aan dat

$$Df(a) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

voor zekere $u, v \in \mathbb{R}$.

(b) Toon aan dat $|f'(a)| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

(c) Toon aan dat $Df(a)$ het produkt is van een scalarvermenigvuldiging en een rotatie.

In het bijzonder is $Df(a)$ hoekbehoudend. De afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heet daarom wel conform in a. $\oslash$

Opgave 4.13

(a) We beschouwen een machtreeks $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ die convergent is op de open schijf $D(0;r)$ voor een $r>0$, en definiëren de functie $f : D(0;r) \to \mathbb{C}$ door

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n.$$

Veronderstel dat $f(x) \in \mathbb{R}$ voor alle $x \in D(0;r) \cap \mathbb{R}$. Toon aan dat $c_n \in \mathbb{R}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Toon aan dat voor alle $z \in D(0;r)$ geldt dat

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}).$$

(c) Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|e^{it}| = 1.$$

Opmerking: het is niet de bedoeling dat u gebruik maakt van de bekende eigenschappen van $\sin$ en $\cos$.

(d) Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

⊘

Opgave 4.14 We willen een C^1-kromme $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiëren met startpunt 1, en zo dat $\gamma(t)$ de eenheidscirkel $|z| = 1$ eenparig met snelheid 1 doorloopt

In formules vertaald betekent dit dat γ differentieerbaar moet zijn, γ' continu, en dat

1. $\gamma(0) = 1$,
2. $|\gamma(t)| = 1$,
3. $|\gamma'(t)| = 1$,

voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(a) Toon aan dat voor alle $t \in \mathbb{R}$ geldt dat $\langle \gamma(t)\,,\, \gamma'(t)\rangle = 0$. Hierin stelt $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ het Euclidische inproduct op $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ voor.

(b) Toon aan dat ofwel $\gamma'(t) = i\gamma(t)$ ofwel $\gamma'(t) = -i\gamma(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

In het vervolg eisen we bovendien dat $\gamma(t)$ op $t = 0$ de snelheidsvector $i = (0,1)$ heeft, dus $\gamma'(0) = i$.

(c) Toon aan dat in dit geval geldt: $\gamma'(t) = i\gamma(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

(d) Toon aan dat er een unieke C^1-kromme $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bestaat met de eigenschappen 1,2,3 en $\operatorname{Im} \gamma'(0) > 0$.

(e) Toon aan dat er een uniek paar differentieerbare functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bestaat met $f' = g$, $g' = -f$ en $f(0) = 1$, $g(0) = 0$.

We zien dus dat $\cos$ en $\sin$ als unieke oplossingen van een specifiek stelsel differentiaalvergelijkingen met beginwaarden geïntroduceerd kunnen worden. $\oslash$

Opgave 4.15

(a) Toon aan dat de machtreeks $\sum_{n\geq 1} n^{-1}z^n$ convergentiestraal 1 heeft.

Op de eenheidsschijf $D = D(0;1)$ definiëren we de functie f door

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

(b) Toon aan dat f complex differentieerbaar is op D met afgeleide

$$f'(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (z \in D).$$

(c) Toon aan dat $e^{-f(z)} = 1 - z$ voor alle $z \in D$.

(d) Toon aan dat er een complex differentieerbare functie $L : D(1;1) \to \mathbb{C}$ bestaat met $L(1) = 0$ en

$$e^{L(z)} = z, \qquad (z \in D(1;1)).$$

Hierna zullen we $\log z$ schrijven voor $L(z)$. In het vervolg mag u de bekende eigenschappen van sinus en cosinus gebruiken.

(e) Toon aan dat voor alle $z \in D(1;1)$ geldt dat

$$\log z = \log|z| + i\arg(z),$$

met $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$.

$\oslash$

Opgave 4.16 Hoofdstelling van de algebra.
Doel van deze opgave is een bewijs te geven van de hoofdstelling van de algebra.

Stelling Zij $p(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$ een veelterm van de graad $n \geq 1$, i.e., $a_n \neq 0$. Dan bestaat er een $w \in \mathbb{C}$ met $p(w) = 0$.

Bewijs: Veronderstel dat zo'n w niet bestaat. Hieruit zullen we een tegenspraak afleiden. Definieer de functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door $f(z) = 1/p(z)$.

(a) Bewijs dat er een $R > 0$ bestaat zo dat

$$|z| > R \quad \Rightarrow |z^n f(z)| < 2/|a_n|.$$

(b) Toon aan dat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een complex differentieerbare functie is en dat de complexe afgeleide f' een continue functie is.

(c) Schrijf $z = x + iy$ en bewijs dat

$$\frac{\partial}{\partial x} f(e^z) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} f(e^z), \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

(d) Bewijs dat de functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$F(x) := \int_0^{2\pi} f(e^x e^{iy}) dy$$

constant is. (Deze integraal van een complexwaardige functie is gedefinieerd als som van de integraal van het reële deel van de integrand en i maal de integraal van het imaginaire deel van de integrand. Zie Paragraaf 5.1 van het dictaat voor meer details).

(e) Bewijs dat voor alle $r \geq 0$ geldt

$$2\pi f(0) = \int_0^{2\pi} f(re^{iy}) dy.$$

(f) Bewijs dat $f(0) = 0$ en voltooi het bewijs.

$\oslash$

Opgave 4.17 Definieer de reëelwaardige functie f op $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$ door middel van

$$f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

Hierbij heet een reeks functies van de vorm $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k$ (puntsgewijs of uniform) convergent indien beide reeksen $\sum_{k \geq 0} g_k$ en $\sum_{k \geq 1} g_{-k}$ (puntsgewijs, resp. uniform) convergent zijn. Bovendien noteren we

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_{-k}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

(a) Ga na dat voor iedere $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ de reeks uniform convergeert op $[\epsilon, 1 - \epsilon]$. Concludeer dat f continu is op $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(b) Bewijs met Taylor-ontwikkeling van de functie $x \mapsto \sin(\pi x)$ in het punt 0 dat

$$\lim_{x \to 0,\, x \neq 0} f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ en iedere $l \in \mathbb{Z}$ geldt dat $f(x + l) = f(x)$. Bewijs dat f kan worden voortgezet tot een functie, die we ook f noemen, die continu is op $\mathbb{R}$. Concludeer dat de aldus gedefinieerde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue periodieke functie is, en dat f bijgevolg begrensd op $\mathbb{R}$ is.

(c) Toon aan dat

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=4f(x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Bewijs hiermee dat voor iedere $x\in\mathbb{R}$ geldt dat $|f(x)|\le\frac{1}{4}\sup|f|+\frac{1}{4}\sup|f|$, en daarmee dat $\sup|f|\le\frac{1}{2}\sup|f|$. Concludeer dat $f\equiv 0$ op $\mathbb{R}$, m.a.w., voor iedere $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ geldt dat

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-k)^2}.$$

Bewijs dat $f(0)=0$, resp. $f(1/2)=0$ leiden tot

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \text{resp.}\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

(d) Bewijs dat voor iedere gehele $n\ge 1$ geldt dat

$$\pi\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\tan(\pi\,x)=n!\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}-x\right)^{n+1}}.$$

(e) De *zèta-functie van Riemann* is gedefinieerd door

$$\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \operatorname{Re}s>1.$$

Bewijs dat

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^s}+2^{-s}\,\zeta(s).$$

Bewijs dat voor iedere $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat

$$\pi^{2m}\tan^{(2m-1)}(0)=(2m-1)!\,2^{2m}\left(1-2^{-2m}\right)\,2\,\zeta(2m).$$

Door $\tan^{(n)}$ voor $n=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,\ldots$ achtereenvolgens te bepalen, kan $\zeta(2m)$ voor $m=1,\,2,\,3,\,\ldots$ achtereenvolgens bepaald worden. Bereken $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$.

$\oslash$

Opgave 4.18 De functies $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$f(x,y)=\left(x^2y-\frac{1}{3}y^3,\frac{1}{3}x^3-xy^2\right),\quad \text{en}\quad g=f\circ f.$$

(a) Ga na dat f (totaal) differentieerbaar is en bereken de afgeleide $Df(x,y)$.

(b) Controleer of de functies $F,G:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$F(x+iy):=f_1(x,y)+if_2(x,y),\qquad G(x+iy):=g_1(x,y)+ig_2(x,y)$$

complex differentieerbaar zijn. $\oslash$

Opgave 4.19 Zij $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$ een machtreeks met convergentiestraal $\rho > 0$. Toon aan dat voor alle $-\rho < a < b < \rho$ geldt:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k b^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k a^{k+1}}{k+1}.$$

$\oslash$

Opgave 4.20 De functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \\ 4y^2 \end{pmatrix}, \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

en

$$g(u,v,w) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u+v-w \\ u-v \end{pmatrix}, \qquad ((u,v,w) \in \mathbb{R}^3).$$

(a) Bereken de Jacobi-matrix van f en toon aan dat f (totaal) differentieerbaar is.

(b) Bereken de Jacobi-matrix van g en toon aan dat g (totaal) differentieerbaar is. Wat valt op?

(c) De compositie $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definieert op de gebruikelijke manier een complexe functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dus

$$h(x+iy) = g_1(f(x,y)) + ig_2(f(x,y)), \qquad (x+iy \in \mathbb{C}).$$

In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is de functie h complex differentieerbaar?

$\oslash$

5 Opgaven bij Hoofdstuk 5

Opgave 5.1 Beschouw de Fourier-reeks

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\, e^{i\,k\,x},$$

waarbij $c_k = 0$ als $k < 0$. Bewijs dat deze Fourier-reeks absoluut uniform convergeert en bereken de som. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\,x)}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x}\, \cos(\sin x), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\,x)}{k!} = \mathrm{e}^{\cos x}\, \sin(\sin x).$$

$\oslash$

Opgave 5.2 Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die is gegeven door de Fourier-reeks

$$a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k\, \cos kx + \sum_{k\geq 1} b_k\, \sin kx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \mathrm{e}^{ikx},$$

waarbij de convergentie uniform is. Bewijs dat

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos kx\, dx, \quad k \geq 1, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin kx\, dx, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Bewijs dat f symmetrisch is in de zin dat $f(-x) = f(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$, dan en slechts dan als f gegeven is door een cosinusreeks, dat wil zeggen, voor iedere $k \geq 1$ geldt dat $b_k = 0$. En dat f antisymmetrisch is in de zin dat $f(-x) = -f(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$, dan en slechts dan als f gegeven is door een sinusreeks, dat wil zeggen, voor iedere $k \geq 0$ geldt dat $a_k = 0$. $\oslash$

Opgave 5.3 Schrijf $(\cos x)^3$ als een eindige Fourier-reeks. Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x)^3\, \mathrm{e}^{-ik\,x}\, dx = \begin{cases} 1/8 & \text{als} \quad k = \pm 3, \\ 3/8 & \text{als} \quad k = \pm 1, \\ 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Het *binomium van Newton* luidt:

$$(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} a^{n-l}\, b^l \quad \text{waarin} \quad \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-l)!\; l!}\,.$$

Bewijs voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dat

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x)^n\, \mathrm{e}^{-ik\,x}\, dx = \begin{cases} 2^{-n} \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} & \text{als} \quad k = n - 2l,\ l \in \mathbb{Z},\ 0 \leq l \leq n, \\ & \\ 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Bewijs dat als $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan is het gemiddelde van de functie $(\cos x)^{2l}$ gelijk aan $(2l)!/\left((l!)^2\, 2^{2l}\right)$. $\oslash$

Opgave 5.4 We beschouwen een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek is met periode 2π en definiëren de partiële som van de bijbehorende Fourierreeks door

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} (\mathcal{F}f)_k e^{ikx}.$$

Bewijs dat

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

met

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$$

en

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\ dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\ dx \qquad (1\ \leq k \leq n) \end{aligned}$$

(let op de afwijkende factor voor de integralen). $\oslash$

Opgave 5.5 In het vervolg noteren we met $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek zijn met periode 2π, d.w.z., $f(x+2\pi) = f(x)$, voor alle $x \in \mathbb{R}$. Voor $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiëren we de functie $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y)\ dy.$$

Deze functie heet de convolutie van f en g. In de leeswijzer is aangetoond dat $f * g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voor alle $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Convolutie kan dus gezien worden als bewerking op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. In de leeswijzer is verder aangetoond dat deze bewerking commutatief is, dwz. $f * g = g * f$ voor alle $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Toon aan dat de volgende rekenregels gelden, voor alle $f, g, h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $\lambda \in \mathbb{C}$:

(a) bi-lineariteit: $(f + \lambda g) * h = f * h + \lambda(g * h)$;

(b) associativiteit: $(f * g) * h = f * (g * h)$ voor alle $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

In het vervolg zullen we daarom spreken over het convolutie-product.

(c) Bewijs dat voor alle $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $k \in \mathbb{Z}$ geldt:

$$\mathcal{F}(f * g)_k = \mathcal{F}(f)_k \mathcal{F}(g)_k.$$

We noteren dit ook als $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

Tenslotte zullen we in deze opgave aantonen dat de ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geen eenheidselement ten aanzien van de convolutie bevat. Veronderstel dat $\varphi \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo'n element zou zijn, dus $\varphi * f = f$ voor alle $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(d) Toon aan dat $\mathcal{F}(\varphi)_k = 1$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

(e) Toon aan dat $\varphi * P_r \to 0$ puntsgewijs op $[-\pi, \pi\,] \setminus \{0\}$, voor $r \uparrow 1$.

(f) Leidt een tegenspraak af.

$\oslash$

Opgave 5.6 Zelfde notatie als in de voorgaande opgave. Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. We definiëren de functie $f^\vee : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ door $f^\vee(x) = \overline{f(-x)}$. Het is duidelijk dat $f^\vee \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. We schrijven $g = f * f^\vee$.

(a) Bewijs dat $\mathcal{F}(g)_k = |\mathcal{F}(f)_k|^2$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Gebruik de ongelijkheid van Bessel voor f om te bewijzen dat

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}(f)_k|^2 e^{ikx}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Bewijs de gelijkheid van Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)_k|^2.$$

Hierin staat $\|f\|_2$ voor de kwadraatintegraalnorm, gedefinieerd door

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

(d) Pas het bovenstaande toe op de functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd wordt door $f(x) = |x|$, en leidt een interessante identiteit af.

$\oslash$

Opgave 5.7 Zij D_n de in het dictaat gedefinieerde Dirichlet kern. Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Toon aan dat voor alle $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $f * \epsilon_k = \mathcal{F}(f)_k \, \epsilon_k$.

(b) Bewijs dat

$$f * D_n = \sum_{k=-n}^{n} \mathcal{F}(f)_k \epsilon_k.$$

$\oslash$

Opgave 5.8 Zij f de 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = x^2$ als $-\pi \leq x \leq \pi$. Maak een schets!

Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Bereken de symmetrische partiële sommen van de Fourier-reeks van f. Onderzoek de convergentie van de Fourier-reeks van f.

Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\,x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

waarbij de convergentie uniform is. Bewijs dat deze identiteit *niet* geldt als $|x| > \pi$. Ga na dat invullen van $x = 0$, resp. $x = \pi$ leidt tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

waarbij we de laatste identiteit al eens eerder hebben gezien. Probeer nog wat meer waarden van x, waarvoor u voor iedere positieve gehele n de waarde van $\cos(n\,x)$ expliciet kent. $\oslash$

Opgave 5.9 Zij f de 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = 1$ als $0 < x < \pi$ en $f(x) = -1$ als $-\pi < x < 0$. Voor $x = 0$ en $x = \pi$ mag u aan $f(x)$ iedere waarde geven die u wilt. Maak een schets!

Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Bereken de symmetrische partiële sommen van de Fourier-reeks van f. Onderzoek de convergentie van de Fourier-reeks van f. Wat gebeurt er voor $x = 0$ en voor $x = \pi$?

Bewijs dat

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin((2l-1)\,x)}{2l-1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{als} \quad 0 < x < \pi.$$

Wat gebeurt er als $-\pi < x < 0$, als $x = 0$ en als $x = \pi$? Op wat voor intervallen is de convergentie uniform? $\oslash$

Opgave 5.10 Zij c_k, $k \in \mathbb{Z}$, een rij van complexe getallen waarvoor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k\,c_k| < \infty.$$

Bewijs dat de Fourier-reeksen

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{ikx}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}\,k\,c_k\,\mathrm{e}^{ikx}$$

uniform aboluut convergent zijn. Noteer de som met $f(x)$, resp. $g(x)$. Bewijs, gebruik makend van Opgave 3.5, dat f continu differentieerbaar is en dat $f' = g$. Anders gezegd,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}\,k\,c_k\,\mathrm{e}^{ikx},$$

ofwel de Fourier-reeks mag termsgewijs gedifferentieerd worden.

Gebruik Opgave 5.8 om $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(n\,x)$ te berekenen. Wat wordt dit voor $x = \frac{\pi}{2}$? $\oslash$

Opgave 5.11 Zij f een continue 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvan de Fourier-coëfficiënten c_k, $k \in \mathbb{Z}$, absoluut sommeerbaar zijn. Zij I de integraal van f over het interval $[0,\,2\pi]$. Definieer, voor iedere $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, de Riemann-som

$$R_N := \frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi\,n}{N}\right).$$

Bewijs dat $I = 2\pi\, c_0$ en dat

$$R_N = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{l\,N}.$$

Hint: substitueer de Fourier-reeks van f in de definitie van R_N. Onderscheid bij de berekening het geval dat k een geheel veelvoud van N is en het geval dat k geen geheel veelvoud is van N. Bewijs dat $R_N \to I$ als $N \to \infty$.

Neem nu aan dat $f \in \mathrm{C}^m$, $m \geq 2$. Bewijs dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ met $k \neq 0$ geldt dat

$$|c_k| \leq C_m(f)\, |k|^{-m},$$

waarin

$$C_m(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f^{(m)}(x) \right| \, dx.$$

Bewijs hiermee dat

$$|R_N - I| \leq 4\pi\, C_m(f)\, \beta_m\, N^{-m},$$

waarin

$$\beta_m := \sum_{l=1}^{\infty} l^{-m}.$$

Dit betekent dat voor $N \to \infty$ de Riemann-sommen R_N des te sneller convergeren naar de integraal I van f over een periodeninterval, naarmate de functie f een gladdere periodieke functie is.

Opmerking Men noemt een numerieke integratiemethode met N tussenpunten van de orde m als de fout in de benadering van de integraal van iedere voldoend gladde functie geschat kan worden op een constante maal N^{-m}. Voor willekeurige gladde functies op een gegeven interval is de benadering met Riemann-sommen van de orde één, en niet beter. Om een benadering van hogere orde te krijgen moeten men andere lineaire combinaties van de waarden van de functie in de tussenpunten gebruiken dan de Riemann-sommen. Als geldt dat $f^{(j)}(2\pi) = f^{(j)}(0)$ voor alle $0 \leq j \leq m$, dan is de 2π-periodieke uitbreiding van f tot $\mathbb{R}$ een m keer continue differentieerbare functie. In dit geval doet zich het opmerkelijke verschijnsel voor dat de Riemann-som toch een benadering van de orde m oplevert. Men kan dit ook bewijzen zonder gebruik te maken van Fourier-reeksen, maar het is vrij natuurlijk om aan Fourier-reeksen te denken als men zich realiseert dat de voorwaarde $f^{(j)}(2\pi) = f^{(j)}(0)$ voor alle $0 \leq j \leq m$ betekent dat f een m keer continu differentieerbare uitbreiding heeft tot een 2π-periodieke functie.

Men zegt dat de Riemann-sommen R_N exponentieel snel naar I convergeren voor $N \to \infty$ als er constanten $C > 0$ en $0 < \rho < 1$ zijn, met de eigenschap dat voor iedere N geldt dat $|R_N - I| < C\, \rho^{-N}$. Men kan bewijzen dat dit het geval is indien $f(x) = \varphi\left(\mathrm{e}^{ix}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, voor een complex analytische functie φ die gedefinieerd is op een open omgeving U van de eenheidscirkel in het complexe vlak. $\oslash$

Opgave 5.12 In dit vraagstuk bekijken we hoe Fourier de naar hem vernoemde reeksen toepaste in zijn theorie van warmte. Is $u(x,\, t)$ de warmtedichtheid, die afhangt van één positiecoördinaat $x \in \mathbb{R}$ en van de tijd t, dan wordt de diffusie van de warmte beschreven door de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u(x,\, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial x^2}. \tag{5.1}$$

a) We maken de volgende veronderstellingen.

i) $0 < T \leq \infty$ en u is een continue functie op $\mathbb{R} \times [0,\, T[$.

ii) Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is $t \mapsto u(x,\, t)$ differentieerbaar. De functie $(x,\, t) \mapsto \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ is continu op $\mathbb{R} \times]0,\, T[$.

iii) Voor iedere $t \in]0,\, T[$ is de functie $u(t) : x \mapsto u(x,\, t)$ een tweemaal continu differentieerbare en 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$.

iv) u voldoet op $\mathbb{R} \times]0,\, T[$ aan de warmtediffusievergelijking (5.1).

Noteer, voor iedere $k \in \mathbb{Z}$, de k-de Fourier-coëfficiënt van de functie $u(t)$ met $c_k(t)$. Bewijs dat c_k continu is op $[0,\, T[$, differentieerbaar op $]0,\, T[$ en dat voor iedere $t \in]0,\, T[$ geldt dat ${c_k}'(t) = -k^2\, c_k(t)$. Bewijs dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ en $t \in]0,\, T[$ geldt dat $c_k(t) = c_k(0)\, \mathrm{e}^{-k^2 t}$. Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ en $t \in]0,\, T[$ geldt dat

$$u(x,\, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(0)\, \mathrm{e}^{-k^2 t}\, \mathrm{e}^{ik\,x}\,. \tag{5.2}$$

b) Zij nu u_0 een continue 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvan de Fourier-coëfficiënten $c_k(0)$ absoluut sommeerbaar zijn. Definieer de functie u op $\mathbb{R} \times [0,\, \infty[$ door middel van de formule (5.2). Bewijs dat u continu is op $\mathbb{R}\times[0,\, \infty[$ en dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $u(x,\, 0) = u_0(x)$. Bewijs, gebruikmakend van Opgave 5.10, dat op $\mathbb{R} \times]0,\, \infty[$ de functie u willekeurig vaak differentieerbaar is en voldoet aan de warmtediffusievergelijking (5.1).

$\oslash$

Opgave 5.13 Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oneven en 2π–periodiek. Bewijs dat $f(k\pi) = 0$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. $\oslash$

Opgave 5.14 Zet de op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerde functie $f(x) = \frac{1}{8}\pi x(\pi - |x|)$ 2π–periodiek voort naar heel $\mathbb{R}$ en ga na dat de zo gedefinieerde functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is. Bereken de Fouriercoëficiënten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ van f. $\oslash$

Opgave 5.15 Zij $-1 < q < 1$ en $p > 0$. Toon aan dat de Keplerse vergelijking $E - q \sin E = p$ een unieke oplossing E heeft en approximeer deze d.m.v. de contractiestelling (uit Inleiding Analyse). Aanwijzing: definieer $E_0 = p$ en recursief $E_{n+1} = q \sin E_n + p$. Men kan bewijzen dat de oplossing $E = E(p, q)$ willekeurig vaak differentieerbaar van (p, q) afhangt. $\oslash$

Opgave 5.16 Schrijf $\psi(p, q)$ voor de in opgave 5.15 verkregen oplossing van de Keplerse vergelijking $\psi(p, q) = p + q \sin \psi(p, q)$ en bewijs dat de eenduidigheid impliceert dat $\psi(p+2\pi, q) = \psi(p, q) + 2\pi$ en dat $\psi(-p, q) = -\psi(p, q)$. Hieruit volgt dat de functie $p \mapsto f(p, q) := \psi(p, q) - p$ 2π–periodiek en oneven in p is. Bewijs dat

$$\psi(p, q) \;=\; p \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k(q) \sin kp$$

waarin de Fouriercoëfficiënten

$$b_k(q) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p, q) \sin(kp)\, dp \tag{5.3}$$

snel afnemend zijn, in de zin dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een constante $C = C(n, q)$ is met de eigenschap dat $|b_k(q)| \leq Ck^{-n}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

Het probleem is dat de integraal (5.3) gedefinieerd is in termen van de functie $\psi(p, q) = p + f(p, q)$, die niet expliciet bekend is. Pas partiële integratie toe (en gebruik de Keplerse vergelijking) om dit te verbeteren. $\oslash$

Opgave 5.17 Beschouw de Fourierreeks van de functie $f(x) = \frac{\pi}{4}|\sin x|$.

(i) Toon aan dat de Fourierreeks puntsgewijs naar f convergeert.

(ii) Bereken de Fouriercoëfficiënten van f.

(iii) Bewijs dat de Fourierreeks uniform op $\mathbb{R}$ naar f convergeert.

$\oslash$

Opgave 5.18 Definieer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$ voor $x \in [-\pi, \pi[$ tot heel $\mathbb{R}$ voort te zetten tot een 2π–periodieke functie.

(i) Toon aan dat de Fourierreeks uniform op $\mathbb{R}$ naar f convergeert.

(ii) Bereken de Fouriercoëfficiënten van f.

$\oslash$

Opgave 5.19 Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} := \mathcal{F}(f)$ de bijbehorende rij Fourier-coëfficiënten.

(a) Toon aan: indien f continu differentieerbaar is en stuksgewijs C^3 dan bestaat er een $\gamma > 0$ met de eigenschap dat
$$|c_k| \leq \gamma(1 + |k|^3)^{-1} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

(b) Veronderstel nu dat $f \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat f stuksgewijs C^{p+2} is, met $p \geq 1$. Bewijs dat er een $\Gamma > 0$ bestaat zo dat
$$|c_k| \leq \Gamma(1 + |k|^{p+2})^{-1} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\oslash$

Opgave 5.20 We definiëren de functie $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ door
$$f(x) = \begin{cases} e^{ix} & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x \in \{0, \pi\}) \\ -e^{ix} & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$
en 2π-periodieke voortzetting tot $\mathbb{R}$. We definiëren $g = \operatorname{Re} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $h = \operatorname{Im} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De Fourier-coëfficiënten van deze functies worden genoteerd met $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(g)$ en $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \mathcal{F}(h)$.

(a) Toon aan dat $h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$ uniform op $\mathbb{R}$.

(b) Bereken de Fourier-coëfficiënten c_k (of alternatief de coëfficiënten a_k en b_k van de reële gedaante van de Fourier reeks).

(c) Bewijs dat $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \notin l^1(\mathbb{Z})$.

$\oslash$

Opgave 5.21 Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een continue 2π-periodieke functie met Fourier-coëfficiënten c_k, voor $k \in \mathbb{Z}$. Bewijs de volgende beweringen.

(a) Indien er een $\gamma > 0$ bestaat zo dat

$$|c_k| \leq \gamma(1 + |k|^3)^{-1} \quad \text{voor alle} \quad k \in \mathbb{Z},$$

dan is f continu differentieerbaar.

(b) Zij $p \in \mathbb{Z}_+$. Indien er een $\Gamma > 0$ bestaat zo dat

$$|c_k| \leq \Gamma(1 + |k|^{p+2})^{-1} \quad \text{voor alle} \quad k \in \mathbb{Z},$$

dan is $f \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

$\oslash$

6 Opgaven bij Hoofdstuk 6

Opgave 6.1 Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door: $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ als $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = f(-x)$ als $-\pi \leq x \leq 0$ en f is 2π-periodiek. Maak een schets van f. Is f continu?

a) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Bewijs dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergent is. Bewijs dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\,x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}\,x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Wat geeft dit voor $x = 0$?

b) Wat is, voor een willekeurige 2π-periodieke continue functie, de identiteit van Parseval? Bewijs dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

c) Leid uit a) af dat, voor iedere $0 \leq x \leq \pi$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)\,x) = \frac{\pi^2}{8}\,x - \frac{\pi}{8}\,x^2.$$

Bewijs vervolgens dat, voor iedere $0 \leq x \leq \pi$,

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \cos((2n+1)\,x) = \frac{\pi^2}{16}\left[x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] - \frac{\pi}{24}\left[x^3 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right].$$

$\oslash$

Opgave 6.2 Zij c een gegeven strikt positief reëel getal. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door: $f(x) = \mathrm{e}^{cx} + \mathrm{e}^{-cx}$ als $-\pi < x \leq \pi$, en f is 2π-periodiek.

a) Maak een schets van f op het interval $[-2\pi,\, 2\pi]$. Is f continu? Merk op dat $f(x) = f(-x)$ als $-\pi < x < \pi$.

b) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f. Gebruik daarbij dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\mathrm{e}^{-ik\pi} = \mathrm{e}^{ik\pi} = (-1)^k.$$

Bewijs dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergent is. Bewijs dat

$$\frac{1}{c^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2+k^2} \cdot \cos(k\,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2+k^2} \cdot \mathrm{e}^{ikx} = \frac{\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{e}^{cx} + \mathrm{e}^{-cx}}{\mathrm{e}^{c\pi} - \mathrm{e}^{-c\pi}}, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

c) Bewijs dat

$$\frac{1}{c^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^2+k^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2+k^2} = \frac{\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c\pi} + \mathrm{e}^{-c\pi}}{\mathrm{e}^{c\pi} - \mathrm{e}^{-c\pi}}.$$

Formuleer een voorwaarde waaronder een reeks van functies een continue functie definieert. Bewijs daarmee dat de functie

$$c \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^2 + k^2}$$

continu is op $\mathbb{R}$. Bewijs hiermee vervolgens dat

$$\lim_{c \downarrow 0} \left[\frac{\pi}{c} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c\pi} + \mathrm{e}^{-c\pi}}{\mathrm{e}^{c\pi} - \mathrm{e}^{-c\pi}} - \frac{1}{c^2} \right] = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Bewijs met behulp van Taylor-ontwikkeling dat het linkerlid gelijk is aan $\frac{\pi^2}{3}$.

d) Wat is, voor een willekeurige 2π-periodieke continue functie, de identiteit van Parseval? Pas de identiteit van Parseval toe op de in dit vraagstuk gegeven functie f en bereken hiermee

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + k^2)^2}.$$

e) Leid uit b) af dat, voor iedere $0 \leq x \leq \pi$,

$$\frac{x}{c^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2\,k + k^3} \cdot \sin(k\,x) = \frac{\pi}{c^2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{c\,x} - \mathrm{e}^{-c\,x}}{\mathrm{e}^{c\pi} - \mathrm{e}^{-c\pi}}.$$

$\oslash$

Opgave 6.3 Bereken de integraal $\int_0^{2\pi} (\cos x)^6 \, dx$ door de functie $(\cos x)^3$ met behulp van de formule van Euler als een complexe Fourier-reeks te schrijven en vervolgens daarop de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen toe te passen. $\oslash$

Opgave 6.4 Pas de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen toe op de functie f in Voorbeeld 5.25, resp. Voorbeeld 5.46, resp. Opgave 5.8, resp. Opgave 5.9. Laat zien dat hieruit de volgende identiteiten volgen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$\oslash$

Opgave 6.5 Een functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ is een trigonometrische veelterm als

$$f(t) \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_k \,\mathrm{e}^{i\mu_k t}$$

met $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. Verifieer dat

$$\langle f \mid g \rangle \;:=\; \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

een inproduct op de ruimte F van alle trigonometrische veeltermen definieert en dat de functies $e_\mu(t) := \mathrm{e}^{i\mu t}$ een (overaftelbaar) orthonormaalsysteem $(e_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$ vormen. $\oslash$

Opgave 6.6

(a) Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Toon aan dat voor iedere Riemann-integreerbare functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ geldt dat

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_a^b f(x)\, e^{i\xi x}\, dx = 0. \qquad (*)$$

Dit is het Riemann-Lebesgue lemma, dat in het dictaat bewezen is voor het speciale geval dat f continu is. Hint: gebruik Lemma 6.22 om f te benaderen met een continue functie.

In het vervolg beschouwen we de algemenere situatie dat $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ een lokaal Riemann-integreerbare functie is zo dat $|f|$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $]a, b[$. Voor $n \geq 1$ definiëren we de functie $\varphi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ door

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad |x - a| \leq 1/n \\ 0 & \text{als} \quad |x - b| \leq 1/n \\ 1 & \text{als} \quad \min(|x - a|, |x - b|) > 1/n. \end{cases}$$

(b) Toon aan dat voor iedere $n \geq 1$ de functie $\varphi_n f$ Riemann-integreerbaar is op $[a, b]$ en dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x) f(x)|\, dx = 0.$$

(c) Toon aan dat (*) ook geldt in de huidige algemenere situtatie.

(d) Formuleer een Riemann-Lebesgue lemma voor intervallen van de vorm $]a, b[$ met $a = -\infty$ of $b = \infty$.

$\oslash$