Inleiding Analyse in Meer Variabelen

E.P. van den Ban

Voorwoord

Dit dictaat wordt in het najaar 2020 gebruikt bij de gelijknamige nieuwe cursus 'Inleiding Analyse in Meer Variabelen' aan het begin van het tweede jaar van de bachelor Wiskunde.

Het vormt een natuurlijke vervolg van het dictaat 'Inleiding Analyse' en verschaft een solide basis voor zowel de vernieuwde cursus 'Functies en Reeksen' als de bestaande cursus 'Analyse in Meer Variabelen 2'.

In het huidige dictaat wordt allereerst de theorie van het differentiëren in $\mathbb{R}^n$ behandeld, gebaseerd op het fundamentele idee van linearisatie. De behandeling in het eerste hoofdstuk is geheel gebaseerd op de in 'Inleiding Analyse' behandelde middelwaardestelling. Hoogtepunten van de theorie zijn de kettingregel, en later in Hoofdstuk 4 de inverse functiestelling. De laatste stelling wordt direct gebruikt voor een rigoreuze behandeling van de multiplicatorenmethode van Lagrange.

In Hoofdstuk 2 komt verwisseling van partiële afgeleiden aan de orde, eveneens gebaseerd op de genoemde middelwaardestelling. Als toepassing wordt de tweede orde formule van Taylor met rest behandeld. De bijbehorende Hessiaan wordt gebruikt voor het bepalen van lokale maxima en minima van functies van meer variabelen. Voor de liefhebbers is er aan het eind van dit hoofdstuk een verdiepende paragraaf over de algemene multi-dimensionale formule van Taylor.

In Hoofdstuk 3 komen integralen met een parameter aan de orde, met de bijbehorende continue of differentieerbare afhankelijkheid van de parameter. Op basis hiervan wordt herhaalde integratie van continue functies behandeld.

In Hoofdstuk 5 wordt lijnintegratie van vectorvelden behandeld, vooral voor rotatie-vrije vectorvelden. Het laatste is gebaseerd op het volgen van een lokale primitieve van het vectorveld langs een kromme. Die aanpak leidt op een natuurlijke manier tot de homotopie-invariantie van de integralen van dergelijke vectorvelden. Ik de vervolgcursus 'Functies en Reeksen' staat deze methode aan de basis van de integraalstelling van Cauchy. Aan het eind van dit hoofdstuk wordt het begrip enkelvoudige samenhang besproken in verband met het bepalen van een globale potentiaal.

Tenslotte wordt het dictaat in Hoofdstuk 6 afgesloten met een behandeling van de theorie van de reeksen en de oneigenlijke integralen.

Notatie

Net als in het dictaat 'Inleiding Analyse' gebruiken we in dit dictaat de volgende notatie, die afwijkt van de notatie bij de cursus 'Wat is Wiskunde.'

(a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; wij beschouwen dus ook 0 als natuurlijk getal. Daarnaast schrijven we $\mathbb{N}^*$ of $\mathbb{Z}_+$ voor $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

(b) Als A en B verzamelingen zijn, dan betekent $A \subset B$ dat ieder element van A ook tot B behoort. Bij 'Wat is Wiskunde' was de notatie $A \subseteq B$ gebruikelijk. Verder gebruiken wij de notatie $A \subsetneq B$ voor de uitspraak $A \subset B$ en $A \neq B$. Bij 'Wat is Wiskunde' was hiervoor de notatie $A \subset B$ gebruikelijk.

(c) Intervallen worden als volgt genoteerd, voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:

$$[\,a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad]a, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Verder gebruiken we bijvoorbeeld de notatie: $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$.

Tenslotte gebruiken we nog de notatie $a := b$ voor de uitspraak 'a is per definitie gelijk aan b.'

Inhoudsopgave

1 Partiële en totale afgeleiden

1.1 Partiële differentieerbaarheid

Zij $V \subset \mathbb{R}^n$, met $n \geq 1$. Een punt $a \in V$ heet inwendig als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat de open bol $B(a;\delta)$ met middelpunt a en straal δ bevat is in V. De collectie van alle inwendige punten van V wordt genoteerd met $\mathrm{inw}(V)$. De verzameling V heet open indien $V = \mathrm{inw}(V)$.

In het vervolg is U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $a \in U$ een punt. Laat $f : U \to \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie zijn. Zij $1 \leq j \leq n$. Fixeren we de coördinaten met rangnummer ongelijk j, en laten we de j-de coördinaat nog vrij bewegen, dan krijgen we de reëelwaardige functie

$$\varphi\colon t \mapsto f\,(a_1,\, \dots,\, a_{j-1},\, t,\, a_{j+1},\, \dots,\, a_n) \tag{1.1}$$

van één reële variabele t. Deze functie is gedefinieerd op de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}$,

$$D_j(a) := \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1,\, \dots,\, a_{j-1},\, t,\, a_{j+1},\, \dots,\, a_n) \in U\}$$

Hierbij is als volgt in te zien dat $D_j(a)$ een open interval rond a_j bevat. Omdat U open is bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$. Voor $t \in \,]\, a_j - \delta, a_j + \delta\, [\,$ geldt nu dat

$$(a_1,\, \dots,\, a_{j-1},\, t,\, a_{j+1},\, \dots,\, a_n) \in B(a;\delta),$$

en we zien dat

$$]\, a_j - \delta, a_j + \delta\, [\, \subset D_j(a).$$

Aangezien φ gedefinieerd is op een open interval rond a_j is de vraag naar differentieerbaarheid van de functie φ zinvol. Dit is de reden dat we verondersteld hebben dat U open is.

Definitie 1.1 (Partieel differentieerbaar) De functie f heet *partieel differentieerbaar naar de j-de variabele* $(1 \leq j \leq n)$, *in het punt* $a \in U$, als de functie φ gedefinieerd door (1.1) differentieerbaar is in het punt $t = a_j$. Is dit het geval, dan wordt de afgeleide van de functie φ in het punt $t = a_j$ de *partiële afgeleide van f naar de j-de variabele in het punt* a genoemd en genoteerd met $D_j f(a)$. $\oslash$

Is f in het punt $a \in U$ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele, dan geldt volgens de bovenstaande definitie dus

$$D_j f(a) = \varphi'(a_j) = \left.\frac{d}{dt} f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)\right|_{t=a_j}.$$

Voorbeeld 1.2 Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = e^{xy}y + x$, dan is volgens de bovenstaande definitie de functie f in ieder punt $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ partieel differentieerbaar naar zowel de eerste als de tweede variabele, terwijl

$$D_1 f(a_1, a_2) = \left.\frac{d}{dt}(e^{ta_2}a_2 + t)\right|_{t=a_1} = (e^{ta_2}a_2^2 + 1)\big|_{t=a_1} = e^{a_1 a_2}a_2^2 + 1.$$

$\oslash$

Opmerking 1.3 In het bovenstaande is geëist dat het domein U van f open is. Algemener kan de definitie voor een functie $f : V \to \mathbb{R}$ gegeven worden ten aanzien van $a \in V$ indien $a \in \mathrm{inw}(V)$. De functie f heet dan partieel differentieerbaar in a indien de beperking $f|_{\mathrm{inw}(V)}$ van f tot het inwendige van V dat is. $\oslash$

We keren terug naar de situatie dat $U \subset \mathbb{R}^n$ open is. Een functie $f : U \to \mathbb{R}$ heet partieel differentieerbaar naar de j-de variabele indien de functie in ieder punt $a \in U$ partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele. In dat geval kunnen we partiële afgeleide $D_j f(a)$ beschouwen als een functie van $a \in U$. Deze functie heet de *partiële afgeleide van f naar de j-de variabele* en wordt genoteerd met:

$$D_j f : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto D_j f(x).$$

In de literatuur komt men ook de notatie $\partial_j f$ voor $D_j f$ tegen. De klassieke notatie voor de partiële afgeleide $D_j f(x)$ van f naar de j-de variabele is

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \tag{1.2}$$

waarin we de notatie $x = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ hebben gebruikt en waarbij alle coördinaten als variabelen worden opgevat. (Deze variabelen mogen met willekeurige andere letters genoteerd worden, zoals bijvoorbeeld (x, y) voor de coördinaten in het vlak.)

Men schrijft in plaats van (1.2) ook wel $\partial f(x)/\partial x_j$, of

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$$

als de formule voor $f(x)$ te groot is om boven een breukstreep te zetten. Het gebruik om partiële afgeleiden met het symbool ∂ aan te duiden is omstreeks 1840 door Jacobi ingevoerd. In het Engels wordt dit symbool, de 'kromme d', uitgesproken als 'partial' of 'del'.

Voorbeeld 1.4 In de situatie van het bovenstaande voorbeeld hebben we

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} y + x) = e^{xy} y^2 + 1.$$

Voor de partiële afgeleide naar de overgebleven variabele geldt:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} y + x) = e^{xy}(xy + 1).$$

$\oslash$

Opmerking 1.5 Als men, voor een gegeven $a \in X$, de partiële afgeleide in het punt a aan wil geven, dan betekent dit dat we van de functie in (1.2) de waarde in het punt $x = a$ dienen te nemen, dus

$$D_j f(a) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|_{x=a}.$$

Het is ook gebruikelijk (en verleidelijk) om de functie $D_j f$ aan te duiden als $\partial f / \partial x_j$. Dit leidt dan tot de notatie

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

voor de partiële afgeleide van f in het punt a. Deze notatie is wellicht verwarrend omdat het symbool x_j niet onder de coördinaten van a voorkomt. Bijvoorbeeld, als $f(y,\, t)$ een functie is van de twee variabelen y en t, dan leidt dit tot de notatie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\, 0)$$

voor de partiële afgeleide van f naar de eerste variabele in het punt $(0,\, 0)$. Men kan zich hier terecht afvragen of met de variabele y, waarnaar gedifferentieerd wordt, de eerste of de tweede variabele bedoeld wordt.

Nog verwarrender is een uitdrukking als

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, x),$$

met als voor de hand liggende interpretaties

$$\left.\frac{\partial f(x,\, y)}{\partial x}\right|_{y=x} = (D_1 f)\,(x,\, x),$$

of

$$\left.\frac{\partial f(y,\, x)}{\partial x}\right|_{y=x} = (D_2 f)\,(x,\, x),$$

of

$$\frac{d}{dx}\, f(x,\, x),$$

hetgeen weer iets heel anders is.

Uit deze voorbeelden blijkt wel dat het de moeite waard is om notaties zó te kiezen dat duidelijk is wat er bedoeld wordt. $\oslash$

Omdat partiële differentiatie in feite differentiatie is van een functie van één reële variabele (namelijk de j-de coördinaat), zijn de volgende rekenregels een direct gevolg van de corresponderende bekende rekenregels voor functies van één variabele.

Lemma 1.6 *Zij f, g een tweetal functies $U \to \mathbb{R}$, en zij $a \in U$. Zijn f en g in a partieel differentieerbaar naar de j-de variabele, dan zijn $f + g$ en $f\, g$ dat ook en er geldt dat*

$$D_j(f+g)(a) \;=\; D_j f(a) + D_j g(a), \tag{1.3}$$

$$D_j(f\, g)(a) \;=\; D_j f(a) g(a) + f(a) D_j g(a). \tag{1.4}$$

Is bovendien $f(a) \neq 0$, dan is de functie $1/f$ in a partieel differentieerbaar naar de j-de variabele en er geldt dat

$$D_j\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{f(a)^2} D_j f(a). \tag{1.5}$$

Zijn $f, g : U \to \mathbb{R}$ (overal) partieel differentieerbaar naar de j-de variabele, dan leidt het bovenstaande lemma in de klassieke notatie tot de formules:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f(x)+g(x))}{\partial x_j} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \\
\frac{\partial(f(x)\, g(x))}{\partial x_j} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\, g(x) + f(x)\, \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Is bovendien $f(x) \neq 0$, dan is $1/f$ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele in het punt x en hebben we volgens het lemma in de klassieke notatie

$$\frac{\partial(1/f(x))}{\partial x_j} = -\frac{1}{f(x)^2}\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}.$$

Op precies dezelfde manier als hierboven kan men spreken over partiële differentieerbaarheid van vectorwaardige functies $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^p$. Voor een dergelijke functie noteren we de *componenten* met f_i, voor $1 \leq i \leq p$, zo dat

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

Op grond van het analoge lemma voor functies van één variabele geldt het volgende.

Lemma 1.7 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open, $f : U \to \mathbb{R}^p$ en $a \in U$. Laat $1 \leq j \leq n$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De functie f is in het punt a partieel differentieerbaar naar de j-de variabele.*

(b) *Voor iedere $1 \leq i \leq p$ is de component f_i partieel differentieerbaar naar de j-de variabele in het punt a.*

Is een van de bovenstaande condities (a) en (b) vervuld (dus ook de andere), dan geldt dat

$$D_j f(a) = (D_j f_1(a), \dots, D_j f_p(a)).$$

Partiële afgeleiden zijn een belangrijk hulpmiddel om *lokale extrema* van functies van meer variabelen te vinden.

Lemma 1.8 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open, $a \in U$ en $f : U \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar de j-de variabele. Als f een lokaal maximum, resp. minimum heeft in het punt a, dan is $D_j f(a) = 0$.*

Bewijs Het gegeven impliceert dat de functie φ van één variabele, die gedefinieerd is in (1.1), een lokaal maximum, resp. minimum heeft in het punt $t = a_j$. Uit de theorie van differentieerbare functies van één variabele is bekend dat hieruit volgt dat $\phi'(a_j) = 0$. Dit laatste is equivalent met $D_j(a) = 0$. $\square$

Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en neem nu aan dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de functie $f : U \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele. In dit geval is de *gradiënt* van f in het punt x de vector in $\mathbb{R}^n$ die is gedefinieerd door

$$\operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right). \tag{1.6}$$

Later zullen we zien dat de gradiënt in het kader van matrix-rekening beter opgevat kan worden als kolomvector. Op dit moment speelt dat nog geen rol.

Definitie 1.9 Laat de functie $f : U \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar zijn naar elk van zijn variabelen. Men zegt dat $a \in U$ een *stationair* (of ook wel *kritiek*) punt is van f als $\operatorname{grad} f(a) = 0$, dat wil zeggen: voor iedere $1 \leq j \leq n$ geldt dat $\partial f(x)/\partial x_j = 0$ als $x = a$. $\oslash$

Het *variatieprincipe* van Lemma 1.8 zegt dat als een partieel differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{R}$ een lokaal maximum of minimum in het punt $a \in U$ heeft, dan is a een stationair punt van f.

Voorbeeld 1.10 Zij nu $U = \mathbb{R}^2$ en $f(x,\, y) = x^2 + y^2$. Dan heeft f een minimum in $(0,\, 0)$, dus is $\operatorname{grad} f(0,\, 0) = 0$. Dit kan ook door een berekening van de partiële afgeleiden geverifieerd worden:

$$\partial f(x,\, y)/\partial x = 2x = 0 \quad \text{als} \quad x = 0 \quad \text{en}$$

$$\partial f(x,\, y)/\partial y = 2y = 0 \quad \text{als} \quad y = 0.$$

Neem nu $f(x,\, y) = x^2 - y^2$. Dan is

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (2x, -2y)^{\mathrm{T}}.$$

Dus ook in dit geval is $\operatorname{grad} f(0, 0) = 0$, dus is $(0,\, 0)$ een stationair punt van f. Echter, f heeft geen lokaal minimum in $(0,\, 0)$ omdat er willekeurig dicht bij $(0, 0)$ punten (x, y) zijn met $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$, neem bijvoorbeeld $x = 0$ en $y \neq 0$. Anderzijds zien we, door punten $(x,\, y)$ te beschouwen met met $y = 0$ en $x \neq 0$, dat f ook geen lokaal maximum heeft in $(0,\, 0)$. Een stationair punt van f waarin f geen lokaal minimum en ook geen lokaal maximum heeft, wordt ook wel een *zadelpunt* van f genoemd. $\oslash$

1.2 Lokaal constante functies

Uit Inleiding Analyse is bekend dat voor een differentieerbare functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ van één variabele geldt: als $f' = 0$ dan is f constant.

Gevolg 1.11 (Opgave) *Laat voor iedere $1 \leq j \leq n$ een open interval $I_j =]a_j, b_j[$, met $a_j < b_j$ gegeven zijn, dan is $V = I_1 \times \cdots \times I_n$ een open verzameling in $\mathbb{R}^n$. Is $f : V \to \mathbb{R}^p$ een partieel differentieerbare functie met $D_j f = 0$ voor alle $1 \leq j \leq n$, dan is f constant.*

Gevolg 1.12 (Opgave) *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open verzameling zijn en $f : U \to \mathbb{R}^p$ een partieel differentieerbare functie met $D_j f = 0$ voor alle $1 \leq j \leq n$. Dan is f* lokaal constant*, dwz. voor iedere $a \in U$ bestaat een $\delta > 0$ zo dat f constant is op $B(a; \delta)$.*

De rest van deze paragraaf is gemotiveerd door de vraag wanneer we voor een functie f als in Gevolg 1.12 kunnen concluderen dat f constant is. Het begrip *boogsamenhang* uit Inleiding Analyse zal ons daarbij helpen. We behandelen deze definitie nogmaals, maar nu algemener in de context van een metrische ruimte (V, d). Iedere deelverzameling $V \subset \mathbb{R}^n$ kan gezien worden als metrische ruimte, door hem te voorzien van de beperking van de Euclidische afstand op $\mathbb{R}^n$.

Definitie 1.13 (Continue kromme) Laat X een metrische ruimte zijn. Onder een *continue kromme* in X verstaan we een continue afbeelding $\gamma : [a, b] \to X$; hierbij is $[a, b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval (segment) in $\mathbb{R}$. Het punt $\gamma(a) \in X$ heet het *beginpunt* van γ, het punt $\gamma(b)$ het *eindpunt*. $\oslash$

Definitie 1.14 (Boogsamenhang) Een metrische ruimte X heet *boogsamenhangend* indien voor ieder tweetal punten $p, q \in X$ een continue kromme $\gamma : [0, 1] \to X$ bestaat met *beginpunt* $\gamma(0) = p$ en *eindpunt* $\gamma(1) = q$. $\oslash$

We brengen in herinnering dat een *interval* in $\mathbb{R}$ gekarakteriseerd kan worden als een deelverzameling $I \subset \mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor ieder tweetal punten $a, b \in I$ met $a < b$ geldt $[a, b] \subset I$.

Lemma 1.15 *Zij $V \subset \mathbb{R}$ een deelverzameling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:*

(a) *V is boogsamenhangend;*

(b) *V is een interval.*

Bewijs Laat (a) gelden. Zij $p, q \in V$, $p < q$. Dan is er een continue functie $f : [0,1] \to V$ met $f(0) = p$ en $f(1) = q$. Wegens de tussenwaardestelling voor continue functies geldt $f([0,1]) \supset [p,q]$, dus $[p,q] \subset V$. Hieraan zien we dat V een interval is.

Laat nu (b) gelden. Dan is voor ieder tweetal punten $p, q \in V$ met $p < q$ het segment $[p,q]$ een deelverzameling van V. De afbeelding $f : [0,1] \to [p,q]$, $t \mapsto p + t(q-p)$ is continu. Hieraan zien we dat (a) geldt. $\square$

De volgende terminologie is beeldend, en zal handig blijken.

Definitie 1.16 (Omgeving) Laat X een metrische ruimte zijn, en $a \in X$. Onder een *omgeving* van a in X verstaan we een deelverzameling $V \subset X$ met $a \in \mathrm{inw}(V)$, dwz. er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset V$. $\oslash$

Definitie 1.17 (Lokaal constante functie) Laat X een metrische ruimte zijn, en Y een verzameling. Een afbeelding $f : X \to Y$ heet lokaal constant als er voor iedere $a \in X$ een omgeving V van a in X bestaat zo dat $f|_V$ constant is. $\oslash$

Lemma 1.18 *Laat φ een afbeelding zijn van het interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ naar een verzameling Y. Indien φ lokaal constant is, dan is φ constant.*

Bewijs Laat $\varphi : [0,1] \to Y$ een lokaal constante afbeelding zijn. Zij $y := \varphi(0)$. We beschouwen de verzameling S van punten $s \in [0,1]$ zo dat $\varphi = y$ op $[0,s]$. Het is duidelijk dat S een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, dus een kleinste bovengrens $\sigma = \sup S$ bezit. Er is een $0 < \delta \leq 1$ zo dat φ constant is op $[0,\delta]$, dus $\sigma \geq \delta > 0$.

Als $s < \sigma$, dan is $\varphi = y$ op $[0,s]$. Hieruit volgt dat $\varphi = y$ op $[0,\sigma[$. Er is een $\delta > 0$ zo dat $0 < \sigma - \delta < \sigma$ en φ is constant op $[\sigma - \delta, \sigma]$. Hieruit volgt dat $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma - \delta/2) = y$. Dus $\varphi(\sigma) = y$. We concluderen dat $\varphi = y$ op $[0,\sigma]$.

Stel nu dat $\sigma < 1$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat $\sigma + \delta < 1$ en $\varphi = \varphi(\sigma) = y$ op $[\sigma, \sigma + \delta[$, dus op $[0, \sigma + \delta[$. Hieruit volgt $\sigma \geq \sigma + \delta/2$, tegenspraak.

We concluderen dat $\sigma = 1$ en $\varphi = y$ op $[0,\sigma] = [0,1]$. $\square$

Gevolg 1.19 *Zij X een metrische ruimte, en $f : X \to Y$ een functie met waarden in een verzameling Y. Is f lokaal constant en X boogsamenhangend, dan is f constant.*

Bewijs Zij p, q een tweetal punten van X, dan is er een continue kromme $\gamma : [0,1] \to X$ met $\gamma(0) = p$ en $\gamma(1) = q$. We bewijzen de claim dat $\varphi := f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ lokaal constant is. Hieruit volgt met Lemma 1.18 dat $f(p) = \varphi(0) = \varphi(1) = f(q)$, dus f is constant.

Het bewijs van de claim is als volgt. Zij $t_0 \in [0,1]$. Omdat f lokaal constant is bestaat er een $\delta > 0$ zo dat f constant is op de bol $B(\gamma(t_0);\delta)$. Uit de continuïteit van γ volgt het bestaan van een open omgeving J van t_0 in $[0,1]$ zo dat $\gamma(J) \subset B(\gamma(t_0);\delta)$. Hieruit volgt dat $f \circ \gamma$ constant is op J, dus φ is lokaal constant. $\square$

Gevolg 1.20 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling zijn en $f : U \to \mathbb{R}^p$ een partieel differentieerbare functie. Als U boogsamenhangend is en $Df = 0$ op U dan is f constant.*

Bewijs Dit volgt door combinatie van Gevolg 1.12 en Gevolg 1.19. □

1.3 Richtingsdifferentieerbaarheid

Het in de vorige paragraaf geïntroduceerde begrip partiële afgeleide kan worden gezien als een speciaal geval van het begrip richtingsafgeleide. Dit laatste begrip definiëren we als volgt. In het vervolg is $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling en $f : U \to \mathbb{R}^p$ een afbeelding.

Definitie 1.21 (Richtingsdifferentieerbaar) Zij $a \in U$ en $v \in \mathbb{R}^n$. De afbeelding f heet in het punt a *richtingsdifferentieerbaar* in de richting v indien de functie $t \mapsto f(a + tv)$ differentieerbaar is in $t = 0$. De afgeleide

$$D_v f(a) := \frac{d}{dt} f(a + tv)\Big|_{t=0}$$

wordt in dat geval de *richtingsafgeleide* van f in het punt a in de richting v genoemd. ⊘

Opmerking 1.22 We merken op dat de richtingsdifferentieerbaarheid van f in a in de richting v gelijkwaardig is met het bestaan van de limiet

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Indien deze limiet bestaat is zijn waarde gelijk aan de richtingsafgeleide $D_v f(a)$. ⊘

Ook voor de richtingsafgeleide geldt het principe van componentsgewijs differentiëren. Vergelijk met Lemma 1.7.

Lemma 1.23 *Zij $a \in U$ en $v \in \mathbb{R}^n$. Zij $f : U \to \mathbb{R}^p$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig:*

(a) *de functie f is in a richtingsdifferentieerbaar in de richting v;*

(b) *voor iedere $1 \leq i \leq p$ is de componentfunctie $f_i : U \to \mathbb{R}$ in a richtingsdifferentieerbaar in de richting v.*

Zijn condities (a) en (b) vervuld, dan is

$$D_v f(a) = (D_v f_1(a), \ldots, D_v f_p(a)).$$

Partieel differentiëren kan opgevat worden als richtingsdifferentiëren in specifieke richtingen.

Lemma 1.24 *Zij e_j de j-de standaardbasis vector in $\mathbb{R}^n$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De partiële afgeleide $D_j f(a)$ bestaat.*

(b) *De functie f is in a richtingsdifferentieerbaar in de richting e_j.*

Bovendien geldt in het geval dat (a) en (b) waar zijn dat

$$D_j f(a) = D_{e_j} f(a). \tag{1.7}$$

Bewijs Er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$. We introduceren het open interval $I :=]\, a_j - \delta, a_j + \delta\, [$ en definiëren de functie $\varphi : I \to \mathbb{R}^p$ door

$$\varphi(s) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, s, a_{j+1}, \ldots, a_n), \qquad (s \in I).$$

Voor de (gewone) afgeleide van φ naar de variabele s geldt wegens de kettingregel voor (gewone) differentiatie dat φ differentieerbaar is in a_j dan en slechts dan als de functie $t \mapsto \varphi(a_j + t)$ differentieerbaar is in 0. De eerste bewering is per definitie gelijkwaardig met (a). De tweede bewering is gelijkwaardig met (b) omdat voor alle $t \in] -\delta, \delta\,[$ geldt dat $\varphi(a_j + t) = f(a + te_j)$. Bovendien geldt vanwege de kettingregel voor gewone differentiatie in geval de beweringen waar zijn dat

$$D_j f(a) = \varphi'(a_j) = \frac{d}{dt}\varphi(a_j + t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(a + te_j)\bigg|_{t=0} = D_{e_j} f(a).$$

Dit geeft (1.7). □

1.4 De totale afgeleide

In deze paragraaf behandelen we een nieuw begrip van differentieerbaarheid, waarbij de afgeleide de rol zal spelen van de lineaire (of eerste orde) benadering van de groei van een functie.

In het vervolg veronderstellen we weer dat $U \subset \mathbb{R}^n$ open is en dat $f : U \to \mathbb{R}^p$.

Definitie 1.25 (Totaal differentieerbaar) Zij $a \in U$. De functie f heet *(totaal) differentieerbaar* in a indien er een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bestaat zo dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - A(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1.8}$$

⊘

Voorbeeld 1.26 We beschouwen de afbeelding $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, x\rangle$. Zij $a \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt voor $h \in \mathbb{R}^n$ dat

$$f(a+h) - f(a) = \langle a+h, a+h\rangle - \langle a, a\rangle = 2\langle a, h\rangle + \langle h, h\rangle.$$

Zij A de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $A(h) = 2\langle a, h\rangle$ (ga na dat deze afbeelding inderdaad lineair is). Dan is

$$\|f(a+h) - f(a) - A(h)\| = \|h\|^2$$

dus (1.8) geldt. We concluderen dat f totaal differentieerbaar is in het punt a. ⊘

In het onderstaande lemma wordt een verband gelegd met richtingsdifferentieerbaarheid. Hieruit zal blijken dat de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uniek vastgelegd is door de eigenschap (1.8). Daarna kunnen we een geschikte notatie voor A afspreken.

Lemma 1.27 *Laat de functie f differentieerbaar zijn in a en laat A voldoen aan (1.8). Dan geldt voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ dat de functie f richtingsdifferentieerbaar is in a in de richting v. De bijbehorende richtingsafgeleide wordt gegeven door*

$$D_v f(a) = A(v). \tag{1.9}$$

In het bijzonder is A uniek bepaald.

Bewijs De bewering is duidelijk voor $v = 0$. We veronderstellen daarom dat $v \neq 0$. Door $h = tv$ te substitueren in (1.8) vinden we dat

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(a+tv) - f(a) - A(tv)\|}{|t|\|v\|} = 0.$$

Uit de lineariteit van A volgt dat $A(tv) = tA(v)$, dus ook

$$\lim_{t \to 0} \|v\|^{-1} \left\| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - A(v) \right\| = 0$$

en we concluderen dat

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - A(v) \right) = 0,$$

dus f is in a richtingsdifferentieerbaar in de richting v en er geldt dat (1.9). □

De uniciteit van A maakt de volgende definitie mogelijk.

Definitie 1.28 Laat f totaal differentieerbaar zijn in a. De unieke lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ die voldoet aan (1.8) wordt genoteerd met $Df(a)$ en heet de *totale afgeleide* van f in a. ⊘

Opmerking 1.29 Is f totaal differentieerbaar in a dan geldt wegens Lemma 1.27 dat f richtingsdifferentieerbaar is in a en dat

$$Df(a)(v) = D_v f(a), \qquad (v \in \mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

In het bijzonder zien we dat de richtingsafgeleide $D_v f(a)$ *lineair afhangt* van de richting $v \in \mathbb{R}^n$. ⊘

Voorbeeld 1.30 We beschouwen nog eens de afbeelding $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uit Voorbeeld 1.26. Er geldt dat f in $a \in \mathbb{R}^n$ totaal differentieerbaar is met als totale afgeleide de lineaire afbeelding $Df(a) = A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$Df(a)(h) = 2\langle a, h \rangle, \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

De functie f is dus ook richtingsdifferentieerbaar in a in elke richting $v \in \mathbb{R}^n$, met als richtingsafgeleide

$$D_v f(a) = 2\langle a, v \rangle.$$

Dit laatste kunnen we ook direct afleiden. Immers, wegens de bilineariteit van het inproduct geldt $f(a+tv) = \langle a, a \rangle + 2t\langle a, v \rangle + t^2\langle v, v \rangle$, voor $t \in \mathbb{R}$. Deze uitdrukking is differentieerbaar naar t met afgeleide

$$\frac{d}{dt} f(a+tv) = 2\langle a, v \rangle + 2t\langle v, v \rangle.$$

Invullen van $t = 0$ levert $D_v f(a) = 2\langle a, v \rangle$. ⊘

Voorbeeld 1.31 Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f : U \to \mathbb{R}^p$ een afbeelding zo dat er een lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ bestaat met $f = T|_U$. Dan is f totaal differentieerbaar in elk punt $a \in U$, met totale afgeleide $Df(a) = T$. Immers, Definitie 1.25 is van toepassing met $A = T$. ⊘

In het bijzonder is een totaal differentieerbare functie ook partieel differentieerbaar, zie Lemma 1.24. Uit het volgende voorbeeld blijkt dat het omgekeerde niet het geval hoeft te zijn.

Voorbeeld 1.32 Definieer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $f(x,\, y) := x\, y^2 / \left(x^2 + y^4\right)$ als $(x,\, y) \neq (0,\, 0)$ en door $f(0,\, 0) := 0$. Dan is f partieel differentieerbaar met continue partiële afgeleiden $\partial f / \partial x$ en $\partial f / \partial y$ op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\, 0)\}$. Neem $v = (a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ met $a \neq 0$. Dan is

$$\frac{f(t\, v) - f(0)}{t} = \frac{t^3\, a\, b^2}{t\ (t^2\, a^2 + t^4\, b^4)} = \frac{a\, b^2}{a^2 + t^2\, b^4} \to \frac{a\, b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}$$

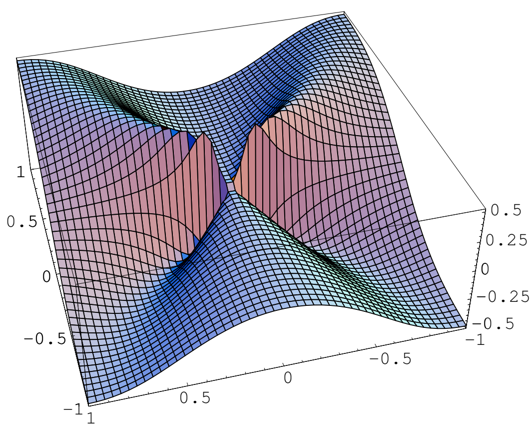
als $t \neq 0$ en $t \to 0$. Is anderzijds $b \neq 0$ en $t \neq 0$, dan is $(f(t\, 0,\, t\, b) - f(0,\, 0))/t = 0$. Dus in het punt $(0,\, 0)$ is f richtingsdifferentieerbaar in de richting van iedere vector, met $D_v f(0,\, 0) = b^2/a$ als $v = (a,\, b)$ en $a \neq 0$ en $D_v f(0,\, 0) = 0$ als $v = (0,\, b)$. In het bijzonder geldt dus dat f partieel differentieerbaar is in $(0, 0)$ met partiële afgeleiden $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$. Het is duidelijk dat de richtingsafgeleide $D_v f(0,\, 0)$ niet op een lineaire manier van de richtingsvector $v = (a,\, b)$ afhangt. Met het oog op Opmerking 1.29 concluderen we dat f niet totaal differentieerbaar kan zijn in het punt $(0,\, 0)$.

Het is wellicht verrassend dat de functie f ondanks het bestaan van de partiële afgeleiden in $(0, 0)$ niet continu is in dat punt. Dit zien we als volgt. Voor iedere $c \in \mathbb{R}$ en $y \neq 0$ is

$$f(c\, y^2,\, y) = \frac{c\, y^4}{c^2\, y^4 + y^4} = \frac{c}{c^2 + 1}.$$

Stel dat de functie f continu is in het punt $(0,\, 0)$. Als $y \to 0$, dan $(c\, y^2,\, y) \to (0,\, 0)$ en dan zou de continuïteit van f in het punt $(0,\, 0)$ impliceren dat $f(c\, y^2,\, y)$ naar 0 convergeert als $y \to 0$. Echter, als $c \neq 0$ dan is $f(c\, y^2,\, y)$ voor iedere $y \neq 0$ gelijk aan de constante $c / \left(c^2 + 1\right) \neq 0$ en we krijgen een tegenspraak.

Samenvattend, dit is een voorbeeld van een functie die in ieder punt differentieerbaar is met betrekking tot iedere variabele, maar die in de oorsprong niet continu is. $\oslash$



$f(x,\, y) = x\, y^2 / \left(x^2 + y^4\right)$ voor $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

Gevolg 1.33 *Laat $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^p$ totaal differentieerbaar zijn in a. Dan wordt de matrix van $Df(a)$ (ten aanzien van de standaardbases) gegeven door*

$$Df(a)_{ij} = D_j f_i(a) \qquad (1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq p).$$

De $n \times p$ matrix $(D_j f_i(a))_{ij}$ staat bekend als de *Jacobi-matrix* van de functie f in het punt a.

Bewijs De afgeleide $Df(a)$ is een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ en heeft dus een matrix met p rijen en n-kolommen. Het element in de i-de rij en de j-de kolom wordt genoteerd met $Df(a)_{ij}$. Zoals we weten uit de lineaire algebra wordt het gegeven door

$$Df(a)_{ij} = (Df(a)e_j)_i = (D_{e_j} f(a))_i$$

wegens Opmerking 1.29. Door toepassing van (1.7) en Lemma 1.7 vinden we dat

$$Df(a)_{ij} = (D_j f(a))_i = D_j f_i(a).$$

□

Opmerking 1.34 Voordat we verder gaan met de ontwikkeling van de theorie vermelden we nog dat de conditie (1.8) in Definitie 1.25 ook als volgt geformuleerd kan worden:

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + R(h), \qquad \text{met} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{1.11}$$

Immers, zij $-a + U := \{-a + x \mid x \in U\}$ dan bestaat $-a + U$ uit de punten $h \in \mathbb{R}^n$ met $a + h \in U$. Definieer nu $R : \mathbb{R}^n \supset (-a + U) \to \mathbb{R}^p$ door $R(h) = f(a + h) - f(a) - A(h)$. Dan is (1.8) gelijkwaardig met

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Hieruit volgt de gelijkwaardigheid van Definitie 1.25 met (1.11).

De eerste uitdrukking in (1.11) kan opgevat worden als de multi-variabele *eerste orde Taylor ontwikkeling* van f rond a. ⊘

Opmerking 1.35 De bovenstaande conditie (1.11) kan ook als volgt geformuleerd worden:

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + \|h\|\rho(h), \qquad \text{met} \quad \lim_{h\to 0} \rho(h) = 0. \tag{1.12}$$

Dit blijkt door ρ in termen van R te definiëren door $\rho(h) = \|h\|^{-1} R(h)$ als $h \neq 0$ en door $\rho(0) = 0$. Dan is gemakkelijk in te zien dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|R(h)\|}{\|h\|} = 0 \iff \lim_{h\to 0} \|h\|^{-1} R(h) = 0 \iff \lim_{h\to 0} \rho(h) = 0.$$

⊘

Om ruimte te besparen zullen we in het vervolg kolomvectoren als volgt noteren:

$$(a_1, \ldots, a_k)^{\mathrm{T}} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 1.36 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = x_1 x_2.$$

Laat $a \in \mathbb{R}^2$ een gegeven vast punt zijn. Dan geldt voor alle $h \in \mathbb{R}^2$ dat

$$f(a+h) - f(a) = (a_1 + h_1)(a_2 + h_2) - a_1 a_2 = a_2 h_1 + a_1 h_2 + h_1 h_2 = A(h) + R(h),$$

met

$$A(h) = (a_2 \;\; a_1)(h_1, h_2)^{\mathrm{T}}, \qquad R(h) = h_1 h_2.$$

(De belangrijke stap is om de geschikte lineaire afbeelding A 'af te splitsen.') De gedefinieerde afbeelding A is lineair, en voor R geldt dat $|R(h)| \leq |h_1||h_2| \leq \|h\|^2$, dus

$$\lim_{h \to 0} \frac{|R(h)|}{\|h\|} = 0.$$

We zien dat de afbeelding f totaal differentieerbaar is in a, met afgeleide $Df(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die gegeven wordt door de rij-matrix $(a_2 \;\; a_1)$.

Met Gevolg 1.33 volgt hieruit dat

$$D_1 f(a) = a_2 \quad \text{en} \quad D_2 f(a) = a_1.$$

Dit is uiteraard ook direct af te leiden door de rekenregels voor partiële differentiatie toe te passen. $\oslash$

We zullen het nieuw geïntroduceerde begrip totale afgeleide in het geval $n = 1$ vergelijken met de gewone afgeleide. In het bewijs van het onderstaande resultaat zullen we gebruik maken van Gevolg 1.33.

Lemma 1.37 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval en $f : I \to \mathbb{R}^p$ een functie. Laat $a \in I$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is differentieerbaar in a in de oude zin (van Inleiding Analyse).*

(b) *De functie f is totaal differentieerbaar in a.*

Is f differentieerbaar in a, dan wordt het verband tussen de twee afgeleiden gegeven door

$$f'(a) = Df(a)(1). \tag{1.13}$$

Bewijs Veronderstel eerst dat (b) geldt. Dan volgt uit Gevolg 1.33 dat f partieel differentieerbaar is. Omdat er maar één variabele is, is f gewoon differentieerbaar naar die variabele. Hieruit volgt (a).

Veronderstel nu omgekeerd dat (a) geldt, dus dat f differentieerbaar is in a met afgeleide $f'(a) \in \mathbb{R}^p$. Dan geldt dat

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0.$$

Hieruit volgt dat

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + R(h)$$

met $\lim_{h \to 0} h^{-1} R(h) = 0$ dus ook

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|R(h)\|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \left\| \frac{R(h)}{h} \right\| = 0.$$

De afbeelding $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ gedefinieerd door $A(h) = hf'(a)$ is lineair. Uit Opmerking 1.34 volgt nu dat f totaal differentieerbaar is in a met afgeleide $Df(a) = A$. We concluderen dat (b) geldt, en verder dat $Df(a)(1) = A(1) = f'(a)$. $\square$

Opmerking 1.38 Het verband (1.13) kan ook als volgt ingezien worden. De lineaire afbeelding $Df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ heeft als Jacobi-matrix de kolom

$$\operatorname{mat} Df(a) = (f_1'(a), \dots, f_p'(a))^{\mathrm{T}}.$$

Laten we $Df(a)$ werken op het punt $1 \in \mathbb{R}$ (dat gezien kan worden als de standaardbasis vector e_1 van $\mathbb{R}$) dan vinden we dat

$$Df(a)(1) = f'(a).$$

$\oslash$

In het vervolg van onze behandeling van de totale afgeleide zullen we schattingen nodig hebben voor lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$.

Voor een lineair afbeelding $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definiëren we de *norm* $\|L\|$ door

$$\|L\| := \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} (L_{ij})^2 \right)^{1/2}, \tag{1.14}$$

waarin de L_{ij} de matrixcoëfficiënten van L voorstellen. Anders gezegd, de norm van L is gelijk aan de *Euclidische* norm van de vector in $\mathbb{R}^{np}$ waarvan de coördinaten de matrixcoëfficiënten van L zijn (genomen in een bepaalde gekozen volgorde, het doet er niet toe welke).

We noteren met $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de verzameling van alle lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Deze verzameling voorzien we van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging. Dus als $L, M \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan worden de elementen $L + M$ en λL van $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ gegeven door

$$(L + M)(x) = L(x) + M(x), \quad (\lambda L)(x) = \lambda L(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Met deze optelling en scalarvermenigvuldiging is $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ een reële lineaire ruimte.

De matrixcoefficiënt-afbeelding $L \mapsto (L_{ij})$, gezien als afbeelding $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^{np}$ is nu bijectief en lineair, dus een lineair isomorfisme. Via dit isomorfisme correspondeert de in (1.14) gedefinieerde norm op $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ met de Euclidische norm op $\mathbb{R}^{np}$. Dit laat zien dat $\|\cdot\|$ ook inderdaad een norm is, d.w.z., $\|\cdot\|$ is een afbeelding $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}$ zo dat voor alle $L, M \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\|L\| \geq 0$ en $\|L\| = 0 \implies L = 0$;

(b) $\|\lambda L\| = |\lambda| \, \|L\|$;

(c) $\|L + M\| \leq \|L\| + \|M\|$ (driehoeksongelijkheid).

Zoals we in Inleiding Analyse gezien hebben, is er nu een natuurlijke afstand of metriek d op $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, die gegeven wordt door

$$d(L, M) := \|L - M\|, \qquad (L, M \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)).$$

Het volgende lemma zal zeer nuttig blijken voor het schatten van van uitdrukkingen waarin lineaire afbeeldingen voorkomen.

Lemma 1.39 *Zij $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ lineair en $v \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt dat*

$$\|L\, v\| \leq \|L\|\ \|v\|. \tag{1.15}$$

Is M een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, dan geldt voor de samenstelling $M \circ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ dat

$$\|M \circ L\| \leq \|M\|\ \|L\|. \tag{1.16}$$

Bewijs In het bewijs zal steeds gebruik gemaakt worden van de volgende ongelijkheid, voor reële getallen $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_s$:

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_s b_s)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{s} a_j^2\right) \left(\sum_{j=1}^{s} b_j^2\right).$$

Dit is in feite de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz voor het standaardinproduct in $\mathbb{R}^s$ van de vectoren $a = (a_1, \ldots, a_s)$ en $b = (b_1, \ldots, b_s)$.

Toepassing van deze Cauchy–Schwarz-ongelijkheid levert voor iedere $1 \leq i \leq p$ dat

$$((L\, v)_i)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\, v_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} (L_{ij})^2\right) \|v\|^2.$$

Sommatie hiervan over i geeft dat $\|L\, v\|^2 \leq \|L\|^2\, \|v\|^2$, waaruit door worteltrekken (1.15) volgt.

Het bewijs van (1.16) is analoog. Door toepassen van de Cauchy-Schwarz-ongelijkheid vinden we

$$((M\, L)_{hj})^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} M_{hi}\, L_{ij}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{p} (M_{hi})^2\right) \left(\sum_{i=1}^{p} (L_{ij})^2\right).$$

Sommatie over alle h en j geeft vervolgens de gewenste schatting. □

Opmerking 1.40 Het volgende is een oefening in het werken met normen van lineaire afbeeldingen. Laat $v,\ v_0 \in \mathbb{R}^n$ en $L,\ L_0 \in \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^p)$. Gebruikmakend van (1.15) krijgen we uit

$$\begin{aligned} Lv - L_0 v_0 &= L\, v - L\, v_0 + L\, v_0 - L_0\, v_0 \\ &= L\,(v - v_0) + (L - L_0)\, v_0 \\ &= L_0\,(v - v_0) + (L - L_0)\, v_0 + (L - L_0)\,(v - v_0) \end{aligned}$$

dat

$$\|Lv - L_0 v_0\| \leq \|L_0\|\, \|v - v_0\| + \|L - L_0\|\, \|v_0\| + \|L - L_0\|\, \|v - v_0\|. \tag{1.17}$$

Met deze schatting is gemakkelijk in te zien dat de afbeelding

$$(L, v) \mapsto Lv, \quad \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

continu is in elke (L_0, v_0). Uiteraard kan men deze continuïteit ook afleiden door alle voorkomende uitdrukkingen in componenten uit te schrijven.

Op een soortgelijke manier kan men laten zien dat de samenstelling $(L, M) \mapsto M \circ L$ een continue afbeelding $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \times \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ definieert. ⊘

Als toepassing van de behandelde schattingen bewijzen we nu eerst het volgende lemma. We veronderstellen weer dat $U \subset \mathbb{R}^n$ open is en dat $f : U \to \mathbb{R}^p$.

Lemma 1.41 *Zij $a \in U$, en veronderstel dat f totaal differentieerbaar is in a. Dan is f continu in het punt a.*

Bewijs We schrijven

$$R(h) := f(a+h) - f(a) - Df(a)(h), \qquad (h \in -a + U).$$

Dan geldt voor alle $h \in -a + U$ dat

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a)\| &= \|Df(a)(h) + R(h)\| \\ &\leq \|Df(a)(h)\| + \|R(h)\| \\ &\leq \|Df(a)\| \, \|h\| + \|R(h)\|. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Uit de definitie van differentieerbaarheid volgt dat $\|h\|^{-1}\|R(h)\|$ limiet 0 heeft voor $h \to 0$. Dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $a + B(0;\delta) = B(a;\delta) \subset U$ en zo dat voor alle $h \in B(0;\delta) \setminus \{0\}$ geldt dat $\|h\|^{-1}\|R(h)\| \leq 1$. Hieruit volgt

$$\|R(h)\| \leq \|h\|, \qquad (h \in B(0;\delta))$$

(merk op dat $R(0) = 0$). Combineren we dit met (1.18), dan zien we dat voor alle $x \in B(a;\delta)$ geldt dat

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq (\|Df(a)\| + 1)\|h\|.$$

Hieruit volgt weer dat dat $\|f(a+h) - f(a)\| \to 0$ voor $h \to 0$. Met de substitutiestelling voor limieten volgt nu dat $\|f(x) - f(a)\| \to 0$ voor $x \to a$, dus f is continu in a. □

Het volgende resultaat geeft het meest gebruikte criterium om tot de totale differentieerbaarheid van afbeeldingen te besluiten.

Stelling 1.42 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open verzameling zijn, $f : U \to \mathbb{R}^p$ een afbeelding en $a \in U$. Veronderstel dat f partieel differentieerbaar is, terwijl de partiële afgeleiden $D_j f$ continu zijn in a. Dan is f totaal differentieerbaar in a.*

Opmerking 1.43 Wegens Gevolg 1.33 wordt de totale afgeleide $Df(a)$ in de bovenstaande stelling gegeven door de Jacobi-matrix. ⊘

Het bewijs van Stelling 1.42 vergt enige voorbereiding. Dit is het onderwerp van de volgende paragraaf.

1.5 Groei en afgeleide

De groei van een differentieerbare functie van één variabele kan beschreven worden in termen van zijn afgeleide, met behulp van de middelwaardestelling. Dit resultaat zullen we coördinaatsgewijs toepassen op partieel differentieerbare functies van meer variabelen. De volgende notatie zal ons daarbij van pas komen.

Voor twee punten $a, b \in \mathbb{R}^n$ definiëren we *het gesloten lijnstuk* $[a, b]$ in $\mathbb{R}^n$ met eindpunten a en b als de verzameling van punten

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Merk op dat we hier geen begin- of eindpunt aanwijzen, en dat $[a, b] = [b, a]$.

Deze definitie heeft in het bijzonder betekenis in het eendimensionale geval $n = 1$. Is $b < a$ dan komt het zo boven gedefinieerde lijnstuk $[b, a]$ overeen met het interval $[a, b]$. Als $a = b$ dan betekent de bovenstaande definitie dat $[a, b] = \{a\}$.

Wij zullen de volgende variant van de middelwaardestelling gebruiken.

Lemma 1.44 (Middelwaardestelling) *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en $\varphi : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Dan bestaat er voor alle $a, b \in I$ een $c \in [a, b]$ zo dat*

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)\ (b - a). \tag{1.19}$$

Bewijs Voor $a < b$ is dit resultaat een gevolg van de in het dictaat Inleiding Analyse bewezen middelwaardestelling (de identiteit (1.19) geldt dan zelfs voor een $c \in]\,a, b\,[$). Voor $a = b$ is het resultaat evident. Voor $a > b$ is het resultaat een gevolg van de middelwaardestelling toegepast op het interval $[b, a]$. $\square$

We veronderstellen nu dat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deel is en dat $f : U \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar is op U.

Lemma 1.45 *Laat $p, q \in U$ en veronderstel dat $[p, q] \subset U$. Veronderstel verder dat $1 \leq j \leq n$ en dat p en q hooguit in de j-de coordinaat verschillen (dus $p_i = q_i$ voor elke $i \neq j$). Dan bestaat er een $r \in [p, q]$ zo dat*

$$f(q) - f(p) = D_j f(r) \cdot (q_j - p_j). \tag{1.20}$$

Bewijs We beschouwen de functie $\varphi : [p_j, q_j] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\varphi(t) = f(p_1, \ldots, p_{j-1}, t, p_{j+1}, \ldots, p_n).$$

Dan is de functie φ differentieerbaar, terwijl $\varphi(p_j) = f(p)$ en $\varphi(q_j) = f(q)$. Wegens de middelwaardestelling (voor gewone differentieerbaarheid) bestaat er een $c \in [p_j, q_j]$ zo dat

$$f(q) - f(p) = \varphi(q_j) - \varphi(p_j) = \varphi'(c) \cdot (q_j - p_j) = D_j f(r) \cdot (q_j - p_j),$$

waarbij $r := (p_1, \ldots, p_{j-1}, c, p_{j+1}, \ldots p_n)$. Uit $c \in [p_j, q_j]$ volgt het bestaan van een $\tau \in [0, 1]$ zo dat $c = p_j + \tau(q_j - p_j)$. Het is nu gemakkelijk in te zien dat $r = p + \tau(q - p)$. Dus $r \in [p, q]$ en het resultaat volgt. $\square$

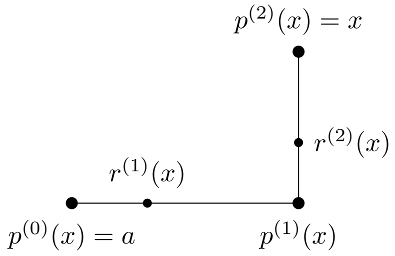
In het vervolg veronderstellen we dat a een vast punt in U is. Er bestaat een $\delta_0 > 0$ zo dat $B(a; \delta_0) \subset U$. We zullen het verschil (de groei) $f(x) - f(a)$ voor $x \in B(a; \delta_0)$ uitdrukken in de partiële afgeleiden van f. Om dit mogelijk te maken splitsen we eerst $f(x) - f(a)$ in een som van verschillen van functiewaarden, waarbij steeds slechts één van de variabelen gevarieerd wordt.

Voor $x \in B(a; \delta_0)$ definiëren we daartoe $p^{(0)}(x) = a$, en, voor $1 \leq j \leq n$,

$$p^{(j)}(x) := (x_1, \ldots, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)\,. \tag{1.21}$$

Voor $j = n$ vatten we dit zo op dat $p^{(n)}(x) = x$.

Als $1 \leq j \leq n$, dan verschillen de opeenvolgende punten $p^{(j-1)}(x)$ en $p^{(j)}(x)$ hooguit in de j-de coordinaat van elkaar. De verbindende lijnstukken $[p^{(j-1)}(x), p^{(j)}(x)]$, voor $1 \leq j \leq n$, geven samen een pad van a naar x, waarbij stuksgewijs steeds slechts één van de coördinaten varieert.



Het pad van het punt a naar het punt x in het vlak ($n = 2$).

Uit (1.21) leiden we af dat

$$\|p^{(j)}(x) - a\| = \left(\sum_{k=1}^{j} (x_k - a_k)^2 \right)^{1/2} \leq \|x - a\|.$$

De punten $p^{(j)}(x)$ liggen dus in $B(a; \|x - a\|) \subset B(a; \delta_0)$ en hetzelfde geldt daarom voor de verbindende lijnstukken, voor $1 \leq j \leq n$:

$$[p^{(j-1)}(x), p^{(j)}(x)] \subset B(a; \|x - a\|) \subset B(a; \delta_0). \tag{1.22}$$

Het verschil $f(x) - f(a)$ kan geschreven worden als

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(p^{(n)}(x)) - f(p^{(0)}(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (f(p^{(j)}(x)) - f(p^{(j-1)}(x)). \end{aligned} \tag{1.23}$$

We concentreren ons op herschrijven van de j-de term, voor $1 \leq j \leq n$. De punten $p^{(j-1)}(x)$ en $p^{(j)}(x)$ verschillen wegens (1.21) hooguit in de j-de coordinaat, en er geldt dat

$$p^{(j)}(x)_j - p^{(j-1)}(x)_j = (x_j - a_j).$$

Het lijnstuk $[p^{(j-1)}(x), p^{(j)}(x)]$ ligt geheel in $B(a; \delta_0)$ en dus in U. Door toepassing van het bovenstaande lemma zien we nu dat er een

$$r^{(j)}(x) \in [p^{(j-1)}(x), p^{(j)}(x)] \tag{1.24}$$

bestaat zo dat

$$f(p^{(j)}(x)) - f(p^{(j-1)}(x)) = D_j f(r^{(j)}(x)) \cdot (x_j - a_j). \tag{1.25}$$

Dan volgt door combinatie van (1.23) en (1.25) dat

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(r^{(j)}(x)) \cdot (x_j - a_j). \tag{1.26}$$

Schrijf

$$L_j(x) := D_j f(r^{(j)}(x)). \tag{1.27}$$

Dan volgt door combinatie van (1.23), (1.25) en (1.27) dat

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x) \cdot (x_j - a_j). \tag{1.28}$$

Dit leidt tot het volgende resultaat.

Lemma 1.46 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $a \in U$. Laat $f : U \to \mathbb{R}$ een functie zijn zo dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de functie f partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele terwijl de partiële afgeleide functie functie $D_j f : U \to \mathbb{R}$ continu is in het punt a. Dan is er een open bol B in U met middelpunt a en voor iedere dergelijke bol zijn er functies $L_j : B \to \mathbb{R}$, voor $1 \leq j \leq n$, waarvoor geldt dat*

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x)\ (x_j - a_j)\,, \quad (x \in B) \qquad \text{en} \quad \lim_{x \to a} L_j(x) = D_j f(a). \tag{1.29}$$

Bewijs Omdat U open is, is er een bol $B = B(a; \delta_0) \subset U$. Definieer functies $L_j : B \to \mathbb{R}$ als in (1.27). Dan geldt (1.28).

Wegens (1.22) geldt $\|r^{(j)}(x) - a\| \leq \|x - a\|$, voor $1 \leq j \leq n$, en dus $r^{(j)}(x) \to a$ als $x \to a$. Anderzijds is de partiële afgeleide $D_j f$ continu in a. Met de substitutiestelling volgt daarom dat

$$L_j(x) = D_j f(r^{(j)}(x)) \to D_j f(a), \qquad (x \to a).$$

□

Gevolg 1.47 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $a \in U$. Laat $f : U \to \mathbb{R}$ een functie zijn zo dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de functie f partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele terwijl de partiële afgeleide functie $D_j f : B \to \mathbb{R}$ continu is in het punt a. Dan is f totaal differentieerbaar in a.*

Bewijs Zij $\delta_0 > 0$ zo dat $B = B(a; \delta_0) \subset U$. Als in Lemma 1.46 geldt voor $h \in B(0; \delta_0)$, dus $a + h \in B(a; \delta_0)$), dat

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} L_j(a + h) h_j.$$

We definiëren de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door

$$A(h) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(a) h_j.$$

Zij

$$R(h) := f(a + h) - f(a) - A(h).$$

Dan geldt voor $h \in B(0; \delta_0) \setminus \{0\}$ dat

$$R(h) = \sum_{j=1}^{n} [L_j(a + h) - D_j f(a)] h_j$$

dus, in aanmerking nemend dat $|h_j| \leq \|h\|$,

$$\|h\|^{-1}|R(h)| \leq \sum_{j=1}^{n} |L_j(a+h) - D_j f(a)| \|h\|^{-1}|h_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |L_j(a+h) - D_j f(a)|.$$

Wegens Lemma 1.46 heeft de laatste uitdrukking limiet 0 voor $h \to 0$. Hieruit volgt wegens Opmerking 1.34 dat f totaal differentieerbaar is in het punt a. $\square$

Gevolg 1.47 is in feite Stelling 1.42 in het speciale geval dat de dimensie p van de beeldruimte gelijk is aan 1. We zullen hieruit de stelling in volledige algemeenheid afleiden.

Bewijs van Stelling 1.42 We definiëren de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ door

$$A(h)_i = Df_i(a)(h) = (D_1 f_i(a) \dots D_n f_i(a))(h).$$

Voor $h \in -a + U$ definiëren we het reststuk $R(h) \in \mathbb{R}^p$ door

$$R(h) = f(a+h) - f(a) - A(h).$$

Door de i-de component te nemen voor $1 \leq i \leq p$ krijgen we

$$R_i(h) = f_i(a+h) - f_i(a) - Df_i(a)(h).$$

Wegens Gevolg 1.47 weten we dat f_i in a totaal differentieerbaar is, dus

$$\lim_{h \to a} \|h\|^{-1}|R_i(h)| = 0.$$

Aangezien $\|R(h)\| \leq \sum_i |R_i(h)|$, geldt

$$\|h\|^{-1}\|R(h)\| \leq \sum_{i=1}^{p} \|h\|^{-1}|R_i(h)|$$

en met de somregel en de insluitstelling voor limieten leiden we af dat $\|h\|^{-1}\|R(h)\| \to 0$ voor $h \to 0$. Wegens Opmerking 1.34 volgt hieruit dat f totaal differentieerbaar is in a met afgeleide A. $\square$

We eindigen deze paragraaf met een resultaat waarin de totale afgeleide gebruikt wordt om de groei van een scalaire functie langs een lijnstuk te schatten. Ter voorbereiding hebben we de volgende middelwaardestelling.

Stelling 1.48 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f : U \to \mathbb{R}$ een functie die overal totaal differentieerbaar is. Dan geldt voor elk tweetal punten $p, q \in U$ met $[p, q] \subset U$ dat er een punt $r \in [p, q]$ bestaat zo dat*

$$f(q) - f(p) = Df(r)(q - p). \tag{1.30}$$

Bewijs We beschouwen de functie $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$\varphi(t) := f(p + t(q - p)).$$

Voor iedere $t_0 \in [0,1]$ en $t \in -t_0 + [0,1]$ geldt dat

$$\varphi(t_0 + t) = f(p + t_0(q-p) + tv),$$

waarbij $v = q - p$. Aangezien f totaal differentieerbaar is in $p + t_0(q-p) \in [p,q] \subset U$ volgt dat f in dat punt ook richtingsdifferentieerbaar in de richting v is, met richtingsafgeleide $D_v f(p+t_0(q-p)) = Df(p + t_0(q-p))(v)$. We concluderen dat

$$\lim_{t \to 0} t^{-1}[\varphi(t_0 + t) - \varphi(t_0)] = Df(p + t_0(q-p))(v).$$

Hieruit volgt dat φ differentieerbaar is in t_0 met afgeleide

$$\varphi'(t_0) = Df(p + t_0(q-p))(v), \qquad v = q - p.$$

We concluderen dat φ differentieerbaar is op $[0,1]$ met afgeleide gegeven door

$$\varphi'(t) = Df(p + t(q-p))(q-p) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Met behulp van de middelwaardestelling voor gewone differentiatie volgt nu het bestaan van een $c \in [0,1]$ zo dat

$$f(q) - f(p) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = Df(p + c(q-p))(q-p).$$

Hieruit volgt het resultaat met $r = p + c(q-p) \in [p,q]$. $\square$

Gevolg 1.49 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f : U \to \mathbb{R}$ een functie die overal totaal differentieerbaar is. We veronderstellen verder dat $M \geq 0$ en dat $\|Df(x)\| \leq M$ voor alle $x \in U$. Dan geldt voor elk tweetal punten $p, q \in U$ met $[p,q] \subset U$ dat*

$$|f(q) - f(p)| \leq M\|q - p\|.$$

Bewijs Wegens het voorgaande lemma bestaat er een $r \in [p,q]$ zo dat (1.30) geldt. Hieruit volgt

$$|f(q) - f(p)| \leq \|Df(r)\|\|q - p\| \leq M\|q - p\|.$$

$\square$

Opmerking 1.50 (Opgave) Toon aan dat dezelfde schatting geldt voor vectorwaardige functies f. $\oslash$

1.6 Rekenregels voor totale afgeleiden

We veronderstellen weer dat $U \subset \mathbb{R}^n$ open is en dat $a \in U$.

Lemma 1.51 *Laten $f, g : U \to \mathbb{R}$ totaal differentieerbaar in het punt a zijn. Dan zijn $f + g$ en $f\,g$ totaal differentieerbaar in a en*

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a), \tag{1.31}$$

$$D(f\,g)(a) = g(a)\,Df(a) + f(a)\,Dg(a). \tag{1.32}$$

Is bovendien $f(a) \neq 0$, dan is $1/f$ totaal differentieerbaar in het punt a en is

$$D(1/f)(a) = -\frac{1}{f(a)^2}\,Df(a). \tag{1.33}$$

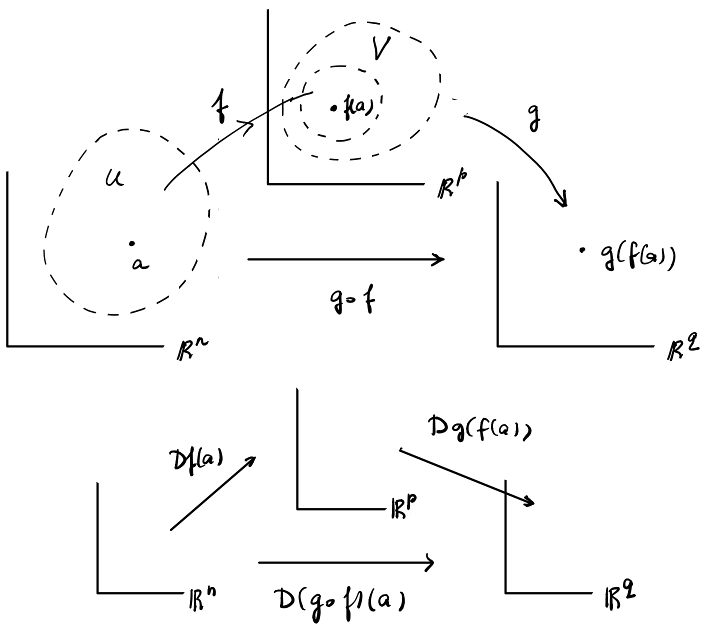
Merk op dat we in de producten steeds de scalairen (reële getallen) vóór de lineaire afbeeldingen hebben gezet, hetgeen de gebruikelijke volgorde is. Het opschrijven in de verkeerde volgorde zou kunnen suggereren dat men denkt dat $Df(a)$ een getal is (de afgeleide van f in het punt a), in plaats van een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Als f en g continu differentieerbaar zijn op een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, dan volgt Lemma 1.51 met het oog op Stelling 1.42 uit Lemma 1.6. Men kan Lemma 1.51 echter ook zonder al te veel moeite direct uit Definitie 1.25 bewijzen. Rekenregels voor vectorwaardige totaal differentieerbare functies volgen door Lemma 1.51 op de coördinaatfuncties toe te passen

Zeer belangrijk is de nu volgende *kettingregel voor totale afgeleiden*.

Stelling 1.52 (Kettingregel) *Laat U een open deel zijn van $\mathbb{R}^n$ en V een open deel van $\mathbb{R}^p$. Zij $f : U \to V$ een afbeelding die totaal differentieerbaar is in het punt $a \in U$. Zij $g : V \to \mathbb{R}^q$ totaal differentieerbaar in $f(a)$. Dan is de samengestelde afbeelding $g \circ f : U \to \mathbb{R}^q$ totaal differentieerbaar in a, en er geldt dat*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a). \tag{1.34}$$



De kettingregel

Bewijs Schrijf $b = f(a)$. We zullen de karakterisering van differentieerbaarheid uit Opmerking 1.35 gebruiken. Er bestaan afbeeldingen $\rho_1 : -a + U \to \mathbb{R}^p$ en $\rho_2 : -b + V \to \mathbb{R}^q$ zo dat

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)h + \|h\|\rho_1(h), \quad (a+h \in U), \\ g(b+k) &= g(b) + Dg(b)k + \|k\|\rho_2(k), \quad (b+k \in V), \end{aligned}$$

en

$$\lim_{h\to 0} \rho_1(h) \to 0 \quad \text{en} \quad \lim_{k \to 0} \rho_2(k) = 0.$$

Voo $h \in U - a$ schrijven we

$$k(h) = f(a+h) - f(a) = Df(a)h + \|h\|\rho_1(h). \tag{1.35}$$

Dan geldt $b + k(h) = f(a+h) \in V$ voor $h \in U - a$ en voor zulke h zien we dat

$$(g \circ f)(a+h) = g(b + k(h)) = g(b) + Dg(b)k(h) + \|k(h)\|\rho_2(k(h)).$$

Door gebruik te maken van de laatste uitdrukking voor $k(h)$ uit formule (1.35) vinden we vervolgens dat

$$(g \circ f)(a+h) = (g \circ f)(a) + Dg(b)Df(a)h + R(h)$$

waarin

$$R(h) = Dg(b)(\|h\|\rho_1(h)) + \|k(h)\|\rho_2(k(h)). \tag{1.36}$$

Voor de voltooiing van het bewijs is het nu voldoende aan te tonen dat $\|h\|^{-1}R(h) \to 0$ voor $h \to 0$. We zullen de soortgelijke uitspraak bewijzen voor elk van de twee terminen in de som (1.36). Allereerst,

$$\|h\|^{-1}Dg(b)(\|h\|\rho_1(h)) = Dg(b)(\rho_1(h)) \to Dg(b)(0) = 0.$$

Daarnaast is

$$\|h\|^{-1}\|k(h)\| \leq \|Df(a)\| + \|\rho_1(h)\|$$

en het rechterlid is weer begrensd door $\|Df(a)\| + 1$ voor h voldoende dicht bij 0. In het bijzonder volgt dat $k(h) \to 0$ for $h \to 0$. Voor $h \to 0$ geldt dus

$$\|\|h\|^{-1}\|k(h)\|\rho_2(k(h)\| \leq (\|Df(a)\| + 1)\|\rho_2(k(h))\| \to 0$$

vanwege de substitutieregel en de insluitstelling voor limieten. Hiermee is het bewijs voltooid. □

Opmerking 1.53 De formule (1.34) is equivalent met de formules

$$\frac{\partial (g \circ f)_h}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g_h}{\partial y_i}(f(a))\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \tag{1.37}$$

voor de matrixcoëfficiënten, voor $1 \leq h \leq q,\ 1 \leq j \leq n$. Hierbij is stilzwijgend aangenomen dat $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de variabele in $\mathbb{R}^n$ aanduidt, en $y = (y_1, \ldots, y_p)$ die in $\mathbb{R}^p$.

We kunnen dit als volgt inzien. Duiden we met mat de matrix aan van een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ ten aanzien van de standaardbases, dan is formule (1.34) gelijkwaardig met de formule

$$\mathrm{mat}(D(g \circ f)(a)) = \mathrm{mat}(Dg(f(a))) \cdot \mathrm{mat}(Df(a)). \tag{1.38}$$

De eerste matrix heeft coëfficiënten $D_j(g \circ f)_h(a)$, de tweede heeft coëfficiënten $D_i g_h(f(a))$ en de derde heeft coëfficiënten $D_j f_i(a)$, voor $1 \leq h \leq q$, $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq n$. Uitgeschreven naar matrix coëfficiënten is (1.38) dus gelijkwaardig met de vergelijkingen

$$D_j((g \circ f)_h)(a) = \sum_{i=1}^{p} D_i(g_h)(f(a))D_j f_i(a)$$

voor $1 \leq h \leq q,\ 1 \leq j \leq n$. Opgeschreven in de klassieke notatie zijn de laatste vergelijkingen precies de vergelijkingen van (1.37).

We merken tenslotte nog op dat $(g \circ f)(x) = (g_1(f(x)), \dots, g_q(f(x)))$, dus $(g \circ f)_h = g_h \circ f$ voor alle $1 \leq h \leq q$.

$\oslash$

Een belangrijk speciaal geval van de kettingregel ontstaat als een functie gedifferentieerd wordt 'langs een kromme'. Om precies te zijn, laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling zijn en $g : U \to \mathbb{R}^q$ de functie in kwestie. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval, en $\gamma : I \to U$ een differentieerbare afbeelding. Zoals bekend wordt de afbeelding γ in dit geval ook wel een *kromme* in de n-dimensionale ruimte genoemd. Als $t \in I$ als de *tijd* wordt geïnterpreteerd en $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ als de *positie*, dan wordt de afbeelding γ, de 'positie als functie van de tijd', ook wel als een *beweging* in de n-dimensionale ruimte opgevat. In dit geval heet de afgeleide $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ de *snelheidsvector* van de beweging op het tijdstip t.

De samenstelling $g \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^q$ noemt men ook wel de *functie g langs de kromme γ*. Met het differentiëren van g langs γ bedoelen we nu het differentiëren van de samenstelling $g \circ \gamma$.

Lemma 1.54 (Kettingregel voor differentiëren langs een kromme) *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open, $I \subset \mathbb{R}$ een interval. Zij $\gamma : I \to U$ een kromme in U en $g : U \to \mathbb{R}^p$. Is γ differentieerbaar in een punt $t_0 \in I$ en g differentieerbaar in $\gamma(t_0)$ dan is $g \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^p$ differentieerbaar in t_0 en er geldt dat*

$$(g \circ \gamma)'(t_0) = Dg(\gamma(t_0))(\gamma'(t_0)). \tag{1.39}$$

Bewijs Uit de kettingregel (1.34) voor de totale afgeleide volgt dat $g \circ \gamma$ totaal differentieerbaar is in t_0, met afgeleide

$$D(g \circ \gamma)(t_0) = Dg(\gamma(t_0)) \circ D\gamma(t_0).$$

Toepassen van het linker- en het rechterlid op het element $1 \in \mathbb{R}$ leidt nu met het oog op Lemma 1.37 tot de formule (1.39). $\square$

In het bovenstaande is $Dg(\gamma(t_0))$ een lineaire afbeelding is van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$; het beeld hieronder van de snelheidsvector $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ is volgens (1.39) gelijk aan de vector $(g \circ \gamma)'(t_0) \in \mathbb{R}^q$.

We beschouwen tenslotte het speciale geval $p = 1$, waarin g dus een scalaire functie is. De formule (1.39) laat zich dan herschrijven als

$$(g \circ \gamma)'(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(\gamma(t_0))\gamma_j'(t_0). \tag{1.40}$$

Gevolg 1.55 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open, $I \subset \mathbb{R}$ een interval. Zij $\gamma : I \to U$ een kromme in U en $g : U \to \mathbb{R}$. Is γ differentieerbaar in een punt $t_0 \in I$ en g differentieerbaar in $\gamma(t_0)$ dan is $g \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^p$ differentieerbaar in t_0 en er geldt dat*

$$(g \circ \gamma)'(t_0) = \langle \operatorname{grad} g(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle. \tag{1.41}$$

Bewijs Het rechterlid van (1.40) is ook te zien als het inproduct van de vectoren $\operatorname{grad} g(\gamma(t_0)) \in \mathbb{R}^n$ en $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$, zie (1.6). Hieruit volgt (1.41). $\square$

Opmerking 1.56 Als we nemen $\gamma(t) = a + t\,v$ en $t_0 = 0$, dan zien we dat het linkerlid in (1.39) gelijk is aan de richtingsafgeleide $D_v g(a)$, terwijl $\gamma'(t_0) = v$. We merken op dat (1.39) correspondeert met de vroeger afgeleide formule (1.10). De identiteit (1.41) geeft nu dat

$$D_v g(a) = \langle \operatorname{grad} g(a), v \rangle.$$

Dit is ook direct in te zien door op te merken dat $Dg(a)(v) = \langle \mathrm{grad}\, g(a), v\rangle$, voor alle $v \in \mathbb{R}^n$. $\oslash$

Uit (1.41) kunnen we ook het onderstaande resultaat afleiden, dat nuttig is in situaties dat een variabele meerdere keren voorkomt.

Lemma 1.57 (Somregel voor differentiatie) *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval, $t_0 \in I$ en $n \geq 1$. Veronderstel dat de functie $h : I^n \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $(t_0, \ldots, t_0)$. Dan is*

$$\frac{d}{dt} h(t, t, \ldots, t)\Big|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} h(t_0, \ldots, \overset{(j)}{t}, \ldots, t_0)\Big|_{t=t_0}.$$

Bewijs De verzameling $U := I^n$ is open in U. De afbeelding $\gamma : I \to U$, $t \mapsto (t, t, \ldots, t)$ is differentieerbaar, met afgeleide

$$\gamma'(t) = (1, 1, \ldots, 1), \qquad (t \in I).$$

Uit (1.41) met h in plaats van g leiden we af dat

$$\frac{d}{dt} h(t, t, \ldots, t)\Big|_{t=t_0} = \langle \mathrm{grad}\, h(\gamma(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = \sum_{j=1}^{n} D_j h(t_0, \ldots, t_0).$$

Het bewijs wordt voltooid met de opmerking dat

$$D_j h(t_0, \ldots, t_0) = \frac{d}{dt} h(t_0, \ldots, \overset{(j)}{t}, \ldots, t_0)\Big|_{t=t_0}.$$

$\square$

Opmerking 1.58 Omgekeerd kan de kettingregel voor totale differentiatie afgeleid worden uit de bovenstaande somregel. In de setting van Stelling 1.52 geldt dat de componenten van de samengestelde functie $g \circ f$ gegeven worden door

$$(g \circ f)_h(x) = g_h\left(f_1\left(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n\right), \ldots, f_p\left(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n\right)\right).$$

De partiële afgeleide in a naar de j-de variabele wordt nu gegeven door

$$\frac{\partial g_h(f(x))}{\partial x_j}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=a_j} g_h\left(f_1\left(a_1, \ldots, \overset{(j)}{t} \ldots, a_n\right), \ldots, f_p\left(a_1, \ldots, \overset{(j)}{t}, \ldots, a_n\right)\right)$$

Door toepassing van de somregel (met $t_0 = a_j$) vinden we

$$\frac{\partial g_h(f(x))}{\partial x_j}\Big|_{x=a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big|_{t=a_j} g_h\left(f_1\left(a\right), \ldots, f_i\left(a_1, \ldots, \overset{(j)}{t}, \ldots, a_n\right), \ldots, f_p\left(a\right)\right).$$

Door toepassing van de kettingregel in één variabele zien we dat de i-de term van de bovenstaande som gelijk is aan

$$\frac{\partial g_h(y)}{\partial y_i}\Big|_{y=f(a)} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\Big|_{x=a}.$$

Dit leidt weer tot de formule (1.37) en laat zien dat de somregel equivalent is met de kettingregel. Het bovenstaande geeft bovendien een andere manier om naar de kettingregel te kijken. $\oslash$

2 Hogere orde partiële afgeleiden

2.1 Verwisseling van de differentiatievolgorde

Laat V een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ zijn, en $f : V \to \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie op V die partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele. Neem aan dat de functie $D_1 f : V \to \mathbb{R}$ op zijn beurt partieel differentieerbaar is naar de tweede variabele. We kunnen dan de 'gemengde tweede orde partiële afgeleide' $D_2 D_1 f = D_2 (D_1 f)$ vormen, de 'partiële afgeleide naar de tweede variabele van de partiële afgeleide van f naar de eerste variabele'. Men noteert deze ook wel als

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \, \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right). \tag{2.1}$$

We hebben nu de volgende stelling over de verwisselbaarheid van de differentiatievolgorde.

Stelling 2.1 *Laat $V \subset \mathbb{R}^2$ een open deelverzameling zijn, en $f : V \to \mathbb{R}$ een partieel differentieerbare functie. Laat $a \in V$, en veronderstel dat aan de volgende voorwaarden voldaan is:*

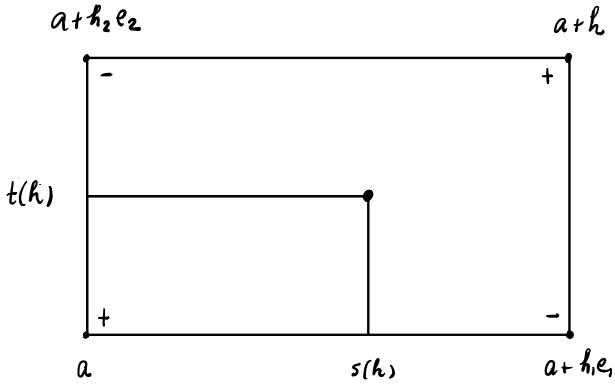
(a) *$D_1 f$ is partieel differentieerbaar naar de tweede variabele;*

(b) *$D_2 f$ is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele;*

(c) *$D_2 D_1 f$ en $D_1 D_2 f$ zijn continu in a.*

Dan is

$$D_1 D_2 f(a) = D_2 D_1 f(a). \tag{2.2}$$



Figuur bij het bewijs van Stelling 2.1

Bewijs Omdat V open is, bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $B(a; 2\delta) \subset V$. Voor $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ met $|h_1|, |h_2| < \delta$ geldt dat $a + h$ tot $B(a; 2\delta)$ en dus tot V behoort. Voor een dergelijke h waarvan de componenten h_1, h_2 bovendien ongelijk nul zijn definiëren we:

$$Q(h) = (h_1 h_2)^{-1} \left[f(a + h) - f(a + h_1 e_1) - f(a + h_2 e_2) + f(a) \right], \tag{2.3}$$

waarbij $a + h_1 e_1 = (a_1 + h_1, a_2)$ en $a + h_2 e_2 = (a_1, a_2 + h_2)$.

Ons eerste doel is om te bewijzen dat

$$\lim_{h \to 0} Q(h) = D_2 D_1 f(a). \tag{2.4}$$

Hiertoe introduceren we voor $h_2 \neq 0$ de hulpfunctie $v_{h_2} :]\, a_1 - \delta, a_1 + \delta\, [\to \mathbb{R}$ door

$$v_{h_2}(s) := \frac{f(s, a_2 + h_2) - f(s, a_2))}{h_2}.$$

Het is nu gemakkelijk te controleren dat voor $0 < |h_1|, |h_2| < \delta$ geldt dat

$$Q(h) = \frac{v_{h_2}(a_1 + h_1) - v_{h_2}(a_1)}{h_1}.$$

De functie v_{h_2} is differentieerbaar met afgeleide

$$v'_{h_2}(s) = \frac{D_1 f(s, a_2 + h_2) - D_1 f(s, a_2)}{h_2}$$

Door toepassing van de middelwaardestelling voor differentiëren in één variabele vinden we dat er een tussen a_1 en $a_1 + h_1$ gelegen getal $s(h)$ bestaat zo dat

$$Q(h) = v'_{h_2}(s(h)) = \frac{D_1 f(s(h), a_2 + h_2) - D_1 f(s(h), a_2)}{h_2}.$$

Door toepassing van de middelwaardestelling op de differentieerbare functie

$$\varphi :]\, a_2 - \delta, a_2 + \delta\, [\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto D_1 f(s(h), t)$$

volgt dat er en tussen a_2 en $a_2 + h_2$ gelegen getal $t(h)$ bestaat zo dat

$$Q(h) = \varphi'(t(h)) = D_2 D_1 f(s(h), t(h)). \tag{2.5}$$

Uit het bovenstaande volgt dat

$$\|(s(h), t(h)) - (a_1, a_2)\| \leq |s(h) - a_1| + |t(h) - a_2| \leq |h_1| + |h_2|,$$

dus met de insluitstelling volgt dat

$$\lim_{h \to 0} (s(h), t(h)) = (a_1, a_2) = a.$$

Combineren we dit met de continuïteit van $D_2 D_1 f$ in a, dan vinden we door toepassing van de substitutiestelling voor limieten op (2.5) dat (2.4) inderdaad geldt.

We merken nu op dat de eerste en de tweede variabele in de definitie van Q precies dezelfde rol spelen. Bovendien zijn de eisen (a)-(c) symmetrisch in de eerste en de tweede variabele. Hieruit volgt dat (2.4) ook geldt met verwisseling van de volgorde van de partiële afgeleiden. Dus:

$$\lim_{h \to 0} Q(h) = D_1 D_2 f(a). \tag{2.6}$$

Wegens de uniciteit van limieten leiden we uit (2.4) en (2.6) af dat (2.2) geldt. □

Met het bovenstaande resultaat kunnen we nu algemener herhaald partieel differentiëren behandelen in $n \geq 2$ variabelen.

Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f : U \to \mathbb{R}^p$ een functie. De functie f heet *continu differentieerbaar*, of ook wel C^1, indien hij partieel differentieerbaar is en als bovendien alle partiële afgeleiden $D_j f$ voor $1 \leq j \leq n$ bestaan en continu zijn. Wegens Stelling 1.42 is f dan totaal differentieerbaar in alle punten van U, terwijl de totale afgeleide $Df : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ continu is.

Met inductie over $k \geq 2$ zegt men dat de functie f *k keer continu differentieerbaar* of kortweg dat f een C^k-functie is, indien f een C^1 functie is en bovendien voor iedere $1 \leq j \leq n$ de partiële afgeleide $D_j f : U \to \mathbb{R}^p$ een C^{k-1} functie is.

De verzameling van alle C^k functies $U \to \mathbb{R}^p$ wordt genoteerd met $C^k(U, \mathbb{R}^p)$. Verder schrijft men $C^k(U)$ voor $C^k(U, \mathbb{R})$. We merken op dat voor alle $1 \leq l \leq k$ geldt dat $C^l(U, \mathbb{R}^p) \subset C^k(U, \mathbb{R}^p)$.

Voor $f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ en iedere keuze van indices $j(1), \dots, j(k)$ met $1 \leq j(i) \leq n$, definiëren we de herhaalde partiële afgeleide $D_{j(k)} \dots D_{j(1)} f$ met inductie naar k door

$$D_{j(k)} D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f = D_{j(k)} \left(D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f \right).$$

Lemma 2.2 *Zij $f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$, $l \leq k$ en laat $j(1), \dots, j(l)$ een rij indices met $1 \leq j(i) \leq n$ zijn. Dan geldt voor iedere permutatie σ van $1, \dots, l$ dat*

$$D_{j(l)} \dots D_{j(1)} f = D_{j(\sigma(l))} \dots D_{j(\sigma(1))} f$$

Bewijs Omdat iedere permutatie geschreven kan worden als samenstelling van buurverwisselingen is het voldoende dit resultaat te bewijzen voor $l = 2$ en σ de buurverwisseling (12). De bovenstaande formule wordt dan

$$D_{j(2)} D_{j(1)} f = D_{j(1)} D_{j(2)} f. \tag{2.7}$$

Deze gelijkheid is evident indien $j(1) = j(2)$. We mogen daarom veronderstellen dat $1 \leq j(1) < j(2) \leq n$. Fixeer $a \in U$, en zij $\delta > 0$ zo dat $B(a; \delta) \subset U$. Zij $B(\delta)$ de open bol in $\mathbb{R}^2$ met middelpunt $(a_{j(1)}, a_{j(2)})$ en straal δ. Definieer $\varphi : B(\delta) \to \mathbb{R}^p$ door

$$\varphi(s, t) := f(a_1, \dots, a_{j(1)-1}, s, a_{j(1)+1}, \dots, a_{j(2)-1}, t, a_{j(2)+1}, \dots a_n).$$

Dan is φ een C^2 functie op $B(\delta)$ terwijl

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \varphi(a_{j(1)}, a_{j(2)}) &= D_{j(1)} D_{j(2)} f(a), \\ D_2 D_1 \varphi(a_{j(1)}, a_{j(2)}) &= D_{j(2)} D_{j(1)} f(a). \end{aligned}$$

De gemengde partiële afgeleiden in de linkerleden van deze twee vergelijkingen zijn gelijk aan elkaar wegens Stelling 2.1. Hieruit volgt de gewenste identiteit (2.7). □

Wegens Lemma 2.2 kan men de differentiatievolgorde van gemengde partiële afgeleiden (van orde hoogstens k) van C^k-functies naar believen verwisselen. Dit betekent dat in de setting van Lemma 2.2 geldt dat

$$D_{j(k)} D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f(x) = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}; \tag{2.8}$$

hierin is α_j het aantal keren dat de differentiatie D_j in de rij $D_{j(k)} D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)}$ voorkomt. Ofwel,

$$\alpha_j = \#\{i \in \{1, \dots, l\} \mid j(i) = j\}.$$

Hierbij betekent $\alpha_j = 0$ dat de differentiatie D_j niet in de rij partiële differentiaties voorkomt. Merk op dat $k = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

De laatste twee uitdrukkingen in (2.8) worden ook verkort genoteerd met

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x),$$

waarin $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ een rijtje van niet-negatieve gehele getallen voorstelt. Zo'n rijtje wordt ook wel *multi-index* genoemd. Het getal

$$l = |\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tag{2.9}$$

heet de *orde* van de multi-index α, en ook van de differentiaaloperator D^α.

Men zegt dat $f : U \to \mathbb{R}^p$ *willekeurig vaak differentieerbaar* of *glad* is, of ook dat f een C^∞ functie is als f een C^k functie is voor iedere $k \in \mathbb{N}$. De ruimte van dergelijke C^∞ functies wordt genoteerd met $C^\infty(U, \mathbb{R}^p)$. Merk op dat

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^p) = \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(U, \mathbb{R}^p).$$

Uit herhaald toepassen van Lemma 1.6 volgt dat als $f,\, g \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$, dan is $f + g \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$. In het bijzonder blijkt hieruit dat $C^k(U, \mathbb{R}^p)$, voorzien van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging, een reële lineaire ruimte is.

Op grond van dezelfde argumentatie geldt, indien $f \in C^k(U)$ en $g \in C^k(X, \mathbb{R}^p)$ dan is $fg \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$. Is als bovendien $f(x) \neq 0$ voor iedere $x \in U$ dan is $g/f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$.

Lemma 2.3 *Laten $U \subset \mathbb{R}^n$ en $V \subset \mathbb{R}^p$ open verzamelingen zijn, $f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ en $g \in C^k(V, \mathbb{R}^q)$. Als $f(U) \subset V$ dan is $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^q)$.*

Bewijs Opgave. Gebruik inductie naar k. □

2.2 Formule van Taylor en Hessiaan

In deze paragraaf behandelen we een resultaat dat het mogelijk maakt de aard van locale extremen voor functies van n-variabelen te bepalen, zien ook Lemma 1.8. We beginnen met twee resultaten uit de analyse in één variabele.

Lemma 2.4 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Dan geldt het volgende*

(a) *f is monotoon stijgend dan en slechts dan als $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$:*

(b) *als $f' > 0$ op $\mathrm{inw}(I)$, dan is f strikt monotoon stijgend op I;*

(c) *f is monotoon dalend dan en slechts dan als $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in I$:*

(d) *als $f' < 0$ op $\mathrm{inw}(I)$, dan is f strikt monotoon dalend op I.*

Bewijs Aangezien (c) en (d) volgen door (a) en (b) toe te passen op $-f$ kunnen we ons beperken tot (a) en (b). We beginnen met (a).

Veronderstel dat f monotoon stijgend is op I en zij $a \in I$. We veronderstellen eerst dat a geen rechtereindpunt is van het interval. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat $[a, a + \delta\,[\; \subset I$. Dan geldt voor alle

$0 < h < \delta$ dat $a+h \in I$ dus $f(a+h) \geq f(a)$ dus $[f(a+h) - f(a)]/h \geq 0$. Door de limiet te nemen voor $h \downarrow 0$ vinden we dat $f'(a) \geq 0$.

Als a een rechtereindpunt is dan is het geen linkereindpunt, dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $]a-\delta, a] \subset I$. Dan geldt voor $-\delta < h < a$ dat $f(a+h) - f(a) \leq 0$ dus $[f(a+h) - f(a)]/h \geq 0$. Door de limiet te nemen voor $h \uparrow 0$ volgt nu dat $f'(a) \geq 0$.

Veronderstel nu dat $f' \geq 0$ op I en laten $x, y \in I$, $x < y$. Dan geldt vanwege de middelwaardestelling dat $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$ voor een $\xi \in [x, y] \subset I$. Aangezien $f'(\xi) \geq 0$ en $y - x > 0$ volgt nu $f(y) - f(x) \geq 0$. Hieruit volgt het monotoon stijgend zijn van f. Hiermee is (a) bewezen.

We bewijzen (b). Laat de voorwaarde vervuld zijn, en laten $x, y \in I$ voldoen aan $x < y$. Wegens de middelwaardestelling bestaat er een $\xi \in]x, y[$ zo dat $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$. Aangezien $f'(\xi) > 0$ vinden we dat $f(y) - f(x) > 0$. Hieruit volgt dat f strikt monotoon stijgend is. □

Lemma 2.5 *Laat $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ een twee keer continu differentieerbare functie zijn en $c \in]a, b[$. Veronderstel dat $f'(c) = 0$ en $f''(c) \neq 0$. Dan geldt het volgende.*

(a) *Als $f''(c) > 0$ dan heeft f een lokaal minimum in c.*

(b) *Als $f''(c) < 0$ dan heeft f een lokaal maximum in c.*

In ieder geval heeft de functie f dus een lokaal extreem in c.

Bewijs We tonen eerst (a) aan. Uit de continuiteit van f'' volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $I :=]c-\delta, c+\delta[\subset]a, b[$ en $f''(x) > 0$ voor alle $x \in I$. Hieruit volgt door toepassing van Lemma 2.4 (b) op f' in plaats van f dat f' strikt monotoon stijgend is op I. In het bijzonder geldt dat $f' < 0$ op $]c-\delta, c[$ en $f' > 0$ op $]c, c+\delta[$. We concluderen, door toepassing van Lemma 2.4 (d) en (b), dat f strikt monotoon dalend is op $]c-\delta, c]$ en strikt monotoon stijgend op $[c, c+\delta[$. Dus $f(x) > f(c)$ voor $x \in]c-\delta, c[$ en voor $x \in]c, c+\delta[$. Hieruit volgt (a).

Bewering (b) volgt door (a) toe te passen op de functie $-f$. □

Opmerking 2.6 Uit het bovenstaande bewijs volgt de sterkere uitspraak dat het lokale extreem c geïsoleerd is in de zin dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $I :=]\, c-\delta, c+\delta\, [\subset]\, a, b\, [$ en $f|_I$ heeft geen ander lokaal extreem dan c. ⊘

We geven nog een alternatief bewijs van Lemma 2.5 dat gebruik maakt van de stelling van Taylor met rest. Dit zal ons motivatie geven voor de studie van lokale extrema voor functies van meer variabelen.

Bewijs We tonen eerst (a) aan. Zij $x \in]a, b[$. Dan bestaat er wegens de stelling van Taylor met rest een tussen c en x gelegen $\xi = \xi_x$ zo dat

$$f(x) = f(c) + \tfrac{1}{2} f''(\xi)(x-c)^2.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van $f'(c) = 0$, waardoor de eerste orde term nul is. Uit de continuïteit van f'' volgt het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat $]\, c-\delta, c+\delta\, [\subset]a, b[$ en zo dat voor alle $\xi \in]\, c-\delta, c+\delta\, [$ geldt $f''(\xi) > 0$. Voor $x \in]\, c-\delta, c+\delta\, [$ met $x \neq c$ geldt dus dat

$$f(x) - f(c) = \tfrac{1}{2} f''(\xi_x)(x-c)^2 > 0.$$

Hieruit volgt dat f in c een lokaal minimum heeft.

Bewering (b) volgt door (a) toe te passen op de functie $-f$. □

Lemma 2.5 en het bewijs daarvan hebben een generalisatie naar meer variabelen in termen van de zogenaamde Hessiaan.

Definitie 2.7 (Hessiaan) Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f : U \to \mathbb{R}$ een C^2 functie. Dan is voor iedere $a \in U$ de *Hessiaan* van f in a gedefinieerd als de volgende $n \times n$-matrix:

$$H_f(a) = (D_j D_i f(a))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

$\oslash$

Uit Lemma 2.2 volgt dat de Hessiaan $H_f(a)$ een *symmetrische matrix* is.

Voorbeeld 2.8 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y.$$

Er geldt $\operatorname{grad} f(x, y) = (2x + y + 1, 2y + x + 1)$. Hieruit volgt door bepaling van de tweede orde afgeleiden dat

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. $\oslash$

Voorbeeld 2.9 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + e^{xy}.$$

Door een directe berekening blijkt dat

$$D_1 D_1 f(x, y) = 2 + y^2 e^{xy}, \quad D_2 D_2 f(x, y) = 2 + x^2 e^{xy}, \quad D_1 D_2 f(x, y) = e^{xy}(1 + xy).$$

Dus

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + y^2 e^{xy} & e^{xy}(1 + xy) \\ e^{xy}(1 + xy) & 2 + x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

(merk op dat $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$). $\oslash$

De Hessiaan speelt een belangrijke rol in het volgende resultaat, dat gezien kan worden als de generalisatie van de eerste orde formule van Taylor met rest naar een functie van twee variabelen. Voor een tweetal punten $p, q \in \mathbb{R}^n$ wordt het *gesloten lijnstuk* dat p en q verbindt genoteerd met $[p, q]$. Daarnaast gebruiken we de notatie

$$]\, p, q\, [:= [p, q] \setminus \{p, q\} = \{p + t(q - p) \mid 0 < t < 1\}.$$

Lemma 2.10 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een convexe open verzameling zijn en $a \in U$. Laat $f : U \to \mathbb{R}$ een C^2 functie zijn. Dan bestaat er voor iedere $x \in U$ een $\xi = \xi_x \in]\, a, x\, [$ zo dat*

$$f(x) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x - a \rangle + \tfrac{1}{2} \langle H_f(\xi)(x - a), (x - a) \rangle. \tag{2.10}$$

Bewijs Zij $x \in U$. We beschouwen de functie $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$\varphi(t) = f(a + t(x - a)).$$

Uit de kettingregel volgt dat φ differentieerbaar is met afgeleide

$$\varphi'(t) = Df(a + t(x-a))(x-a) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)_i. \tag{2.11}$$

Door wederom toepassen van de kettingregel zien we dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_i f(a + t(x-a)) &= (x-a)_i D(D_i f)(a + t(x-a)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} D_j D_i f(a + t(x-a))(x-a)_i (x-a)_j. \end{aligned}$$

Hieruit volgt door sommatie over i en door (2.11) te gebruiken dat

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} D_j D_i f(a + t(x-a))(x-a)_i (x-a)_j. \tag{2.12}$$

In termen van de Hessiaan kan dit herschreven worden als

$$\varphi''(t) = \langle H_f(a + t(x-a))(x-a), x-a \rangle. \tag{2.13}$$

Door toepassing van de eerste orde formule van Taylor met rest op de functie φ volgt voor iedere $t \in [0,1]$ het bestaan van een $0 < \tau < 1$ zo dat

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \tfrac{1}{2}\varphi''(\tau)t^2.$$

Door $t = 1$ in te vullen vinden we dat er een $0 < \tau_x < 1$ bestaat zo dat

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \tfrac{1}{2}\varphi''(\tau_x)$$

Gebruiken we de gevonden formules voor φ' en φ'' dan volgt de bewering van het lemma met $\xi_x = a + \tau_x(x-a)$. $\square$

Definitie 2.11 (Definiete symmetrische matrix) Zij H een symmetrische $n \times n$ matrix.

(a) De matrix H heet *positief definiet* indien $\langle Hx, x \rangle > 0$ voor iedere $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) De matrix H heet *negatief definiet* indien $\langle Hx, x \rangle < 0$ voor iedere $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$\oslash$

Lemma 2.12 *Zij $H = (H_{ij})$ een symmetrische 2×2 matrix. Dan is H (positief of negatief) definiet dan en slechts dan als* $\det H > 0$. *Als dit het geval is, dan geldt het volgende.*

(a) *H is positief definiet dan en slechts dan als $H_{11} > 0$.*

(b) *H is negatief definiet dan en slechts dan als $H_{11} < 0$.*

Bewijs Uit de lineaire algebra weten we dat H een orthonormale basis v_1, v_2 van eigenvectoren heeft. Laten λ_1 en λ_2 de bijbehorende eigenwaarden zijn. Dan is H positief (resp. negatief) definiet dan en slechts dan als λ_1 en λ_2 positief (resp. negatief) zijn. Dus H is definiet dan en slechts als $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Aangezien $\det H = \lambda_1\lambda_2$ is dit laatste het geval dan en slechts dan als $\det H > 0$. Veronderstel nu dat $\det H > 0$. Uit

$$\det H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = H_{11}H_{22} - (H_{12})^2 < H_{11}H_{22}$$

volgt dat $H_{11}H_{22} > 0$. Er zijn dus slechts twee gevallen mogelijk, namelijk $H_{11} > 0$ en $H_{11} < 0$. In het eerste geval geldt ook $H_{22} > 0$ dus is het spoor $\mathrm{tr}\,(H) = H_{11} + H_{22}$[1] van H strikt groter dan nul. In het tweede geval geldt $\mathrm{tr}\,(H) < 0$.

Het spoor van H is onafhankelijk van de basiskeuze, dus

$$\mathrm{tr}\,(H) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

We concluderen dat in het eerste geval λ_1 en λ_2 beide positief zijn, dus H is positief definiet. In het tweede geval ($H_{11} < 0$) zijn λ_1 en λ_2 beide negatief, dus H is negatief definiet. □

Lemma 2.13 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ open zijn en $f : U \to \mathbb{R}$ een C^2-functie. Laat $a \in U$ en veronderstel dat de $n \times n$ matrix $H_f(a)$ positief definiet is. Dan bestaan er constanten $m > 0$ en $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en zo dat voor alle $x \in B(a;\delta)$ en alle $v \in \mathbb{R}^n$ geldt:*

$$\langle H_f(x)v, v\rangle \geq m\|v\|^2.$$

Bewijs Er is een $\delta_0 > 0$ zo dat $B(a;\delta_0) \subset U$. Stel dat de bewering niet waar is. Dan is er voor iedere $\delta < \delta_0$ en iedere gehele $k \geq 1$ een $x \in B(a;\delta)$ te vinden en een $v \in \mathbb{R}^n$ zo dat

$$\langle H_f(x)v, v\rangle < \frac{1}{k}\|v\|^2.$$

Merk op dat deze ongelijkheid impliceert dat $v \neq 0$, dus door v te vervangen door $v/\|v\|$ zien we dat zo'n v ook te vinden is in de eenheidssfeer $S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$.

Door $\delta < \frac{1}{k}$ te nemen zien we dat er een $x_k \in B(a;\frac{1}{k})$ te vinden is en een $v_k \in S$ zo dat

$$\langle H_f(x_k)v_k, v_k\rangle < \frac{1}{k}.$$

De rij (v_k) is bevat in de verzameling S, die gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$, dus rij-compact. Derhalve heeft (v_k) een convergente deelrij (v_{k_j}) met een in S gelegen limiet v. In het bijzonder is $v \neq 0$. Er geldt $x_{k_j} \to a$ voor $j \to \infty$. Wegens de continuïteit van de matrix-elementen van H_f volgt $H_f(a) = \lim_{j\to\infty} H_f(x_{k_j})$. Hieruit volgt dat

$$\langle H_f(a)v, v\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle H_f(x_{k_j})v_{k_j}, v_{k_j}\rangle \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0,$$

tegenspraak. □

We brengen in herinnering dat onder een kritiek of *stationair punt* van een differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{R}$ verstaan wordt een punt $a \in U$ met $Df(a) = 0$ (of, equivalent daarmee, $\mathrm{grad}\, f(a) = 0$).

[1] tr staat voor het Engelse 'trace'

Propositie 2.14 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ open zijn en $f \in C^2(U)$. Laat $a \in U$ een kritiek punt voor f zijn en veronderstel dat de Hessiaan $H_f(a)$ positief (resp. negatief) definiet is. Dan bestaan er constanten $\delta > 0$ en $c > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en zo dat voor alle $x \in B(a;\delta)$ geldt:*

$$f(x) \geq f(a) + c\|x-a\|^2 \qquad (\text{resp. } f(x) \leq f(a) - c\|x-a\|^2).$$

In het bijzonder heeft f in a een lokaal minimum (resp. maximum).

Bewijs Het is voldoende dit te bewijzen in het geval dat $H_f(a)$ positief definiet is (door f te vervangen door $-f$ volgt dan het andere geval).

Aangezien a een kritiek punt is, is $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Wegens het voorgaande lemma bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en zo dat $H_f(x)$ positief definiet is voor alle $x \in B(a;\delta)$. Voor $x \in B(a;\delta)$ geldt $]\,a,x\,[\, \subset B(a;\delta) \setminus \{a\}$. Uit de formule van Taylor met rest (2.10) volgt daarom, voor $x \in B(a;\delta) \setminus \{a\}$, dat

$$f(x) - f(a) = \tfrac{1}{2}\langle H_f(a + \tau_x(x-a))(x-a), (x-a)\rangle \geq \frac{m}{2}\|x-a\|^2.$$

□

Voorbeeld 2.15 We beschouwen de functie f uit Voorbeeld 2.8. Uit de berekende gradient blijkt dat (x, y) een stationair punt van f is dan en slechts dan als $2x + y + 1 = 0$ en $x + 2y + 1 = 0$. Deze vergelijkingen hebben de unieke oplossing $(1/3, 1/3)$. Dit is dus het enige stationaire punt van f. Voor de Hessiaan geldt

$$H = H_f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uit $\det H = 4 - 1 = 3 > 0$ en $H_{11} = 2 > 0$ blijkt dat H positief definiet is (Lemma 2.12). Met Prop. 2.14 volgt nu dat f in $(1/3, 1/3)$ een lokaal minimum heeft. ⊘

Voorbeeld 2.16 We beschouwen de functie f uit Voorbeeld 2.9. Het is gemakkelijk te controleren dat $(0, 0)$ een stationair punt van f is. Uit de eerder gevonden formule voor de Hessiaan blijkt dat

$$H = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Als in het voorgaande voorbeeld blijkt dat deze Hessiaan positief definiet is. Met Prop. 2.14 volgt dat f een lokaal minimum aanneemt in $(0, 0)$. ⊘

Opmerking 2.17 (Opgave) Toon aan dat in het bovenstaande voorbeeld $(0, 0)$ het enige lokale extremum is. ⊘

Opmerking 2.18 (Opgave) Stel dat $U \subset \mathbb{R}^2$ open is en $f \in C^2(U)$. Veronderstel dat $a \in U$ een kritiek punt voor f is, en dat $\det H_f(a) < 0$. Toon aan dat f in a geen lokaal extremum heeft. ⊘

Geïnspireerd door het bovenstaande geven we ook een formulering van de tweede orde formule van Taylor met rest.

Lemma 2.19 (Tweede orde formule van Taylor met rest) *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een convexe open verzameling zijn en $a \in U$. Laat $f : U \to \mathbb{R}$ een C^3-functie zijn. Dan geldt voor iedere $x \in U$ dat*

$$f(x) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x - a\rangle + \tfrac{1}{2}\langle H_f(a)(x-a), (x-a)\rangle + R(x), \tag{2.14}$$

waarbij er een $0 < \tau_x < 1$ bestaat zo dat

$$R(x) = \frac{1}{3!}\, \frac{d^3}{dt^3} f(a + t(x-a))\Big|_{t=\tau_x}. \tag{2.15}$$

In het bijzonder geldt:

$$\lim_{x \to a} \|x - a\|^{-2} R(x) = 0.$$

Bewijs Zij $x \in U$. Als in het bewijs van Lemma 2.10 beschouwen we de functie $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\varphi(t) = f(a + t(x-a)).$$

Door het toepassen van de kettingregel op de in het bewijs gevonden formule (2.13) voor $\varphi''(t)$ blijkt dat φ drie keer differentieerbaar is. Passen we de tweede orde formule van Taylor met rest toe op φ, dan zien we dat voor alle $0 \le t \le 1$ geldt

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \frac{1}{3!}\varphi'''(\tau)t^3,$$

voor een $0 < \tau < t$. Nemen we $t = 1$, dan vinden we

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{3!}\varphi'''(\tau_x)$$

voor een geschikt getal $0 < \tau_x < 1$. Gebruiken we de eerder afgeleide formules (2.11) en (2.13), dan vinden we (2.14) met restterm gegeven door

$$R(x) = \varphi'''(\tau_x)/3!$$

Dit is precies (2.15).

We bewijzen tenslotte de limietformule voor de restterm. Zij $r > 0$ een constante zo dat de gesloten bol $\bar{B}(a; r)$ in U gelegen is. Uit het C^3 zijn van f volgt dat iedere partiële afgeleide $D_k D_j D_i f$, voor $1 \le i, j, k \le n$ een continue functie op U is. Omdat $\bar{B}(a; r)$ gesloten en begrensd is in $\mathbb{R}^n$ is ieder van de genoemde continue functies begrensd op $\bar{B}(a; r)$. Hieruit volgt het bestaan van een constante $M > 0$ zo dat voor alle $1 \le i, j, k \le n$ geldt

$$|D_k D_j D_i f(x)| \le M, \qquad (x \in B(0; r)).$$

Door toepassing van de kettingregel op formule (2.12) volgt dat

$$\varphi'''(\tau) = \sum_{1 \le i,j,k \le n} D_k D_j D_i f(a + \tau(x-a))(x-a)_i(x-a)_j(x-a)_k$$

waaruit door toepassing van de driehoeksongelijkheid blijkt dat

$$\|\varphi'''(\tau)\| \le n^3 M \|x - a\|^3.$$

Hieruit volgt tenslotte dat

$$\|x - a\|^{-2}|R(x)| \le n^3 M \|x - a\| \to 0, \qquad (x \to a).$$

$\square$

Er bestaat een formule van Taylor met rest voor elke willekeurige orde. Voor de liefhebber behandelen we die formule in de volgende paragraaf.

2.3 De meerdimensionale formule van Taylor met rest

De meerdimensionale versie van de formule van Taylor met rest maakt gebruik van polynoomfuncties in meer variabelen. Bij de behandeling daarvan zal de eerder voor partiële afgeleiden ingevoerde notatie van pas komen.

Voor een multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ en voor $x \in \mathbb{R}^n$ definiëren we

$$x^\alpha := \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j},$$

Opmerking 2.20 (Opgave) Ga na dat

$$\|x^\alpha\| \leq \|x\|^{|\alpha|}, \qquad (x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}_n). \tag{2.16}$$

$\oslash$

Ons eerstvolgende resultaat is een generalisatie van de binomiale formule van Newton. Daarvoor hebben we nog de volgende notaties nodig. Als $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ multi-indices zijn, dan spreken we af dat

$$\alpha \leq \beta :\iff \forall_{1 \leq j \leq n} \ \ \alpha_j \leq \beta_j.$$

Daarnaast introduceren we de faculteitsnotatie

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j!).$$

Verder introduceren we, voor $\alpha \leq \beta$, de multivariabele binomiaalcoëfficiënt

$$\binom{\beta}{\alpha} = \prod_{1 \leq j \leq n} \binom{\beta_j}{\alpha_j}.$$

Opmerking 2.21 (Opgave) Voor $\alpha \leq \beta$ geldt

$$\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\beta!}{\alpha!(\beta - \alpha)!}.$$

$\oslash$

De generalisatie van het binomium van Newton luidt nu als volgt.

Lemma 2.22 ((Binomium)) *Zij $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ dat*

$$(x + y)^\alpha = \sum_{\nu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\nu} x^\nu y^{\alpha - \nu}. \tag{2.17}$$

Bewijs Voor $n = 1$ komt de formule overeen met de bekende binomiale formule. We gebruiken inductie naar n en veronderstellen dat $n > 1$ en dat de formule bewezen is voor strikt kleinere waarden van n. Voor $x \in \mathbb{R}^n$ noteren we $x = (x', x_n)$, met $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Voor de multi-indices gebruiken we een soortgelijke notatie. Dan geldt

$$(x + y)^\alpha = (x' + y')^{\alpha'} (x_n + y_n)^{\alpha_n}.$$

Met de inductie-hypothese vinden we

$$\begin{aligned}(x+y)^\alpha &= \sum_{\nu'\le\alpha'} \binom{\alpha'}{\nu'} (x')^{\nu'} (y')^{\alpha'-\nu'} \cdot \sum_{j=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{j} (x_n)^j (y_n)^{\alpha_n - j} \\ &= \sum_{\nu'\le\alpha'} \sum_{j\le\alpha_n} \binom{\alpha'}{\nu'} \binom{\alpha_n}{j} (x')^{\nu'} (x_n)^j \cdot (y')^{\alpha'-\nu'} (y_n)^{\alpha_n - j}\end{aligned}$$

De laatste uitdrukking is gelijk aan de uitdrukking in het rechterlid van (2.17). $\square$

Definitie 2.23 (Polynoomfunctie) Onder een *polynomiale* functie (of polynoom- of veeltermfunctie) op $\mathbb{R}^n$ van orde ten hoogste k verstaan we een functie $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ waarvoor coëfficiënten $c_\alpha \in \mathbb{R}$ bestaan, voor $|\alpha| \le k$, zo dat

$$p(x) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha x^\alpha, \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

De ruimte van deze polynomiale functies wordt genoteerd met $P_k(\mathbb{R}^n)$. $\oslash$

Merk op dat $P_k(\mathbb{R})$ een deelverzameling is van de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Deze deelverzameling is gesloten onder optelling en scalarvermenigvuldiging. Het is dus een lineaire deelruimte. We merken op dat $P_k(\mathbb{R}^n) \subset P_l(\mathbb{R}^n)$ voor $k \le l$ en noteren

$$P(\mathbb{R}^n) := \cup_{k\ge 0} P_k(\mathbb{R}^n).$$

Deze ruimte van polynomiale functies is weer een lineaire deelruimte van $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Voor $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $a \in \mathbb{R}^n$ definiëren we de getransleerde functie $T_a(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door

$$T_a(f)(x) = f(x+a), \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Het is gemakkelijk in te zien dat T_a een lineaire afbeelding van $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ naar zichzelf definieert. Deze afbeelding is bijectief met inverse $(T_a)^{-1} = T_{-a}$. Met behulp van de binomiaalformule in Lemma 2.22 is te zien dat T_a de deelruimten $P_k(\mathbb{R}^n)$ invariant laat, dus ook $P(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.24 *Zij $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een polynomiale functie van orde hoogstens k en zij $a \in \mathbb{R}^n$. Dan is*

$$p(x) = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha p(a) \cdot (x-a)^\alpha, \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Bewijs Uit het feit dat p polynomiaal is volgt dat $T_a p : x \mapsto p(x+a)$ dat is. Er bestaan dus coëfficiënten $c_\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat

$$p(x+a) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \cdot x^\alpha, \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Door x te vervangen door $x - a$ leiden we hieruit af dat

$$p(x) = \sum_{|\alpha|\le k} c_\alpha \cdot (x-a)^\alpha, \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

We schrijven p_α voor de functie $x \mapsto (x-a)^\alpha$. Is β een multi-index dan merken we op dat

$$D^\beta p_\alpha\Big|_{x=a} = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad \alpha \neq \beta \\ \beta! & \text{als} \quad \alpha = \beta \end{cases}$$

Dit is gemakkelijk in te zien door $p_\alpha(x) = (x-a)^\alpha$ te schrijven als het product van factoren $q_j(x) = (x_j - a_j)^{\alpha_j}$ en door D^β te schrijven als samenstelling van $D_j^{\beta_j}$. Dan blijkt dat

$$D^\beta p_\alpha = \prod_{j=1}^n D_j^{\beta_j}(q_j) = \prod_{j=1}^n \delta_{\beta_j \alpha_j} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Hierbij hebben we een voor de hand liggende versie van het Kronecker-symbool gebruikt. Uit deze opmerking volgt dat

$$D^\beta p(a) = \beta!\, c_\beta,$$

voor $|\beta| \leq k$ en tenslotte het gestelde. □

We bezien het bovenstaande resultaat in termen van lineaire algebra. Zij $(\mathbb{N}^n)_k$ de (eindige) deelcollectie van $\mathbb{N}^n$ bestaande uit α met $|\alpha| \leq k$. Dan voegt het bovenstaande lemma aan iedere $p \in P_k(\mathbb{R}^n)$ een collectie coëfficiënten $c_\alpha \in \mathbb{R}$ toe die gezien kan worden als functie

$$c : (\mathbb{N}^n)_k \to \mathbb{R}, \ \alpha \mapsto c_\alpha.$$

Zij $\mathcal{F}((\mathbb{N}^n)_k, \mathbb{R})$ de collectie van dergelijke functies $(\mathbb{N}^n)_k \to \mathbb{R}$. Voorzien van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is dit een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$. De afbeelding $P_a : \mathcal{F}((\mathbb{N}^n)_k, \mathbb{R}) \to P_k(\mathbb{R}^n)$ die aan $c = (c_\alpha) \in \mathcal{F}((\mathbb{N}^n)_k, \mathbb{R})$ de polynoomfunctie

$$P_a(c) : x \mapsto \sum_{|\alpha| \leq \mathbb{N}} c_\alpha (x-a)^\alpha \tag{2.18}$$

toevoegt is per definitie surjectief. Lemma 2.24 zegt dat P_a injectief, dus bijectief is, met inverse $(P_a)^{-1}$ gegeven door

$$(P_a)^{-1}(p)_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha(p)(a).$$

Aangezien de afbeelding P_a lineair is, concluderen we dat door deze afbeelding een lineair isomorfisme van $\mathcal{F}((\mathbb{N}^n)_k, \mathbb{R})$ op $P_k(\mathbb{R}^n)$ gedefinieerd wordt.

We zijn nu klaar voor de eerste stap in de afleiding van de multi-dimensionale formule van Taylor.

Lemma 2.25 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$. Veronderstel dat $[a, a+v] \subset U$. Dan geldt voor alle $f \in C^k(U)$ dat $\varphi : t \mapsto f(a+tv), [0,1] \to \mathbb{R}$ een C^k functie is, terwijl*

$$\frac{d^k \varphi}{dt^k}(t) = (D_v)^k(f)(a+tv), \qquad (0 \leq t \leq 1). \tag{2.19}$$

Bewijs We bewijzen dit met inductie naar k. Voor $k = 0$ is het resultaat duidelijk. Zij $k \geq 1$ en veronderstel dat het resultaat reeds bewezen is voor strikt kleinere waarden van k. Dan geldt dat φ een C^{k-1} functie is, terwijl

$$\varphi^{(k-1)}(t) = F(a+tv) \quad \text{met} \quad F := (D_v)^{k-1} f.$$

Nu is F een C^1 functie op U. Met de definitie van richtingsafgeleide volgt dat $\varphi^{(k-1)}$ differentieerbaar is op $[0,1]$ met afgeleide

$$\frac{d}{dt}\varphi^{(k-1)}(t) = \frac{d}{ds}F(a+(t+s)v)\bigg|_{s=0} = D_vF(a+tv).$$

Hieruit volgt dat $\varphi \in C^k([0,1])$ en dat (2.19). $\square$

Lemma 2.26 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f \in C^k(U)$. Dan geldt voor elke $v \in \mathbb{R}^n$ dat*

$$(D_v)^k f = \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\, v^\alpha D^\alpha(f).$$

Bewijs Voor iedere $g \in C^1(U)$ geldt

$$D_v g(\xi) = Dg(\xi)v = \sum_{j=1}^n v_j D_j g(\xi), \qquad (\xi \in U).$$

Door dit herhaalf toe te passen vinden we dat

$$(D_v)^k f = (v_1D_1 + \cdots v_nD_n)^k f = \sum_{j\in\mathcal{F}} v_{j(1)}D_{j(1)}\cdots v_{j(n)}D_{j(n)}f$$

waarbij de sommatie verloopt over de collectie $\mathcal{F}$ van functies $j : \mathcal{N}_k \to \mathcal{N}_n$. Hierbij hebben we de notatie $\mathcal{N}_m := \{1,\dots,m\}$ gebruikt. Voor zo'n functie $j \in \mathcal{F}$ definiëren we de multi-index $a(j) \in \mathbb{N}^n$ door te eisen dat

$$a(j)_i = \#\{\nu \in \mathcal{N}_k \mid j(\nu) = i\} = \#j^{-1}(\{i\}).$$

Dan is

$$|a(j)| = \sum_{i=1}^n \#j^{-1}(\{i\}) = \#j^{-1}(\mathcal{N}_n) = \#\mathcal{N}_k = k$$

en

$$v_{j(1)}D_{j(1)}\cdots v_{j(n)}D_{j(n)}f = v^{a(j)}D^{a(j)}.$$

Aldus zien we door herordenen van de som dat

$$(D_v)^k f = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\, v^\alpha D^\alpha f$$

waarbij c_α het aantal $j \in \mathcal{F}$ is met $a(j) = \alpha$. We voltooien het bewijs door aan te tonen dat

$$c_\alpha = \frac{k!}{\alpha!}. \tag{2.20}$$

Dit gaat als volgt. Zij $\mathcal{F}(\alpha)$ de collectie van $j \in \mathcal{F}$ met $a(j) = \alpha$. We beschouwen de actie van de permutatie groep S_k op $\mathcal{F}$ gegeven door

$$\sigma\cdot j := j\circ\sigma^{-1} \qquad (j \in \mathcal{F}, \sigma \in S_k).$$

Merk op dat $a : \mathcal{F} \to \mathbb{N}^n$ constant is op iedere baan van S_k. We definiëren j_α als de stijgende functie $\mathcal{N}_k \to \mathcal{N}_n$ met $a(j_\alpha) = \alpha$. Dan is dus j gelijk aan 1 op de eerste α_1 elementen, gelijk aan 2 op de volgende α_2 elementen, enzovoort. Het is nu gemakkelijk in te zien dat $\mathcal{F}(\alpha)$ de baan van j_α is onder S_k. De stabilisator S_α van j_α in S_k is het beeld van de voor de hand liggende inbedding $S_{\alpha_1} \times \cdots \times S_{\alpha_n} \hookrightarrow S_k$. Dus $\#S_\alpha = \alpha!$. Wegens de stabilisator ondergroepstelling uit de groepentheorie induceert de afbeelding $S_k \to \mathcal{F}(\alpha), \sigma \mapsto \sigma \cdot j(\alpha)$ een bijectie $S_k/S_\alpha \simeq \mathcal{F}(\alpha)$. Hieruit volgt dat

$$c_\alpha = \#\mathcal{F}(\alpha) = \#(S_k/S_\alpha) = \frac{k!}{\alpha!}.$$

□

Opmerking 2.27 In het bovenstaande kan het aantal elementen c_α van $\mathcal{F}(\alpha)$ ook als volgt gevonden worden. Een element j van $\mathcal{F}(\alpha)$ kan beschreven worden door n achtereenvolgende keuzes. Eerst kiezen we $j^{-1}(\{1\})$ als deelverzameling van α_1 elementen van $\mathcal{N}_k$. Er zijn $C(k, \alpha_1) := k!/\alpha_1!(k - \alpha_1)!$ keuzes. Vervolgens kiezen we $j^{-1}(\{2\})$ als deelverzameling van α_2 elementen uit $\mathcal{N}_k \setminus j^{-1}(\{1\})$. Het aantal keuzes is $C(k - \alpha_1, \alpha_2)$. De l-de keuze is die van $j^{-1}(\{l\})$ uit de collectie $\mathcal{N}_k \setminus j^{-1}(\{1, 2, \ldots, l\})$. Hier is het aantal keuzes gelijk aan $C(k - (\alpha_1 + \cdots \alpha_{l-1}), \alpha_l)$.

In totaal is het aantal mogelijke keuzes van j dus gelijk aan

$$\begin{aligned} & C(k, \alpha_1) \cdot C(k - \alpha_1, \alpha_2) \cdots C(k - (\alpha_1 + \cdots \alpha_{n-1}), \alpha_n) \\ = & \frac{k!}{\alpha_1!(k - \alpha_1)!} \frac{(k - \alpha_1)!}{\alpha_2!(k - \alpha_1 - \alpha_2)!} \cdots \frac{(k - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}))!}{\alpha_n! 0!} \\ = & \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt (2.20). ⊘

Gevolg 2.28 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en convex, en $f : U \to \mathbb{R}$ een C^k-functie $(k \geq 0)$. Dan geldt voor elk tweetal $a, x \in U$ dat de functie $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door*

$$\varphi(t) = f(a + t(x - a)) \tag{2.21}$$

C^k is met k-de orde afgeleide gegeven door

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k \varphi}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a + t(x - a)) \cdot (x - a)^\alpha \tag{2.22}$$

voor $0 \leq t \leq 1$.

Bewijs Schrijf $v = x - a$. Dan $[a, a + v] \subset U$ en $\varphi(t) = f(a + tv)$. Volgens Lemmas 2.25 en 2.26 is φ een C^k-functie, terwijl

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k \varphi}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a + tv) \cdot v^\alpha, \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Door $v = x - a$ in te vullen vinden we (2.22). □

We kunnen nu de stelling van Taylor met rest formuleren en bewijzen. Voor een functie $f \in C^k(U)$ en een punt $a \in U$ definiëren we het k-de orde Taylor polynoom $P_{f,a,k} \in P(\mathbb{R}^n)$ door

$$P_{f,a,k}(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot (x-a)^\alpha, \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

en de bijbehorende restterm $R_k = R_{f,a,k} \in C^k(U)$ door

$$R_k(x) = f - P_{f,a,k}.$$

Stelling 2.29 (Formule van Taylor met rest) *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ een open convexe verzameling en $a \in U$. Zij $f \in C^{k+1}(U)$. Dan geldt voor iedere $x \in U$ dat*

$$f(x) = P_{f,a,k}(x) + R_k(x),$$

waarbij

$$R_k(x) = \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi_x) \cdot (x-a)^\alpha \tag{2.23}$$

voor een zekere $\xi_x \in [a, x]$. In het bijzonder zijn er constanten $\delta > 0$ en $M > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en

$$|R_k(x)| \leq M\|x-a\|^{k+1}, \qquad (x \in B(a;\delta)).$$

Bewijs We veronderstellen dat $x \in U$ en definiëren $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ door (2.21). Wegens Gevolg 2.28 behoort de functie φ tot $C^{k+1}([0,1])$. Wegens Taylor met rest voor functies van één variabele geldt voor elke $t \in \,]\,0,1]$ dat

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0)\, t^j + \rho(t),$$

waarbij

$$\rho(t) = \frac{1}{(k+1)!} \varphi^{(k+1)}(\tau) t^{k+1}$$

voor een $\tau \in [0, t]$. Door Gevolg 2.28 te gebruiken en $t = 1$ te nemen vinden we dat

$$f(a + (x-a)) = p(x) + R(x)$$

waarin

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot (x-a)^\alpha = P_{f,a,k}(x)$$

en

$$R(x) = \frac{1}{(k+1)!} \varphi^{(k+1)}(a + \tau_x(x-a))$$

voor een $\tau_x \in [0,1]$. Dit geeft (2.23) met $\xi_x = a + \tau_x(x-a) \in [a, x]$.

Tenslotte kunnen we $\delta > 0$ kiezen zo dat $\bar{B}(a;\delta) \subset U$. Dan zijn de functies $D^\alpha f$ continu op de gesloten en begrensde verzameling $\bar{B}(a;\delta)$. Er bestaat daarom een $C > 0$ zo dat voor elke α met $|\alpha| = k+1$ geldt dat $|D^\alpha f| \leq C$ op $\bar{B}(a;\delta)$. Voor $x \in B(a;\delta)$ geldt dat $\tau_x \in [a, x] \subset B(a;\delta)$, dus

$$\begin{aligned} |R(x)| &\leq \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} C\, |(x-\alpha)^\alpha| \\ &\leq M\|x-\alpha\|^{k+1}, \end{aligned}$$

waarbij $M = C \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!}$. Voor de laatste schatting is (2.16) gebruikt. $\square$

Opmerking 2.30 (Opgave) Bewijs dat voor een gegeven $f \in C^k(U)$ het Taylorpolynoom $P_{f,a,k}$ het unieke polynoom $p \in P_k(\mathbb{R}^n)$ is met de eigenschap dat

$$D^\alpha(f-p)(a) = 0 \quad \text{voor alle} \;\; \alpha \in (\mathbb{N}^n)_k.$$

$\oslash$

3 Integralen met een parameter

3.1 Vectorwaardige integralen

In deze paragraaf bespreken we de Riemann-integratie van een vectorwaardige functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$, waarbij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. De componenten van f zijn de functies $f_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_j(x) = f(x)_j$. Aldus, $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

Gezien het feit dat limieten, afgeleiden en sommen van $\mathbb{R}^p$-waardige functies componentsgewijs genomen kunnen worden ligt de volgende definitie voor de hand.

Definitie 3.1 Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ heet Riemann-integreerbaar indien voor elke $1 \leq j \leq p$ de component $f_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is. De Riemann-integraal van f wordt gedefinieerd als de unieke vector $I(f)$ in $\mathbb{R}^p$ waarvan de j-de component gegeven wordt door

$$I(f)_j = \int_a^b f_j(x)\, dx, \qquad (1 \leq j \leq p).$$

We noteren deze vector met

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$\oslash$

De collectie van Riemann integreerbare functies $[a, b] \to \mathbb{R}^p$ wordt genoteerd met $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^p)$. Voorzien van de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is dit een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$.

Lemma 3.2 *De Riemann-integraal $I : f \mapsto I(f)$ is een lineaire afbeelding $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^p$.*

Bewijs Laten $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^p)$ zijn, en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan wordt de j-de component van $f + \lambda g$ gegeven door $(f + \lambda g)_j = f_j + \lambda g_j$. Wegens de gebruikelijke rekenregels voor Riemann integratie van scalaire functies is die component Riemann-integreerbaar. Hieruit volgt dat $f + \lambda g$ Riemann-integreerbaar is en dat

$$I(f + \lambda g)_j = \int_a^b [f_j(x) + \lambda g_j(x)]\, dx = I(f)_j + \lambda I(g)_j.$$

Uit deze gelijkheid voor iedere j volgt de lineariteit van $I : \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^p$. $\square$

Stelling 3.3 (Hoofdstelling) *Iedere continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ is Riemann-integreerbaar. Is $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ continu, dan is de functie $G : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ gedefinieerd door*

$$G(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

een primitieve van f, dwz., G is differentieerbaar met afgeleide f. Is omgekeerd $F : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ een primitieve van f dan is

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a). \tag{3.1}$$

Bewijs Als f continu is, dan zijn alle componenten $f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu, dus Riemann-integreerbaar. De j-de component van G wordt gegeven door

$$G_j(x) = \int_a^x f_j(t)\, dt.$$

Hieraan zien we dat G_j differentieerbaar is met afgeleide f_j. Er volgt dat G differentieerbaar is met afgeleide f.

Zij tenslotte F een primitieve van f. Dan is iedere component F_j een primitieve van f_j. Hieruit volgt dat

$$\int_a^b f_j(t)\, dt = F_j(b) - F_j(a).$$

Dit geeft (3.1). $\square$

De volgende eigenschap zal bijzonder nuttig blijken.

Lemma 3.4 *Zij $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ een lineaire afbeelding en $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}^p)$. Dan is de functie $A \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}^q$ Riemann-integreerbaar, terwijl*

$$A\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) = \int_a^b A(f(x))\, dx.$$

Bewijs Voor iedere $1 \leq i \leq q$ wordt de i-de component van $A \circ f$ gegeven door

$$(A \circ f)_i = \sum_{j=1}^p A_{ij} f_j.$$

Het bewijs wordt voltooid door herhaald toepassen van Lemma 3.2 $\square$

Een andere nuttig eigenschap is de driehoeksongelijkheid voor Riemann-integratie. Ter voorbereiding het volgende resultaat.

Lemma 3.5 *Zij $v \in \mathbb{R}^p$. Dan is*

$$\|v\| = \max\{\langle v, w\rangle \mid w \in \mathbb{R}^p \text{ en } \|w\| = 1\}.$$

Bewijs Als $v = 0$ dan is de bewering zeker waar. Stel dus dat $v \neq 0$. De verzameling

$$S := \{\langle v, w\rangle \mid w \in \mathbb{R}^p \text{ en } \|w\| = 1\}$$

is een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Voor iedere $w \in \mathbb{R}^n$ geldt wegens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz dat $\langle v, w\rangle \leq |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$. Daaruit volgt dat $\|v\|$ een bovengrens voor S is.

De vector $w_0 = \|v\|^{-1} v$ heeft lengte 1. Hieruit volgt dat

$$\langle v, w_0\rangle = \|v\|^{-1}\langle v, v\rangle = \|v\|$$

tot S behoort. De bovengrens $\|v\|$ behoort dus tot S, waaruit we concluderen dat $\|v\| = \max S$. $\square$

Lemma 3.6 (Driehoeksongelijkheid) *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ continu. Dan is de functie $\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$, continu en*

$$\left\| \int_a^b f(x)\, dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\, dx. \tag{3.2}$$

Bewijs Uit de formule $\|f(x)\|^2 = \sum_{j=1}^p f_j(x)^2$ volgt dat de functie $\|f\|^2$ continu op $[a, b]$ is met waarden in $[0, \infty[$. Aangezien de functie $y \mapsto \sqrt{y}$ continu is op $[0, \infty[$ volgt dat

$$\|f\| : x \mapsto \sqrt{\|f(x)\|^2}$$

continu is op $[a, b]$. We noteren de integraal van f over $[a, b]$ met $I(f)$. Dan geldt voor alle $w \in \mathbb{R}^p$ met $\|w\| = 1$ dat de afbeelding $A : v \mapsto \langle v, w\rangle, \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineair is. Met Lemma 3.4 volgt dat $A \circ f$ Riemann integreerbaar is, en dat

$$\langle I(f), w\rangle = \int_a^b A(f(x))\, dx = \int_a^b \langle f(x), w\rangle\, dx.$$

Wegens de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz is

$$\langle f(x), w\rangle \leq |\langle f(x), w\rangle| \leq \|f(x)\|\|w\| = \|f(x)\|, \qquad (x \in [a, b]).$$

Aangezien de uiterste leden van deze ongelijkheid continue reëelwaardige functies zijn in de variabele $x \in [a, b]$ vinden we dat

$$\langle I(f), w\rangle \leq \int_a^b \|f(x)\|\, dx.$$

Met Lemma 3.5 concluderen we tenslotte dat (3.2) geldt. □

Opmerking 3.7 Men kan het bovenstaande algemener bewijzen voor Riemann-integreerbare f. Voor zulke f is ook $\|f\|$ Riemann-integreerbaar en geldt de bovenstaande ongelijkheid. Het bewijs geven we hier niet. ⊘

3.2 Integralen met een parameter, continuïteit

In de analyse komt het dikwijls voor dat men een integraal beschouwt van een functie, die behalve van de integratievariabele nog van een aantal andere variabelen afhangt. Preciezer, zij $V \subset \mathbb{R}^n$, $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en laat een functie $f : V \times [a,\, b] \to \mathbb{R}^p$ gegeven zijn.

Voor iedere $x \in V$ is $f_x : t \mapsto f(x,\, t)$ een $\mathbb{R}^p$-waardige functie op $[a,\, b]$. Als de functie f_x voor iedere $x \in V$ Riemann-integreerbaar is over $[a,\, b]$, dan wordt door

$$F(x) := \int_a^b f_x(t)\, dt = \int_a^b f(x,\, t)\, dt \tag{3.3}$$

een functie $F : V \to \mathbb{R}^p$ gedefinieerd. Men zegt ook wel dat de integraal in (3.3) nog afhangt van de *parameters* $(x_1,\, \ldots,\, x_n)$. De volgende stelling zegt dat als de functie f continu is als functie van alle variabelen $(x_1,\, \ldots,\, x_n,\, t)$, dan hangt de integraal over $t \in [a,\, b]$ continu af van de parameters $(x_1,\, \ldots,\, x_n)$.

Stelling 3.8 *Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ en $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Veronderstel dat de functie $f : V \times [a,\, b] \to \mathbb{R}^p$ continu is op de deelverzameling $V \times [a,\, b]$ van $\mathbb{R}^{n+1}$. Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}^p$, gedefinieerd door middel van* (3.3)*, continu.*

De continuïteit van de functie F betekent dat F in ieder punt $x_0 \in V$ continu is. Dit laatste betekent dat

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Vullen we in het bovenstaande de definitie van F in, en gebruiken we dat f continu is in (x_0, t), voor iedere $t \in [a, b]$, zodat $f(x, t) \to f(x_0, t)$ voor $x \to x_0$, dan zien we dat

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x,\, t)\, dt = \int_a^b f(x_0,\, t)\, dt = \int_a^b \left(\lim_{x \to x_0} f(x_0,\, t) \right) dt, \tag{3.4}$$

De formule (3.4) zegt dat we 'limieten en integralen mogen verwisselen'. Volgens Stelling 3.8 is dit geoorloofd indien de functie f continu is als functie van alle variabelen.

Het bewijs van Stelling 3.8 berust op de volgende, op zichzelf interessante, toepassing van de stelling van Bolzano–Weierstrass, die bekend is uit het college Inleiding Analyse. We brengen in herinnering dat deze stelling zegt dat iedere gesloten en begrensde deelverzameling K van $\mathbb{R}^n$ rij-compact is. Dit betekent per definitie dat iedere rij $(y^{(j)})$ in K een convergente deelrij heeft met een in K gelegen limiet.

Lemma 3.9 *Zij K een begrensde en gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^q$, $V \subset \mathbb{R}^n$ en $x_0 \in V$. Veronderstel dat $f : V \times K \to \mathbb{R}^p$ continu is in alle punten van de verzameling $\{x_0\} \times K$.*

Dan is er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$, zo dat voor alle $x \in V \cap B(x_0; \delta)$ en alle $y \in K$ geldt dat $\|f(x,\, y) - f(x_0,\, y)\| < \epsilon$.

Opmerking 3.10 Omdat in het bovenstaande bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden die tot de gegeven schatting leidt voor alle $y \in K$, zeggen we ook wel dat $f(x, y) \to f(x_0, y)$, voor $x \to x_0$, uniform ten aanzien van $y \in K$. $\oslash$

Bewijs We veronderstellen dat de conclusie niet geldt en zullen laten zien dat dit tot een tegenspraak leidt.

De ontkenning van de conclusie in Lemma 3.9 geeft dat er een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat er voor iedere $\delta > 0$ een $x \in V \cap B(x_0; \delta)$ bestaat en een $y \in K$ die niet voldoen aan de schatting $\|f(x,\, y) - f(x_0,\, y)\| < \epsilon$, dus waarvoor $\|f(x,\, y) - f(x_0,\, y)\| \geq \epsilon$.

Door hierin $\delta = 1/j$ te nemen, met j een positief geheel getal, verkrijgen we een rij $(x^{(j)})_{j \geq 1}$ in V en een rij $(y^{(j)})_{j \geq 1}$ in K, met de eigenschap dat voor iedere $j \geq 1$ geldt dat

$$\|x^{(j)} - x_0\| < 1/j \quad \text{en} \quad \|f(x^{(j)},\, y^{(j)}) - f(x_0,\, y^{(j)})\| \geq \epsilon. \tag{3.5}$$

Uit $y^{(j)} \in K$ en de begrensdheid van K volgt dat de rij $(y^{(j)})_{j \geq 1}$ begrensd is in $\mathbb{R}^q$. Hieruit volgt wegens de stelling van Bolzano–Weierstrass dat de rij $(y^{(j)})_{j \geq 1}$ een convergente deelrij heeft met een in K gelegen limiet. Met andere woorden, er is een deelrij van rangnummers j_k, met $j_k \to \infty$ als $k \to \infty$, met de eigenschap dat de rij $(y^{(j_k)})_{k \geq 1}$ voor $k \to \infty$ convergeert naar een punt $y_0 \in K$. Omdat

$$\|x^{(j_k)} - x_0\| < 1/j_k$$

en $j_k \to \infty$ als $k \to \infty$, zien we dat $x^{(j_k)} \to x_0$ als $k \to \infty$. We concluderen dat de rij $(x^{(j_k)}, y^{(j_k)})$ in $\mathbb{R}^{n+q}$ voor $k \to \infty$ convergeert naar het punt (x_0, y_0). Tevens convergeert de rij $(x_0, y^{(j_k)})$ naar (x_0, y_0). Uit de continuïteit van f in het punt (x_0, y_0) concluderen we dat

$$\begin{aligned} &\|f(x^{(j_k)},\, y^{(j_k)}) - f(x_0,\, y^{(j_k)})\| \\ &\quad\leq \quad \|f(x^{(j_k)},\, y^{(j_k)}) - f(x_0,\, y_0)\| + \|f(x_0, y_0) - f(x_0,\, y^{(j_k)})\| \\ &\quad\to \quad 0 + 0 = 0 \quad \text{als} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Dit leidt tot een tegenspraak met de tweede schatting in (3.5). □

Bewijs van Stelling 3.8 Omdat $[a,\, b]$ een begrensde en gesloten deelverzameling is van $\mathbb{R}$, mogen we Lemma 3.9 toepassen met $q = 1$ en $K = [a,\, b]$. Zij $x_0 \in V$ en $\eta > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat voor $x \in V$ met $\|x - x_0\| \leq \delta$, en voor iedere $t \in [a,\, b]$ geldt dat

$$\|f(x,\, t) - f(x_0,\, t)\| \leq \varepsilon := \eta/(b-a).$$

Dit leidt tot de schatting

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x_0)\| \quad &= \quad \left\| \int_a^b \left(f(x,\, t) - f(x_0,\, t)\right)\, dt \right\| \\ &\leq \quad \int_a^b \|f(x,\, t) - f(x_0,\, t)\|\, dt \\ &\leq \quad \int_a^b \varepsilon\, dt = \varepsilon\,(b-a) = \eta, \end{aligned}$$

voor iedere $x \in V$ met $\|x - x_0\| < \delta$. Hieruit volgt dat $F(x) \to F(x_0)$ als $x \to x_0$. □

Voorbeeld 3.11 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, t) = e^{xt}$. Door toepassen van het bovenstaande resultaat met $V = \mathbb{R}$, $p = 1$ en $[a, b] = [-1, 1]$ zien we dat de functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$F(x) = \int_{-1}^{1} e^{xt}\, dt$$

continu is. Als $x \neq 0$, dan heeft de integrand de functie $t \mapsto e^{xt}/x$ als primitieve, waaruit volgt dat $F(x) = (e^x - e^{-x})/x$. Anderzijds is de integrand voor $x = 0$ constant 1, en we zien dat $F(0) = 2$. De continuïteit van F geeft dat $F(x) \to F(0) = 2$ voor $x \to 0$. Uiteraard kunnen we dit resultaat ook afleiden door gebruik te maken van de stelling van de l'Hôpital, zie het dictaat Inleiding Analyse. ⊘

Voorbeeld 3.12 (Bèta-functie) De *Bèta-functie van Euler* is de functie van twee reële variabelen $p,\, q$, gedefinieerd door

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\, dt. \tag{3.6}$$

De integrand

$$b(p, q, t) := t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}$$

is een continue functie van $(p, q, t) \in [1, \infty\,[\, \times [1, \infty\,[\, \times [0, 1]$. Met Stelling 3.8 volgt dat B continu is op $[1, \infty\,[\, \times [1, \infty\,[$. ⊘

Voorbeeld 3.13 (Gamma-functie) Het bovenstaande resultaat is niet direct toepasbaar op functies die gedefinieerd worden door zogenaamde oneigenlijke integralen. Als voorbeeld beschouwen we de Gamma-functie $\Gamma :]\,0, \infty[\to \mathbb{R}$ van Euler, gedefinieerd door

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt. \tag{3.7}$$

Dit is een functie van de vorm $F(x) = \int_0^\infty f(x,t)\, dt$, met $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. Er zijn hier twee problemen. In de eerste plaats is het interval van integratie onbegrensd naar boven. In de tweede plaats is de functie $f_x : t \mapsto f(x,t)$ niet gedefinieerd in 0 voor $0 < x < 1$. Verderop in het dictaat zullen we algemene theorie ontwikkelen waarmee we kunnen laten zien dat de zo gedefinieerde Gamma functie continu, en zelfs C^∞ is op het interval $]0, \infty[$. $\oslash$

3.3 Differentiatie onder het integraalteken

We beschouwen weer een integraal met parameter als in (3.3) en onderzoeken wanneer deze integraal een *differentieeerbare* functie F definieert. Ter voorbereiding behandelen we een technisch lemma over deling.

Lemma 3.14 ((Delingslemma)) *Zij X een interval in $\mathbb{R}$ en Y een deelverzameling van $\mathbb{R}^p$. Laat $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn naar de eerste variabele en neem aan dat de functie $D_1 f$ continu is op $X \times Y$. Definieer de functie $q : X \times X \times Y \to \mathbb{R}$ door*

$$q(x,\, \xi,\, y) := \begin{cases} \frac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} & \text{als} \quad \xi \in X,\ x \in X \setminus \{\xi\},\ y \in Y; \\ D_1 f(\xi,\, y) & \text{als} \quad \xi \in X,\ x = \xi,\ y \in Y. \end{cases}$$

Dan is q continu op $X \times X \times Y$.

Bewijs Laat $x, \xi \in X$ en $y \in Y$. Dan is

$$\begin{aligned} f(x,\, y) - f(\xi,\, y) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\xi + t(x-\xi),\, y)\, dt \\ &= \int_0^1 D_1 f(\xi + t(x-\xi),\, y) \cdot (x-\xi)\, dt \\ &= \int_0^1 D_1 f(\xi + t(x-\xi),\, y)\, dt \cdot (x-\xi). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$q(x,\, \xi,\, y) = \int_0^1 D_1 f(\xi + t(x-\xi),\, y)\, dt. \tag{3.8}$$

als $x \neq \xi$. De formule (3.8) is echter ook geldig als $x = \xi$, omdat in dat geval de integrand in het rechterlid voor iedere t gelijk is aan $D_1 f(\xi,\, y)$. Pas nu Stelling 3.8 toe met $(x,\, \xi,\, y)$ als de parameters om te concluderen dat q continu is. $\square$

Lemma 3.14 zal worden gebruikt in het bewijs van de volgende stelling over differentiatie onder het integraalteken.

Stelling 3.15 *Zij X een open interval in $\mathbb{R}$ en $I = [a, b]$ een gesloten interval met $a < b$. Laat een functie $f : X \times I \to \mathbb{R}$ gegeven zijn en neem aan dat de volgende condities vervuld zijn.*

(a) *Voor iedere $x \in X$ is de functie $t \mapsto f(x, t)$ Riemann-integreerbaar over I.*

(b) *De functie f is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele en $D_1 f$ is continu op $X \times I$.*

Dan is de functie $F : X \to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\, dt \tag{3.9}$$

een differentieerbare functie van de parameter $x \in X$ en

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}\, dt. \tag{3.10}$$

Bewijs Zij $q(x, \xi, t)$ gedefinieerd als Lemma 3.14, met y vervangen door t. Omdat de functie q continu is als functie van alle variabelen, definieert volgens Stelling 3.8 de formule

$$Q(x, \xi) := \int_a^b q(x, \xi, t)\, dt$$

een continue functie Q op $X \times X$. Verder volgt uit de definitie van q dat

$$Q(x, \xi) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} & \text{als} \quad \xi \in X,\ x \in X \setminus \{\xi\}; \\ \int_a^b D_1 f(\xi, t)\, dt & \text{als} \quad \xi \in X,\ x = \xi. \end{cases}$$

Uit de continuïteit van Q op $X \times X$ volgt nu dat voor iedere $\xi \in X$ geldt dat

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x \neq \xi}} \frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} = \int_a^b D_1 f(\xi, t)\, dt,$$

hetgeen precies de bewering van de stelling is. $\square$

De formule (3.10) zegt dat we 'differentiatie en integratie mogen verwisselen', in de zin dat de afgeleide naar x van de integraal over t gelijk is aan de integraal over t van de afgeleide naar x.

Gevolg 3.16 *Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Laat voorts $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie zijn die k keer partieel differentieerbaar is naar de eerste n variabelen. Neem verder aan dat voor de herhaalde partiële afgeleiden geldt*

$$D_{j(l)} \cdots D_{j(1)} f \in C(X \times [a, b]) \tag{3.11}$$

voor alle rijtjes $(j(1), \ldots, j(l)) \in \mathbb{N}^l$, met $0 \le l \le k$.

Dan definieert (3.9) *een C^k functie op X en voor elk van de genoemde rijtjes indices geldt dat*

$$D_{j(l)} \cdots D_{j(1)} F(x) = \int_a^b D_{j(l)} \cdots D_{j(1)} f(x, t)\, dt, \qquad (x \in X). \tag{3.12}$$

Voor $l = 0$ dient de conditie (3.11) gelezen te worden als $f \in C(X \times [a, b])$.

Bewijs Dit wordt bewezen met inductie over k, waarbij in de inductiestap gebruik wordt gemaakt van Stelling 3.15. Toepassing van Stelling 3.8 op (3.12) geeft dat alle partiële afgeleiden van F tot en met de orde k continu zijn op X, hetgeen impliceert dat $F \in C^k(X, \mathbb{R})$. $\square$

Uit het bovenstaande resultaat volgt op zijn beurt de volgende variant van Lemma 3.14.

Gevolg 3.17 *Zij X een open interval in $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $f \in \mathrm{C}^{k+1}(X, \mathbb{R})$. Definieer*

$$q(x, \xi) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} & \text{als} \quad \xi \in X,\ x \in X \setminus \{\xi\}; \\ \\ f'(\xi) & \text{als} \quad \xi \in X,\ x = \xi. \end{cases}$$

Dan is $q \in \mathrm{C}^k(X \times X, \mathbb{R})$.

Bewijs We passen Lemma 3.14 toe met $p = 0$ en $Y = \{0\}$, hetgeen betekent dat de y-afhankelijkheid uit alle formules verdwijnt. Formule (3.8) geeft dan dat

$$q(x, \xi) = \int_0^1 f'(\xi + t(x - \xi))\, dt,$$

waarbij de integrand een C^k functie is van de variabelen (x, ξ, t). Toepassing van Gevolg 3.16 geeft dat $q \in C^k(X \times X)$. $\square$

De uitspraak over differentieerbaarheid is vooral interessant in de punten (x, ξ) met $x = \xi$, omdat we op grond van de bekende rekenregels al wisten dat op de verzameling der (x, ξ) met $x \neq \xi$ de functie $q(x, \xi)$ een C^{k+1} functie is.

Als de functie ook nog afhangt van extra parameters y, zodanig dat alle partiële afgeleiden met betrekking tot x tot en met de orde $k + 1$ continue functie zijn van (x, y), dan hangen alle partiële afgeleiden van $q(x, \xi, y)$ naar de variabelen (x, ξ) continu af van (x, ξ, y).

Voorbeeld 3.18 Passen we Gevolg 3.17 toe met $X = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \sin x$ dan behoort de bijbehorende functie $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tot $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De functie $\sigma : x \mapsto q(x, 0)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$\sigma(x) = \begin{cases} (\sin x)/x & \text{als} \quad x \neq 0, \\ \quad 1 & \text{als} \quad x = 0. \end{cases}$$

We concluderen dat $\sigma \in C^\infty([0, 1])$. $\oslash$

3.4 Verwisseling van de integratievolgorde

In het kader van 'verwisselingsstellingen' geven we nog het volgende resultaat.

Stelling 3.19 *Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$. Neem aan dat de functie $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continu is. Dan geldt:*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t, s)\, dt \right) ds = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, s)\, ds \right) dt. \tag{3.13}$$

Bewijs Definieer, voor iedere $x \in [a,\, b]$ en $s \in [c,\, d]$,

$$\varphi(x,\, s) := \int_a^x f(t,\, s)\, dt.$$

Merk op dat $\varphi(a,\, s) = 0$.

Uit de analyse van functies van één variabele weten we dat voor iedere $s \in [c,\, d]$ de functie $x \mapsto \varphi(x,\, s)$ differentieerbaar is, met afgeleide gelijk aan

$$\frac{\partial \varphi(x,\, s)}{\partial x} = f(x,\, s),$$

hetgeen een continue functie is van $(x,\, s) \in [a,\, b] \times [c,\, d]$. Definieer

$$\Phi(x) := \int_c^d \varphi(x,\, s)\, ds.$$

Merk op dat $\Phi(a) = 0$, omdat voor iedere $s \in [c,\, d]$ geldt dat $\varphi(a,\, s) = 0$.

Stelling 3.15 geeft dat de functie Φ differentieerbaar is op $[a,\, b]$, met afgeleide gelijk aan

$$\Phi'(x) := \int_c^d \frac{\partial \varphi(x,\, s)}{\partial x}\, ds = \int_c^d f(x,\, s)\, ds.$$

Integratie hiervan over $x \in [a,\, b]$ geeft nu

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_c^d f(x,\, s)\, ds \right) dx &= \int_a^b \Phi'(x) dx \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b) \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(t,\, s)\, dt \right) ds. \end{aligned}$$

Hieruit volgt (3.13) als we in het linkerlid de integratievariabele x vervangen door t. $\square$

In het vervolg zullen we de identiteit (3.19) ook zonder haken schrijven als

$$\int_c^d \int_a^b f(t,\, s)\, dt\, ds = \int_a^b \int_c^d f(t,\, s)\, ds\, dt,$$

aangezien uit de volgorde van de integraaltekens en van ds en dt blijkt in welke volgorde de integraties genomen dienen te worden.

Voorbeeld 3.20 In de cursus 'Analyse in Meer Variabelen 2', of in de cursus 'Maat en Integratie' kun je kennis maken met een theorie van meerdimensionale integratie. Daarin wordt de verwisselbaarheid van de integratievolgorde afgeleid zonder gebruik te maken van Stelling 3.15. Deze verwisselingsstelling (de stelling van Fubini), geldt bovendien voor een klasse van functies van meer variabelen die veel ruimer is dan de klasse van continue functies.

Met het oog hierop is het interessant dat omgekeerd Stelling 3.15 ook afgeleid kan worden uit Stelling 3.19.

Bewijs Neem aan dat f een functie is als in Stelling 3.15. Zij $c \in I$. Voor iedere $x \in I$ met $x > c$ geldt, vanwege de fundamentaalstelling van de integraalrekening, dat voor elke $t \in [a, b]$,

$$f(x, t) - f(c, t) = \int_c^x D_1 f(s, t) ds.$$

Hieruit volgt

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x,\,t)\,dt &= \int_a^b \left(f(c,\,t) + \int_c^x D_1 f(s,\,t)\,ds\right)\,dt \\
&= \int_a^b f(c,\,t)\,dt + \int_a^b \int_c^x D_1 f(s,\,t)\,ds\,dt \\
&= \int_a^b f(c,\,t)\,dt + \int_c^x \int_a^b D_1 f(s,\,t)\,dt\;ds.
\end{aligned}
$$

Hierin is in de derde identiteit Stelling 3.19 gebruikt, met f vervangen door de continue $D_1 f$ (en met s en t verwisseld). Omdat in het rechterlid de variabele x als bovengrens van het integratie-interval voorkomt, is de conclusie dat het linkerlid differentieerbaar is naar x, met afgeleide gelijk aan

$$
\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,\,t)\,dt = \int_a^b D_1 f(s,\,t)\,dt\bigg|_{s=x} = \int_a^b D_1 f(x,\,t)\,dt.
$$

Dit is precies de conclusie van Stelling 3.15. Omdat er bij iedere $x \in I$ een $c \in I$ is met $c < x$, geldt de conclusie voor iedere $x \in I$. $\square$

$\oslash$

4 Inverse functiestelling en toepassingen

4.1 De inverse functiestelling

In deze paragraaf zullen we de belangrijke inverse functiestelling behandelen. De volgende terminologie voor een metrische ruimte (X, d) zal daarbij nuttig zijn. Onder een *omgeving* van een punt $a \in X$ verstaan we een verzameling $V \subset X$ zo dat $a \in \text{inw}(V)$. Dit laatste betekent dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $B(a; \delta) \subset V$.

Ter motivatie herhalen we eerst de inverse functiestelling voor functies van één variabele.

Lemma 4.1 *Laat $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ een open verzameling zijn en $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Zij $a \in \mathcal{O}$ en veronderstel dat $f'(a) \neq 0$. Dan bestaan er open omgevingen U van a in $\mathcal{O}$ en V van $f(a)$ in $\mathbb{R}$ zo dat $f|_U$ de omgeving U bijectief afbeeldt op V terwijl de inverse $g := (f|_U)^{-1}$ een C^1-afbeelding is. Bovendien geldt dat $g'(f(x)) = 1/f'(x)$ voor alle $x \in U$.*

Bewijs Uit $f'(a) \neq 0$ volgt dat $f'(a) > 0$ of $f'(a) < 0$. Be behandelen het eerste geval, het tweede gaat op soortgelijke wijze. Uit de continuïteit van f' volgt dat een $\delta > 0$ bestaat zo $]\,a-2\delta, a+2\delta\,[\subset \mathcal{O}$ dat $f'(x) > 0$ voor alle $x \in\,]\,a-2\delta, a+2\delta\,[$. Met Lemma 2.4 volgt dat f strikt monotoon stijgend is op $[a-\delta, a+\delta]$. Hieruit volgt dat f het interval $U :=\,]\,a-\delta, a+\delta\,[$ afbeeldt op het interval $V :=\,]\,f(a-\delta), f(a+\delta)\,[$. Zij $g : V \to U$ de inverse van g. Uit de monotonie van f kan afgeleid worden dat g continu is, zie Inleiding Analyse.

We zullen laten zien dat g differentieerbaar is in ieder punt $y_0 \in V$, door gebruik te maken van de middelwaardestelling. Zij $x_0 = g(y_0)$, dan is geldt voor iedere $x \in U$ dat $f(x) - f(x_0) = f'(\xi(x))(x - x_0)$ voor een $\xi(x) \in [x_0, x]$. Voor iedere $y \in V$ geldt daarom dat

$$(y - y_0) = f(g(y)) - f(x_0) = f'(\xi(g(y)))(g(y) - x_0)$$

Aangezien $\xi(g(y)) \in U$ geldt $f'(\xi(g(y)) \neq 0$, dus

$$g(y) - g(y_0) = g(y) - x_0 = f'(\xi(g(y)))^{-1}(y - y_0).$$

Aangezien $\xi(g(y)) \in [g(y_0), g(y)]$, terwijl g continu is volgt dat $\xi(g(y)) \to g(y_0)$. Omdat f' continu is en $f'(g(y_0)) \neq 0$, volgt dat

$$f'(\xi(g(y)))^{-1} \to f'(g(y_0))^{-1} \qquad (y \to y_0)$$

dus

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = 1/f'(g(y_0)) = 1/f'(x_0).$$

We concluderen dat $g'(y_0) = g'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$. □

Voorbeeld 4.2 In het dictaat Inleiding Analyse werd de logarithmische functie $\log :]0\,, \infty\,[\to \mathbb{R}$ ingevoerd door middel van de Riemann integraal:

$$\log x := \int_0^x \frac{1}{t} dt.$$

Uit de fundamentaalstelling van de integraalrekening volgde dat $f := \log$ een C^1-functie is met afgeleide $f'(x) = \frac{1}{x}$. Vervolgens werd aangetoond dat f een strikt monotone bijectie is van $]\,0, \infty\,[$ op $\mathbb{R}$. De exponentiële functie $g : \mathbb{R} \to]\,0, \infty\,[\,, y \mapsto e^y$ werd ingevoerd als inverse van $\log$. Met behulp van het bovenstaande lemma volgde dat g continu differentieerbaar is met afgeleide

$$g'(\log x) = 1/f'(x) = x = g(\log x),$$

dus $g'(y) = g(y)$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. $\oslash$

Het nut van de volgende definitie is zichtbaar in de formulering van Lemma 4.1

Definitie 4.3 Laten U en V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn. Onder een C^1 *diffeomorfisme* van U op V verstaan we een bijectieve afbeelding $f : U \to V$ zo dat zowel f als de inverse $f^{-1} : V \to U$ continu differentieerbaar zijn. $\oslash$

Lemma 4.4 *Is $f : U \to V$ een C^1 diffeomorfisme, dan geldt voor elke $a \in U$ dat $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een inverteerbare lineaire afbeelding is en dat*

$$D(f^{-1})(f(a)) = Df(a)^{-1}. \tag{4.1}$$

Bewijs Er geldt dat $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$, dus wegens de kettingregel gecombineerd met de opmerking in Voorbeeld 1.31 zien we dat voor elke $a \in U$ geldt dat

$$D(f^{-1})(f(a)) \circ Df(a) = D(\mathrm{id}_U)(a) = I,$$

dus de lineaire afbeelding $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is inverteerbaar (met inverse $Df(a)^{-1}$). Ook volgt (4.1). $\square$

In het bijzonder is de afgeleide in elk punt van het domein van een diffeomorfisme een inverteerbare lineaire afbeelding. De inverse functiestelling geeft een zeer krachtige omkering van dit resultaat.

Stelling 4.5 (Inverse functiestelling) *Zij $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ open, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding en $a \in \mathcal{O}$. Als de lineaire afbeelding $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inverteerbaar is, dan bestaat er een open omgeving U van a in $\mathcal{O}$ zo dat*

(a) *$f(U)$ is open in $\mathbb{R}^n$;*

(b) *de afbeelding $f|_U$ is een C^1 diffeomorfisme van U op $f(U)$.*

Als voorbereiding bewijzen we het volgende resultaat.

Propositie 4.6 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ convexe open deelverzameling zijn en $f : U \to \mathbb{R}^p$ een C^1-afbeelding. Dan is er een continue afbeelding $L : U \times U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ zo dat*

$$f(y) - f(x) = L(x, y)(y - x), \qquad (x, y \in U).$$

Voor een continue afbeelding $U \times U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ met de bovenstaande eigenschap geldt:

$$L(x, x) = Df(x), \quad (x \in U).$$

Bewijs Wegens de veronderstelde convexiteit geldt voor alle $x, y \in U$ dat het geparametriseerde lijnstuk $c = c_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x + t(y-x)$ van x naar y geheel in U gelegen is. De afgeleide naar t van de afbeelding $f \circ c_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^p$ wordt wegens Lemma 1.54 gegeven door

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = Df(c(t))c'(t) = Df(x + t(y-x))(y-x).$$

Hieruit volgt met Stelling 3.3 dat

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f \circ c(1) - f \circ c(0) = \int_0^1 (f \circ c)'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 Df(x + t(y-x))(y-x)\, dt = L(x,y)(y-x) \end{aligned}$$

met $L(x,y)$ de afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ die gegeven wordt door

$$L(x,y)v = \int_0^1 Df(x + t(y-x))v\, dt, \qquad (v \in \mathbb{R}^n).$$

Uit de lineariteit van $\mathbb{R}^p$-waardige Riemann-integratie volgt gemakkelijk dat $L(x,y) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Wegens de substitutie regel is de functie $(t,x,y) \mapsto Df(x + (t(y-x))v$, $[0,1] \times U \times U \to \mathbb{R}^n$ continu. Uit Stelling 3.8 volgt nu dat $(x,y) \mapsto L(x,y)v$ continu is op $U \times U$, voor elke $v \in \mathbb{R}^n$, We concluderen dat alle matrix coefficienten $L_{ij}(x,y) = \langle e_i, L(x,y)e_j\rangle$ continu zijn. Hieruit volgt dat $(x,y) \mapsto L(x,y)$ continu is. Het eerste deel van de propositie is nu bewezen.

Voor het tweede deel veronderstellen we dat $x \in U$. Definieer voor $h \in -x + U$

$$R(h) := f(x+h) - f(x) - L(x,x)(h) = [L(x, x+h) - L(x,x)](h).$$

Dan geldt dat

$$\|h\|^{-1}\|R(h)\| \le \|L(x, x+h) - L(x,x)\| \to 0 \qquad (h \to 0),$$

vanwege de continuïteit van $y \mapsto L(x,y)$ in het punt x. Hieruit concluderen we dat f totaal differentieerbaar is in x met totale afgeleide gelijk aan $Df(x) = L(x,x)$. □

In het vervolg veronderstellen we steeds dat $U \subset \mathbb{R}^n$ open is en $f : U \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding.

Gevolg 4.7 *Laat $a \in U$ en veronderstel dat $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een inverteerbare lineaire afbeelding is. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset U$ en zo dat de beperking van f tot $B(a;\delta)$ injectief is.*

Bewijs Door eventueel U te verkleinen tot een open bol zien we dat we mogen veronderstellen dat U convex is. Laat $L : U \times U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ een afbeelding zijn als in de bovenstaande propositie. Dan geldt dat alle matrix coefficienten $L_{ij}(x,y) = \langle e_i, L(x,y)e_j\rangle$ continu zijn. Aangezien $\det L(x,y)$ een polynomiale functie is in deze matrix coeëfficiënten, volgt met de subsitutieregel dat $(x,y) \mapsto \det L(x,y)$ continu is. Volgens de propositie is $L(a,a) = Df(a)$, dus er bestaat een $\delta' > 0$ zo dat voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ met $\|(x,y) - (a,a)\| < \delta'$ geldt dat

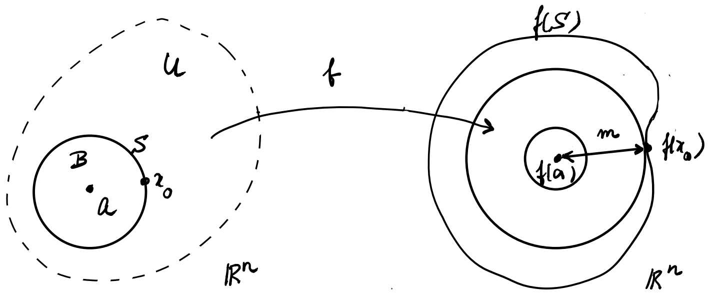
$$|\det L(x,y)| > \frac{1}{2}|\det Df(a)| > 0.$$

In het bijzonder is voor dergelijke (x, y) de lineaire afbeelding $L(x, y)$ inverteerbaar. Kies $\delta > 0$ zo dat $x, y \in B(a; \delta) \implies \|(x, y) - (a, a)\| < \delta'$. Dan geldt voor alle $x, y \in B(a; \delta)$ dat

$$f(y) - f(x) = 0 \implies L(x, y)(y - x) = 0 \implies y - x = 0,$$

dus f is injectief op $B(a; \delta)$. $\square$

Lemma 4.8 *Laat $a \in U$ en veronderstel dat $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een inverteerbare lineaire afbeelding is. Dan is er een $r > 0$ zo dat $f(U) \supset B(f(a); r)$.*



Bij het bewijs van Lemma 4.8

Bewijs Met het vorige resultaat zien we, door U kleiner te kiezen indien nodig, dat we mogen veronderstellen dat $f : U \to \mathbb{R}^n$ injectief is.

Uit het C^1 zijn van f volgt dat de functies $x \mapsto D_j f_i(x), U \to \mathbb{R}$ continu zijn. Hieruit volgt met de product en somregel dat de functie $x \mapsto \det Df(x)$, $U \to \mathbb{R}$ continu is. Nu is $|\det Df(a)| > 0$. Er bestaat daarom een $\delta > 0$ zo dat $B(a; \delta) \subset U$ en zo dat

$$x \in B(a; \delta) \implies |\det Df(x)| \geq \frac{1}{2} |\det Df(a)| > 0.$$

We kiezen $0 < \rho < \delta$ en schrijven B voor de open bol $B(0; \rho)$ en $\bar{B}$ voor zijn afsluiting.

De rand $S := \bar{B} \setminus B$ is gesloten en begrensd in $\mathbb{R}^n$ dus rij-compact. De functie

$$d : S \to \mathbb{R}, x \mapsto \|f(x) - f(a)\|$$

is continu, dus neemt een minimale waarde m aan op S, zeg in $x_0 \in S$. Uit de injectiviteit van f op $\bar{B}$ volgt dat $f(x_0) \neq f(a)$, dus $m > 0$. Kies $r = m/2$. We zullen laten zien dat deze r voldoet.

Laat daartoe b een punt van $B(f(a); r)$ zijn. Dan neemt de continue functie $g : x \mapsto \|f(x) - b\|$ een minimale waarde aan op de rij-compacte verzameling $\bar{B}$, zeg in x_1. Deze minimale waarde is kleiner gelijk $g(a) = \|f(a) - b\| < r$. Uit $x_1 \in S$ zou volgen dat

$$g(x_1) = \|f(x_1) - b\| \geq \|f(x_1) - f(a)\| - \|f(a) - b\| \geq m - r = r > g(a),$$

tegenspraak. Dus $x_1 \in B$ en $g \geq g(x_1)$ op B. Voor de differentieerbare functie $G := g^2$ geldt nu ook dat $G \geq G(x_1)$ op B. Wegens Lemma 1.8 volgt hieruit dat $DG(x_1) = 0$.

De functie $G : B \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door $G(x) = \langle f(x) - b, f(x) - b \rangle$ en heeft als afgeleide in x_1 de lineaire afbeelding $DG(x_1) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die gegeven wordt door

$$DG(x_1)v = 2\langle Df(x_1)v, f(x_1) - b \rangle.$$

Zie het lemma hieronder voor details. We concluderen dat $\langle Df(x_1)v, f(x_1) - b\rangle = 0$ voor alle $v \in \mathbb{R}^n$. Omdat $Df(x_1)$ bijectief is volgt hieruit dat $\langle w, f(x_1) - b\rangle = 0$ voor alle $w \in \mathbb{R}^n$. Hieruit volgt tenslotte dat $f(x_1) = b$ dus $b \in f(B)$. We concluderen dat $B(f(a); r) \subset f(B) \subset f(U)$. $\square$

Lemma 4.9 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ en $f : U \to \mathbb{R}^n$ een C^1-functie. Zij $b \in \mathbb{R}^n$ en definieer $G : U \to \mathbb{R}^n$ door*

$$G(x) = \langle f(x) - b, f(x) - b\rangle.$$

Dan is G een C^1 functie. In een willekeurig punt $a \in U$ wordt de afgeleide gegeven door

$$DG(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ v \mapsto 2\langle Df(a)v, f(a) - b\rangle.$$

Bewijs Met de rekenregels voor partiële differentiatie zien we dat G een C^1-functie is, en dat voor elke $a \in U$ geldt dat $D_jG(a) = 2\langle D_jf(a), f(a) - b\rangle$. Hieruit volgt dat G totaal differentieerbaar is en dat de afgeleide $DG(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$DG(a)v = \sum_{j=1}^n v_jD_jG(a) = 2\langle \sum_{j=1}^n v_jD_jf(a), f(a) - b\rangle = 2\langle Df(a)v, f(a) - b\rangle.$$

$\square$

We zijn nu gereed voor het bewijs van de inverse functiestelling. Voor het gemak herhalen we de formulering.

Inverse functiestelling *Zij $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ open, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding en $a \in \mathcal{O}$. Als de lineaire afbeelding $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inverteerbaar is, dan bestaat er een open omgeving U van a in $\mathcal{O}$ zo dat*

(a) *$f(U)$ is open in $\mathbb{R}^n$;*

(b) *de afbeelding $f|_U$ is een C^1 diffeomorfisme van U op $f(U)$.*

Bewijs Kiezen we $U = B(a; \delta)$ met $\delta > 0$ klein genoeg, dan bereiken we dat $f|_U$ injectief is, en dat $Df(x)$ inverteerbaar is voor alle $x \in U$; zie het begin van het bewijs van Lemma 4.8. Door toepassen van datzelfde lemma nu dat voor iedere $x \in U$ en iedere open omgeving V van x in U een $r_x > 0$ bestaat zo dat $f(V) \supset B(f(x); r_x)$. Hieruit volgt dat $f(x)$ inwendig punt is van $f(V)$, voor iedere open $V \subset U$ en iedere $x \in V$. We concluderen hieruit dat $f : U \to f(U)$ een bijectie is en dat ieder open deel $V \subset U$ een open beeld $f(V)$ heeft. Zij $g : f(U) \to U$ de inverse van $f|_U$. Dan geldt voor ieder open deel $V \subset U$ dat $g^{-1}(V) = f(V)$ open in $\mathbb{R}^n$ dus in U is. We concluderen dat de afbeelding $g : f(U) \to U$ continu is.

Zij $x_0 \in U$ en schrijf $\xi_0 = f(x_0)$. Zij $L : U \times U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gedefinieerd als in Propositie 4.6. De afbeelding $\det \circ L : U \times U \to \mathbb{R}$ is continu, en ongelijk nul in (a, a). Dus door $\delta > 0$ nog kleiner kiezen indien nodig, bereiken we dat $\det L(x, y)$ ongelijk nul is voor alle $x, y \in U$. Hieruit volgt dat $L(x, y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dan inverteerbaar is. Uit Cramer's formule voor de inverse van een matrix volgt nu dat de afbeelding

$$(x, y) \mapsto L(x, y)^{-1},\ \ U \times U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

continu is. Laat $\xi \in f(U)$. Dan is

$$\xi - \xi_0 = f(g(\xi)) - f(x_0) = L(g(\xi), x_0)[g(\xi) - x_0] = L(g(\xi), x_0)[g(\xi) - g(\xi_0)]$$

waaruit volgt dat

$$g(\xi) - g(\xi_0) = L(g(\xi), x_0)^{-1}(\xi - \xi_0).$$

Dus

$$g(\xi) - g(\xi_0) = L(x_0, x_0)^{-1}(\xi - \xi_0) + \|\xi - \xi_0\| \, r(\xi),$$

waarbij $r(\xi_0) = 0$ en

$$r(\xi) = \|\xi - \xi_0\|^{-1}(L(g(\xi), x_0)^{-1} - L(x_0, x_0)^{-1})(\xi - \xi_0).$$

We merken op dat

$$\|r(\xi)\| \leq \|L(g(\xi), x_0)^{-1} - L(x_0, x_0)^{-1}\| \to 0, \qquad (\xi \to \xi_0)$$

omdat $g(\xi) \to x_0$ voor $\xi \to \xi_0$ terwijl $x \mapsto L(x, x_0)^{-1}$ continu is in x_0.

Uit het bovenstaande concluderen we dat g in $\xi_0 = f(x_0)$ differentieerbaar is met afgeleide

$$Dg(f(x_0)) = L(x_0, x_0)^{-1} = Df(x_0)^{-1}.$$

Dus voor alle $\xi \in f(U)$ geldt dat $Dg(\xi) = Df(g(\xi))^{-1}$. Met Cramer's formule voor de inverse van een matrix zien we dat $x \mapsto Df(x)^{-1}$ een continue afbeelding $U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is, en door de substitutiestelling zien we vervolgens dat de afbeelding $\xi \mapsto Dg(\xi)$, $f(U) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ continu is. Hieruit blijkt dat g een C^1-afbeelding $f(U) \to U$ is. □

De inverse functiestelling wordt vaak toegepast in de volgende vorm.

Gevolg 4.10 *Laten $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling zijn en $f : U \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding zo dat f injectief is op U en $Df(x)$ inverteerbaar voor iedere $x \in U$. Dan is $V := f(U)$ open in $\mathbb{R}^n$ en $f : U \to V$ een diffeomorfisme.*

Bewijs Uit de aannames volgt dat $f : U \to V$ bijectief is. De inverse van deze afbeelding noemen we g.

Het is voldoende aan te tonen dat V open is en dat $g : V \to U \subset \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding is. Laat $b \in V$ willekeurig zijn en $a := g(b)$ dan is $a \in U$ en $f(a) = b$. Er is een open omgeving U_0 van a in U zo dat $V_0 := f(U_0)$ open is en $f|_{U_0}$ een diffeomorfisme is van U_0 op $V_0 := f(U_0)$. Uit dit argument volgt allereerst dat b een inwendig punt van V_0 dus van V is. Omdat b willekeurig was concluderen we dat V open is.

In het bovenstaande is $f|_{U_0}$ een diffeomorfisme $U_0 \to V_0$. Dit betekent dat $f|_{U_0}$ een inverse $h : V_0 \to U_0$ heeft die C^1 is. Het is duidelijk dat $h = g|_{V_0}$. Dus g is op de omgeving V_0 van b een C^1-afbeelding. Aangezien $b \in V$ willekeurig was concluderen we dat g een C^1-afbeelding $V \to U$ is. □

Opmerking 4.11 In het bovenstaande wordt de afgeleide van f^{-1} in elk punt $b \in V$ gegeven door

$$D(f^{-1})(b) = Df(f^{-1}(b))^{-1}.$$

Dit is een direct gevolg van Lemma 4.4. ⊘

4.2 Voorbeelden: Pool-, Bol- en Cilindercoördinaten

De inverse functiestelling geeft ons een hulpmiddel om open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ te beschrijven met andere (differentieerbare) coördinaten dan de standaard Euclidische.

Voorbeeld 4.12 (Poolcoordinaten) Als eerste voorbeeld beschouwen we poolcoordinaten. Zij $F :]\,0,\infty\,[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$F(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Dan is F een C^1 afbeelding, met Jacobi-matrix

$$DF(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

De determinant van deze matrix, of Jacobiaan, wordt gegeven door

$$\det DF(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

We zien hieraan dat $DF(r,\varphi) \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ inverteerbaar is voor alle $r > 0$ en $\varphi \in \mathbb{R}$. Is $U \subset]\,0,\infty\,[\, \times \mathbb{R}$ een open deel waarop F injectief is, dan is $V := F(U)$ wegens Gevolg 4.10 een open deel van $\mathbb{R}^2$ en $F : U \to V$ een diffeomorfisme. Laat $G : V \to U$ de inverse zijn, dan worden de componenten G_1, G_2 van G wel poolcoordinaten op V genoemd. Klassiek worden deze genoteerd met $G_1(x,y) = r(x,y)$ en $G_2(x,y) = \varphi(x,y)$. De partiële afgeleiden van $r(x,y)$ en $\varphi(x,y)$ naar de variabelen x, y worden als volgt gevonden.

Wegens Lemma 4.4 geldt

$$DG(F(r,\varphi)) = DF(r,\varphi)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

dus

$$DG_1(F(r,\varphi)) = (\cos\varphi, \sin\varphi)^{\mathrm{T}}, \quad \text{en} \quad DG_2(F(r,\varphi)) = r^{-1}(-\sin\varphi, \cos\varphi)^{\mathrm{T}}.$$

Hieruit volgt dat

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}\right) = \|(x,y)\|^{-1}(x,y), \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \|(x,y)\|^{-2}(-y,x), \quad ((x,y) \in V).$$

We merken op dat het beeld $F(\,]\,0,\infty\,[\, \times \mathbb{R})$ gelijk is aan $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Het is echter onmogelijk een open deel U van $]\,0,\infty\,[\, \times \mathbb{R}$ te kiezen zo dat $F|_U$ injectief is terwijl $F(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (zie onderstaande opmerking).

Zij S de eenheidscirkel $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ en $\sigma \in S$. Dan is er een $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ zo dat $\sigma = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$. Definieer de halflijn $L(\sigma) := \{r\sigma \mid r \geq 0\}$ in $\mathbb{R}^2$. Definieer de open omgeving

$$U = U(\varphi_0) :=]\,0,\infty\,[\, \times \,]\,\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi\,[\,.$$

dan is het gemakkelijk na te gaan dat F de verzameling $U(\varphi_0)$ bijectief afbeeldt op $\mathbb{R}^2 \setminus L(\varphi_0)$, en dus een C^1-diffeomorfisme tussen deze open delen van $\mathbb{R}^2$ definieert. In practische toepassingen wordt zo'n keuze van $U(\varphi_0)$ meestal gemaakt met $\varphi_0 = 0$ of $\varphi_0 = -\pi$. $\oslash$

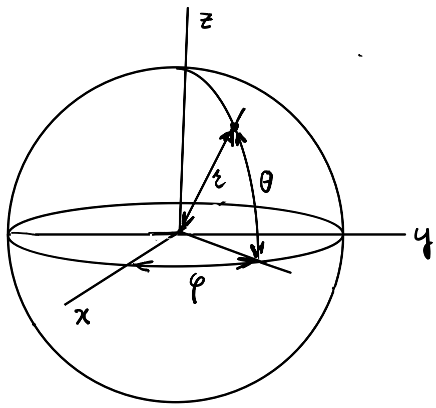
Opmerking 4.13 (Opgave) Bewijs de in het voorgaande beweerde dat het onmogelijk is het open deel $U\ subset]0,\infty[\times\mathbb{R}$ zo te kiezen dat U door F injectief afgebeeld wordt op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

$\oslash$

Voorbeeld 4.14 (Cilindercoördinaten) We beschouwen de afbeelding $C :]0, \infty] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$C(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) = (F(r, \varphi), z),$$

met F als in het vorige voorbeeld. Met een soortgelijke redenatie als boven vinden we C een diffeomorfisme is van de verzameling $U(\varphi_0) \times \mathbb{R}$ naar $(\mathbb{R}^2 \setminus L(\varphi_0)) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \setminus L(\varphi_0) \times \mathbb{R}$, het complement van een gesloten halfvlak in $\mathbb{R}^3$. $\oslash$



Bolcoördinaten

Voorbeeld 4.15 (Bolcoördinaten) Ieder gegeven punt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kan uniek geschreven worden als $r \cdot \sigma$ met σ een punt op de eenheidssfeer S in R^3 en met $r > 0$. Merk op dat

$$r = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Is $\sigma = (x, y, z)$ een punt op de eenheidssfeer, en is $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, dan is (ρ, z) een punt op de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$, met een niet negatieve eerste coördinaat. Hieruit volgt dat $(\rho, z) = (\cos \theta, \sin \theta)$ voor een unieke $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Voorts is $\rho^{-1} \cdot (x, y)$ een punt op de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$, dus er is een unieke $-\pi < \varphi \leq \pi$ zo dat $(x, y) = \rho \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Er volgt dat

$$\sigma = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta),$$

voor een uniek punt $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$ met $-\pi < \varphi \leq \pi$ en $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Door het bovenstaande gemotiveerd beschouwen we de afbeelding $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = r(\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta).$$

Dit is een C^1 afbeelding waarvan de Jacobiaan gegeven wordt door

$$\det D\Phi(r, \varphi, \theta) = r^2 \cos \theta.$$

(reken dit na). De afbeelding Φ beeldt $[0, \infty[\, \times\,] - \pi, \pi\,] \times [-\pi/2, \pi/2]$ surjectief af op $\mathbb{R}^3$ en is wegens het bovenstaande injectief op de open verzameling

$$U :=]\,0, \infty\,[\, \times\,] - \pi, \pi\,[\, \times\,]- \pi/2, \pi/2\,[,$$

waarop tevens de Jacobiaan ongelijk nul is. Vanwege Gevolg 4.10 is het beeld $V := \Phi(U)$ open in $\mathbb{R}^3$ en is $\Phi : U \to V$ een C^1 diffeomorfisme. De inverse $\Psi : V \to U$ van Φ is een C^1-afbeelding.

De componenten van Ψ heten ook wel de bolcoördinaten op V. De traditionele notatie voor deze componenten is (r, φ, θ). Merk op dat $\mathbb{R}^3 \setminus V$ gelijk is aan het halfvlak bestaande uit de punten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ met $y = 0$ en $x \leq 0$.

$\oslash$

4.3 Lagrange multiplicatoren

De volgende toepassing van de inverse functiestelling staat bekend als de multiplicatoren methode van Lagrange, een veel toegepast hulpmiddel om extremen onder randcondities te bepalen.

In het vervolg zal sprake zijn van een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$ en een k-tal C^1-functies $g_1, \ldots, g_k : U \to \mathbb{R}$. Deze functies bepalen een deelverzameling

$$N := \{x \in U \mid g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_k(x) = 0\}.$$

Indien voor alle $x \in S$ geldt dat de vectoren $\operatorname{grad} g_1(x), \ldots, \operatorname{grad} g_n(x)$ lineair onafhankelijk zijn, dan is N een zogenaamde C^1-deelvariëteit van $\mathbb{R}^n$ van dimensie $n - k$. We gaan er in deze cursus niet verder op in wat dit betekent. In de cursus 'Analyse in Meer Variabelen 2' wordt de theorie van deelvariëteiten uitgebreid behandeld als toepassing van de inverse functiestelling.

Wij kunnen hier wel opmerken dat $N = g^{-1}(\{0\})$, waarbij $g = (g_1, \ldots, g_k)$ een continue afbeelding $U \to \mathbb{R}^k$ is. Omdat $\{0\}$ een gesloten deelverzameling is van $\mathbb{R}^k$, is N een gesloten deelverzameling van U (in de zin van Inleiding Analyse).

Lemma 4.16 *Zij $g : U \to \mathbb{R}^k$ een C^1-afbeelding, en $x \in N := g^{-1}(\{0\})$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De vectoren* $\operatorname{grad} g_1(x), \ldots, \operatorname{grad} g_k(x)$ *zijn lineair onafhankelijk.*

(b) *De afbeelding $Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ is surjectief.*

Bewijs De vectoren $\operatorname{grad} g_j(x)$ zijn kolomvectoren. We duiden de corresponderende getransponeerde rijvectoren aan met $\operatorname{grad} g_j(x)^{\mathrm{T}}$ en merken op dat de matrix van $Dg(x)$ een $k \times n$ matrix is, met rijen $\operatorname{grad} g_j(x)^{\mathrm{T}}$, voor $j = 1, \ldots, k$. De bewering dat de rij-vectoren lineair onafhankelijk zijn is equivalent met de bewering dat $Dg(x)$ rang k heeft, hetgeen weer equivalent is met (b). $\square$

Stelling 4.17 (Lagrange multiplicatoren) *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ open zijn, $g_1, \ldots, g_k : U \to \mathbb{R}$ een k-tal C^1-functies die voldoen aan (a) voor alle $x \in N$. Zij $f : U \to \mathbb{R}$ een C^1-functie, en veronderstel dat de beperkte functie $f|_N : N \to \mathbb{R}$ een lokaal maximum of minimum heeft in $a \in N$. Dan zijn er unieke $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (multiplicatoren genaamd) zo dat*

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(a) + \cdots + \lambda_k \operatorname{grad} g_k(a) \tag{4.2}$$

Voorbeeld 4.18 We beschouwen de situatie dat $U \subset \mathbb{R}^n$ open is, $a = 0$, $f \in C^1(U)$ en dat de C^1-functies $g_j : U \to \mathbb{R}$ gegeven worden door $g(x) = x_j$, voor $1 \leq j \leq k$. Dan is $N = U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k})$. Dus

$$N = \{0\} \times U'$$

voor een open omgeving U' van 0 in $\mathbb{R}^{n-k}$.

Uit de aannames volgt dat

$$F : U' \to \mathbb{R}, \quad x' \mapsto f(0, x')$$

een C^1-functie is met een lokaal extreem in 0. Wegens Lemma 1.8 volgt hieruit dat $\operatorname{grad} F(0) = 0$, dus $D_j f(0) = 0$ voor $j > k$. Dit impliceert dat $\operatorname{grad} f(0) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, dus er bestaan $\lambda_j \in \mathbb{R}$, voor $j \leq k$, zo dat $\operatorname{grad} f(0) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j$. Nu is $\operatorname{grad} g_j(0) = e_j$, dus (4.2) volgt. $\oslash$

Voor we starten met het bewijs van Stelling 4.17, geven we eerst een andere formulering van het criterium (4.2). Voor een lineaire afbeelding $T : V \to W$ van een lineaire ruimte E naar een lineaire ruimte F definiëren we de kern door

$$\ker T := \{x \in E \mid T(x) = 0\}.$$

We brengen in herinnering dat $\ker T$ een lineaire deelruimte van E is. Bovendien is T injectief dan en slechts dan als $\ker T = \{0\}$. In het vervolg definiëren we $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ door $g = (g_1, \ldots, g_k)$.

Lemma 4.19 *Het bestaan van $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ zodat conditie (4.2) geldt is equivalent met de inclusie*

$$\ker Df(a) \supset \ker Dg(a). \tag{4.3}$$

Bewijs Conditie (4.2) voor zekere λ_j betekent precies dat $\operatorname{grad} f(a)$ tot het lineaire opspansel $\operatorname{span}\{\operatorname{grad} g_j(a) \mid 1 \leq j \leq k\}$ behoort. Dit is gelijkwaardig met de volgende inclusies van de orthocomplementen:

$$\operatorname{grad} f(a)^{\perp} \supset \bigcap_{j=1}^{k} \operatorname{grad} g_j(a)^{\perp}. \tag{4.4}$$

Nu is

$$\operatorname{grad} f(a)^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Df(a)v = 0\} = \ker(Df(a)).$$

Evenzo is de verzameling in het rechterlid van (4.4) gelijk aan $\cap_j \ker Dg_j(a) = \ker Dg(a)$. Het geldig zijn van (4.2) voor zekere λ_j is dus gelijkwaardig aan de inclusie (4.3). $\square$

We zijn nu voorbereid op het bewijs van Stelling 4.17.

Bewijs De uniciteit van $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ is een direct gevolg van de lineaire onafhankelijkheid van de vectoren $\operatorname{grad} g_j(a)$, $1 \leq j \leq k$. Het volstaat dus het bestaan van de multiplicatoren aan te tonen. Door eventueel U te vervangen door een kleinere omgeving kunnen we reduceren tot de situatie dat $U = B(a; r)$ en dat het maximum of minimum van $f|_N$ in a absoluut is.

We zullen het bewijs voltooien door (4.3) te bewijzen. Dit zullen we doen door, gebruik makend van de inverse functiestelling, een diffeomorfisme aan te geven dat een vergelijk mogelijk maakt met de speciale situtatie van Voorbeeld 4.18.

Er zijn standaard basisvectoren $e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-k}}$ te vinden die $\operatorname{grad} g_1(a), \ldots, \operatorname{grad} g_k(a)$ aanvullen tot een basis van $\mathbb{R}^n$. Omdat (4.2) invariant is onder permutatie van coördinaten mogen we zonder verlies aan algemeenheid veronderstellen dat de vectoren

$$\operatorname{grad} g_1(a), \ldots, \operatorname{grad} g_k(a), e_{k+1}, \ldots, e_n$$

een basis van $\mathbb{R}^n$ vormen. We definiëren de functies $g_j : U \to \mathbb{R}$ voor $k < j \leq n$ door $g_j(x) = x_j - a_j$. Dan is $\operatorname{grad} g_j(a) = e_j$, voor $j > k$, dus de vectoren $\operatorname{grad} g_j(a)$, $1 \leq j \leq n$ vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$. Zij $G = (g_1, \ldots, g_n)$, dan is $G : U \to \mathbb{R}^n$ een C^1-functie met $G(a) = 0$. De matrix van de totale afgeleide $DG(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heeft als rijen de vectoren $\operatorname{grad} g_j(a)^{\mathrm{T}}$ en is dus een inverteerbare lineaire afbeelding.

Door toepassing van de inverse functiestelling zien we, door eventueel de de straal van de bol U te verkleinen, dat we mogen veronderstellen dat G de verzameling U afbeeldt op een open omgeving V van 0 in $\mathbb{R}^n$. De functie $f \circ G^{-1}$ heeft een globaal extreem op $G(N \cap U) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap V$. Zoals in Voorbeeld 4.18 is $D_j(f \circ G^{-1})(0) = 0$, dus $D(f \circ G^{-1})(0)$ is nul op $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Wegens de kettingregel is $D(f \circ G^{-1})(0) = Df(a) \circ D(G^{-1})(a)) = Df(a) \circ DG(a)^{-1}$. We concluderen dat $Df(a)$ nul is op

$$
\begin{aligned}
DG(a)^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \leq k : (DG(a)v)_j = 0\} \\
&= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \leq k : DG_j(a)v = 0\} \\
&= \ker Dg(a).
\end{aligned}
$$

□

Voorbeeld 4.20 We beschouwen de cirkel $C \subset \mathbb{R}^3$ bestaande uit de punten (x, y, z) met $z = 0$ en $x^2 + y^2 = 1$. Voorts beschouwen we het punt $p = (1, -2, 3)$ en stellen we de vraag welk punt van C het dichtst bij p ligt. Dit betekent dat we het minimum van $f|_C$ willen bepalen voor de functie $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ gedefinieerd door

$$f(x, y, z) = \|(x, y, z) - p\|^2 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2.$$

onder de aanname dat $g_1(x, y, z) = 0$. Nu is $C = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}$, waarbij $g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ gedefinieerd zijn door

$$g_1(x, y, z) = z, \qquad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2.$$

We merken dat de vectoren

$$\operatorname{grad} g_1(x, y, z) = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \operatorname{grad} g_2(x, y, z) = (2x, 2y, 0)^{\mathrm{T}}$$

lineair onafhankelijk zijn voor alle $(x, y, z) \in C$. Immers, voor dergelijke punten is $(x, y) \neq (0, 0)$. De multiplicatorenmethode van Lagrange is dus toepasbaar met $N = C$. De functie f is continu, en de verzameling C is gesloten en begrensd, dus f heeft een absoluut minimum in een punt $(x, y, z) \in C$. Volgens de multiplicatorenmethode van Lagrange bestaan er $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zo dat

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \lambda(0, 0, 1)^{\mathrm{T}} + \mu(2x, 2y, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Aangezien $\operatorname{grad} f(x, y, z) = 2(x - 1, y + 2, z - 3)^{\mathrm{T}}$, vinden we de vergelijkingen

$$2(x - 1) = 2\mu x, \quad 2(y + 2) = 2\mu y, \quad 2(z - 3) = \lambda.$$

Omdat ook $z = 0$, vinden we dat $\lambda = -6$. Aangezien $x^2 + y^2 = 1$, vinden we

$$(x - 1) = \mu x, \quad y + 2 = \mu y, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

hetgeen gelijkwaardig is met

$$x((1 - \mu) = 1, \quad y(\mu - 1) = 2, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

dus met

$$x(1-\mu) = 1, \quad y = -2x, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Dit stelsel heeft de oplossingen

$$(x', y', \mu') = (\frac{1}{5}\sqrt{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}), \quad \text{en} \quad (x'', y'', \mu'') = (-\frac{1}{5}\sqrt{5}, +\frac{2}{5}\sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}).$$

Uit het bovenstaande leiden we af dat f in een van de punten $(x', y', 0)$ of $(x'', y'', 0)$ van C een absoluut minimum aanneemt. Nu is $f(x', y', 0) < f(x'', y'', 0)$ dus f neem in $(x', y', 0)$ een absoluut minimum aan (en in $(x'', y'', 0)$ een absoluut maximum, ga na). Het gevraagde punt van C is dus $(x', y', 0)$. $\oslash$

5 Lijntintegralen van vectorvelden

5.1 Vectorvelden en lijnintegralen

Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling zijn.

Definitie 5.1 (Vectorveld) Onder een *vectorveld* op U verstaan we een afbeelding $v = (v_1, \ldots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$. We zeggen dat dit vectorveld *continu* is indien v een continue afbeelding $U \to \mathbb{R}^n$ is, en C^1 indien elk van de componentfuncties v_j tot $C^1(U)$ behoort. $\oslash$

Meetkundig gezien is het gebruikelijk om zo'n vectorveld te zien als toekenning van een vector die in x 'aangrijpt' aan ieder punt $x \in U$.

Definitie 5.2 (Kromme) Onder een continue kromme in U verstaan we een continue afbeelding $\gamma : I \to U$ met $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval. We zeggen dat de kromme C^1 is indien de afbeelding $\gamma : I \to I$ continu differenteerbaar is. $\oslash$

Definitie 5.3 (Lijnintegraal) Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een C^1-kromme en v een continu vectorveld op U, dan definiëren we de *lijn-integraal* van v langs γ door

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx := \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \tag{5.1}$$

$\oslash$

In (5.1) hebben we de verkorte notatie $\cdot$ voor het Euclidische inproduct gebruikt. Dus

$$v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \sum_{j=1}^n v_j(\gamma(t))\, \gamma_j'(t).$$

Met behulp van de gebruikelijke rekenregels voor continuïteit zien we dat deze uitdrukking continu is in de variabele t, zodat de integrand van (5.1) continu is, en de integraal bestaat als Riemann-integraal.

Definitie 5.4 (Herparametrisering) Onder een *herparametrisering* van een C^1-kromme $\gamma : [a, b] \to U$ verstaan we een kromme ρ van de vorm $\rho = \gamma \circ \varphi$ met $\varphi : J \to I$ een monotoon stijgende C^1-afbeelding van een segment $J = [c, d]$ op een segment $I = [a, b]$. $\oslash$

Merk op dat een dergelijke herparametrisering weer een C^1-kromme is. Het volgende lemma zegt dat de lijn-integraal van een vectorveld invariant is onder herparametrisering.

Lemma 5.5 *Zij $\rho : J \to U$ een C^1 herparametrisering van de C^1-kromme $\gamma : [a, b] \to U$, dan is*

$$\int_\rho v(x) \cdot dx = \int_\gamma v(x) \cdot dx$$

Bewijs Zij $\varphi : J = [c, d] \to I = [a, b]$ een monotone C^1-bijectie zo dat $\rho = \gamma \circ \varphi$. Dan geldt vanwege de kettingel dat

$$\rho'(t) = D\gamma(\varphi(t))(\varphi'(t)) = \varphi'(t) D\gamma(1) = \varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))$$

voor alle $t \in J$, dus

$$\begin{aligned}\int_\rho v(x) \cdot dx &= \int_c^d v(\gamma(\varphi(t)) \cdot \gamma'(\varphi(t)) \; \varphi'(t) \; dt \\ &= \int_a^b v(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \; ds = \int_\gamma v(x) \cdot dx.\end{aligned}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de substitutieregel voor Riemann-integratie in één variabele. □

We beschouwen nu het bijzondere geval van een vectorveld dat optreedt als gradient van een C^1-functie $f : U \to \mathbb{R}$. Dus $v(x) = \operatorname{grad} f(x)$ waarbij de componenten gegeven worden door $v_j(x) = D_j f(x)$.

Lemma 5.6 *Zij $f \in C^1(U)$ en $\gamma : [a, b] \to U$ een C^1-kromme. Dan is*

$$\int_\gamma \operatorname{grad} f(x) \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Bewijs We merken op dat

$$\operatorname{grad} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)), \qquad (a \leq t \leq b),$$

wegens de kettingregel. Door toepassing van de definitie van lijnintegraal en de fundamentaalstelling van de integraalrekening vinden

$$\int_\gamma \operatorname{grad} f(x) \cdot dx = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

□

Het bovenstaande lemma motiveert de vraag of een gegeven vector veld v de gradient is van een functie f.

Definitie 5.7 (Potentiaal) Onder een *primitieve*, of *potentiaal* van een continu vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$ verstaan we een C^1 functie f zo dat $\operatorname{grad} f = v$. ⊘

Is $v : U \to \mathbb{R}^n$ een C^1 vectorveld, en is f een primitieve van v, dan moet f een C^2-functie zijn, zodat de verwisselde tweede orde partiële afgeleiden f gelijk zijn. Er geldt in dat geval dat

$$D_j v_i = D_j D_i f = D_i D_j f = D_i v_j$$

op U. Zij $Dv(x)$ (de matrix van) de totale afgeleide van v en zij $Dv(x)^T$ de gespiegelde matrix. Dan volgt dat een C^1-vectorveld v op U dat een potentiaal heeft moet voldoen aan de voorwaarde dat voor alle $x \in U$ geldt:

$$Dv(x)^T = Dv(x). \tag{5.2}$$

Definitie 5.8 (Rotatievrij vectorveld) Een vectorveld v op U heet *rotatievrij* indien het C^1 is terwijl (5.2) geldt voor alle $x \in U$. ⊘

Uit de bovenstaande opmerkingen volgt dat voor iedere $f \in C^2(U)$ het vectorveld $\operatorname{grad} f$ op U rotatievrij is. Omgekeerd heeft een rotatievrij vectorveld in ieder geval *lokaal* een primitieve.

Lemma 5.9 *Zij U een open bol in $\mathbb{R}^n$ en $v : U \to \mathbb{R}^n$ een rotatievrij vectorveld op U. Dan bezit v een primitieve $f \in C^2(U)$. De primitieven van v op U zijn de functies van de vorm $f + C$, met C een constante functie.*

Bewijs We laten eerst zien dat v een primitieve $f \in C^2(U)$ bezit. Zij a het middelpunt van de bol U. Voor $x \in U$ definiëren we de kromme $\gamma_x : [0, 1] \to U$ door

$$\gamma_x(t) = a + t(x - a).$$

Dit is het geparametriseerde lijnstuk van a tot x. We definiëren de functie $f : U \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \int_{\gamma_x} v(\xi) \cdot d\xi.$$

Dan is $\frac{d}{dt}\gamma_x(t) = (x - a)$, dus

$$f(x) = \int_0^1 v(a + t(x - a)) \cdot (x - a)\, dt.$$

De integrand is een C^1-functie van (t, x). Wegens Stellingen 3.15 vinden we door differentiatie onder de integraal dat f partieel differentieerbaar is op U en dat

$$D_j f(x) = \int_0^1 [tD_j v(a + t(x - a)) \cdot (x - a) + v_j(a + t(x - a))]\, dt, \qquad (x \in U),$$

voor $1 \le j \le n$. Hieraan zien we met behulp van Stelling 3.8 dat $f \in C^2(U)$. Voor $x \in U$ geldt

$$\begin{aligned} D_j v(a + t(x - a) \cdot (x - a) &= \sum_{i=1}^n D_j v_i(a + t(x - a))(x - a)_i \\ &= \sum_{i=1}^n D_i v_j(a + t(x - a))(x - a)_i \\ &= D(v_j)(a + t(x - a))(x - a). \end{aligned}$$

We vinden zo dat

$$\begin{aligned} D_j f(x) &= \int_0^1 [tD(v_j)(a + t(x - a))(x - a) + v_j(a + t(x - a)]\, dt \\ &= \int_0^1 [\frac{d}{dt} v_j(a + t(x - a)) + v_j(a + t(x - a)]\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[tv_j(a + t(x - a))]\, dt \\ &= tv_j(a + t(x - a))|_0^1 = v_j(x). \end{aligned}$$

Hieruit leiden we af dat $v = \operatorname{grad} f$ op U.

Het is duidelijk dat $f + C$ een primitieve is van v is als C een constante functie is. We zullen nu bewijzen dat iedere primitieve deze gedaante heeft. Laat daartoe g een tweede primitieve van v op U

zijn en definieer $h = f - g$. Dan is h een C^1-functie op U met $\operatorname{grad} h = 0$. Voor iedere $x \in U$ geldt dan dat

$$\frac{d}{dt} h(a + t(x - a)) = \text{grad } h(a + t(x - a)) \cdot (x - a) = 0$$

voor alle $0 \leq t \leq 1$, wegens de kettingregel. Hieruit volgt dat $h(x) = h(a)$ voor alle $x \in U$, dus h is constant. Hieruit volgt de bewering over alle primitieven. $\square$

5.2 Lijnintegralen van rotatievrije vectorvelden

We zullen nu de observatie van Lemma 5.9 voor rotatievrije vectorvelden combineren met Lemma 5.6 om de definitie van lijnintegraal langs C^1 krommen uit te breiden naar continue krommen. We veronderstellen weer dat U een open deel van $\mathbb{R}^n$ is en v een rotatievrij vectorveld op U. In het bijzonder is $v \in C^1(U)$.

Definitie 5.10 (Primitieve, langs een kromme) Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een continue kromme. Onder een *primitieve* van v langs γ verstaan we een functie $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ met de volgende eigenschap. Voor iedere $t_0 \in [a, b]$ bestaat een primitieve f van v gedefinieerd op een bolomgeving van $\gamma(t_0)$ in U zo dat $\varphi(t) = f(\gamma(t))$ voor t in een voldoend kleine omgeving van t_0 in $[a, b]$. $\oslash$

Lemma 5.11 *Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een continue kromme. Dan heeft v precies één primitieve φ langs γ met $\varphi(a) = 0$. De andere primitieven van v langs γ worden gegeven door $\varphi + c$ met c een constante functie.*

Bewijs We beschouwen eerst het geval dat $v = 0$ op U. In dat geval is de nulfunctie een potentiaal van v langs γ. Zij $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ een potentiaal van $v = 0$ langs γ. Zij $t_0 \in [a, b]$ dan bestaat er een bolomgeving B van $\gamma(t_0)$ en een primitieve $f \in C^2(B)$ zo $f \circ \gamma = \varphi$ op een open omgeving van t_0. Uit $v = 0$ volgt met Lemma 5.9 dat f constant is op B. Hieruit volgt dat φ constant is op een open omgeving van t_0 in $[a, b]$. Dus φ is lokaal constant op $[a, b]$ en wegens Lemma 1.18 concluderen we dat φ constant is.

We veronderstellen nu het algemene geval dat v een rotatievrij C^1-vectorveld op U is. en bewijzen eerst dat het verschil van twee primitieven constant is. Stel dat φ_1 en φ_2 twee primitieven van v zijn met de genoemde eigenschap. Dan is $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ een primitieve van het nul-vectorveld langs γ. In het eerste deel van het bewijs zagen we dat deze constant is.

Tenslotte bewijzen we het bestaan van een primitieve. We definiëren S als de verzameling $s \in [a, b]$ zo dat v een primitieve langs $\gamma|_{[a,s]}$ heeft. Deze verzameling is naar boven begrensd door b, en bevat a dus is niet leeg. Wegens de stelling van de kleinste bovengrens bezit S een supremum

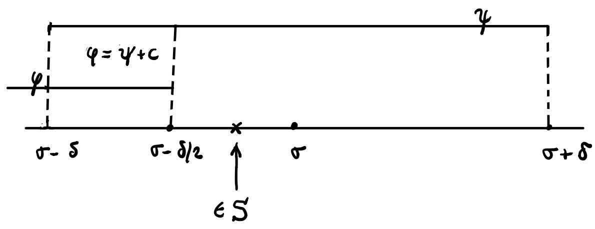
$$\sigma := \sup S \leq b.$$

We zullen bewijzen dat $\sigma = b$. Stel niet, dan is $\sigma < b$.

Kies een open bolomgeving B van $\gamma(\sigma)$ in U. Wegens de continuïteit van γ in σ is er een open omgeving J van σ in $[a, b]$ zo dat $\gamma(J) \subset B$. Wegens Lemma 5.9 heeft v een primitieve f op B. We onderscheiden twee gevallen, namelijk $\sigma = a$ en $\sigma > a$.

Stel eerst $\sigma = a$. Er bestaat een $\delta > 0$ zodat $\sigma + \delta < b$ en zo dat $[a, a + \delta\,[\subset J$. Dan is $\varphi : t \mapsto f(\gamma(t))$ een primitieve van v langs $\gamma|_{[a,a+\delta/2]}$. We zien dat $a + \delta/2 \in S$, dus $\sigma \geq a + \delta/2$, tegenspraak.

Stel nu $\sigma > a$, dan $a < \sigma < b$. Omdat J een omgeving van σ is bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $[\sigma - \delta, gs + \delta] \subset J$. De afbeelding $\psi : t \mapsto f(\gamma(t))$ is nu een primitieve van v langs $\gamma|_{[\sigma-\delta,\sigma+\delta]}$. Uit $\sigma - \delta/2 < \sigma$ volgt dat $S \cap [\sigma - \delta/2, \sigma] \neq \emptyset$, dus $\sigma - \delta/2 \in S$, dus v heeft een primitieve φ langs $\gamma|_{[a,\sigma-\delta/2]}$.



Voortzetting primitieve

De beperkingen van ψ en φ tot $I := [\sigma - \delta, \sigma - \delta/2]$ zijn primitieven van v langs $\gamma|_I$. Wegens het eerder bewezene is er een constante $c \in \mathbb{R}$ zo dat $\varphi = \psi + c$ op I. Hieruit volgt dat de functie $\varphi : [a, \sigma - \delta/2] \to \mathbb{R}$ voortgezet kan worden tot een primitieve op $[a, \sigma + \delta]$, door hem te definiëren als $\varphi := \psi + c$ op het interval $]\sigma - \delta/2, \sigma + \delta]$. Dus $\sigma + \delta \in S$, tegenspraak. We concluderen dat $\sigma = b$, waarmee het bewijs voltooid is. $\square$

De karakterisering van alle primitieven in Lemma 5.11 maakt de volgende definitie mogelijk.

Definitie 5.12 (Integraal langs continue kromme) Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een continue kromme, en $v : U \to \mathbb{R}^n$ een rotatievrij vectorveld. Dan definiëren we de integraal van v langs γ door

$$\int_\gamma^* v(x) \cdot dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

met φ een primitieve van v langs γ. (Dit verschil is onafhankelijk van de keuze van φ.) $\oslash$

Opmerking 5.13 Later zal blijken dat deze definitie overeenkomt met de oude definitie van lijnintegraal in het geval dat γ een C^1 kromme is. Daarna zullen we de ster in de notatie weglaten. $\oslash$

We merken eerst op dat de integraal invariant is onder een continue herparametrisering van γ. Daaronder verstaan we een kromme van de vorm $\rho = \gamma \circ \tau : [c, d] \to U$ met $\tau : [c, d] \to [a, b]$ een continue afbeelding met $\tau(c) = a$ en $\tau(d) = b$.

Lemma 5.14 *Zij v een rotatievrij vectorveld op U, $\gamma : [a, b] \to U$ een continue kromme, en ρ een continue herparametrisering van γ. Dan is*

$$\int_\rho^* v(x) \cdot dx = \int_\gamma^* v(x) \cdot dx.$$

Bewijs Er bestaat een continue afbeelding $\tau : [c, d] \to [a, b]$ zo dat $\tau(c) = a$ en $\tau(d) = b$ zo dat $\rho = \gamma \circ \tau$. Zij φ een primitieve van v langs γ. We zullen laten zien dat $\varphi \circ \tau$ een primitieve van v langs ρ is. Zij $s_0 \in [c, d]$. Dan is $t_0 := \tau(s_0) \in [a, b]$, dus er is open bol B in U met middelpunt $\gamma(t_0) = \rho(s_0)$ en een primitieve f van v op B zo dat

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)), \qquad (t \in I),$$

op een omgeving I van $t_0 = \tau(s_0)$ in $[a, b]$. Uit de continuïteit van σ volgt dat er een open omgeving J van s_0 in $[c, d]$ bestaat zo dat $\tau(J) \subset I$. Nu geldt voor alle $s \in J$ dat $\tau(s) \in I$, dus

$$f(\rho(s)) = f(\gamma(\tau(s))) = \varphi(\tau(s)) = \varphi \circ \tau(s).$$

Volgens de definitie is $\varphi \circ \tau$ dus een primitieve van v langs ρ. Derhalve is

$$\int_\rho^* v(x) \cdot dx = \varphi \circ \tau(d) - \varphi \circ \tau(c) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_\gamma^* v(x) \cdot dx.$$

□

Lemma 5.15 *Laat $v : U \to \mathbb{R}^n$ een rotatievrij vectorveld zijn en $\gamma : [a, b] \to U$ een continue kromme. Zij $c \in \,]\, a, b\, [$, en definieer $\gamma_1 := \gamma|_{[a,c]}$ en $\gamma_2 := \gamma|_{[c,b]}$. Dan is*

$$\int_\gamma^* v(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1}^* v(x) \cdot dx + \int_{\gamma_2}^* v(x) \cdot dx \tag{5.3}$$

Bewijs Zij φ een potentiaal van v langs γ. Dan is de integraal in het linkerlid van (5.3) gelijk aan $\varphi(b) - \varphi(a)$. Verder is $\varphi|_{[a,c]}$ een potentiaal van v langs γ_1 en $\varphi|_{[c,b]}$ een potentiaal van v langs γ_2. Dus de som van de integralen in het rechterlid van (5.3) is gelijk aan

$$[\varphi(c) - \varphi(a)] + [\varphi(b) - \varphi(c)] = \varphi(b) - \varphi(a).$$

□

Uit het onderstaande resultaat blijkt dat de definitie van integraal overeenkomt met de oude definitie als γ een C^1-kromme is.

Lemma 5.16 *Zij $\gamma : [a, b] \to U$ een C^1-kromme, en $v : U \to \mathbb{R}^n$ een rotatievrij vectorveld. Dan is*

$$\int_\gamma^* v(x) \cdot dx = \int_\gamma v(x) \cdot dx$$

Bewijs We veronderstellen eerst het speciale geval dat $\gamma([a, b])$ gelegen is in een open bol B die op zijn beurt weer in U gelegen is. Dan heeft v wegens Lemma 5.9 een primitieve f op B. Verder is $f \circ \gamma$ een primitieve van v langs γ en we vinden wegens Definitie 5.12 dat

$$\int_\gamma^* v(x) \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Anderzijds is wegens Lemma 5.6

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b v(x) \cdot dx,$$

en de gelijkheid volgt in dit geval.

Het idee in het vervolg is de kromme in stukken te knippen die elk een beeld hebben dat gelegen is in een bol binnen U. Dit gaat als volgt.

Uit de rij-compactheid van $[a, b]$ en de continuïteit van γ volgt dat $\gamma([a, b])$ rij-compact is in U. Wegens Lemma 5.17 hieronder volgt het bestaan van een $\varepsilon > 0$ zo dat voor iedere $x \in \gamma([a, b])$ geldt dat $B(x; \varepsilon) \subset U$. Dus voor iedere $t \in [a, b]$ geldt $B(\gamma(t); \varepsilon) \subset U$.

Wederom wegens rij-compactheid en continuïteit volgt dat $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniform continu is. Dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat voor alle $t_1, t_2 \in [a, b]$ geldt: $|t_1 - t_2| < \delta \implies \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| < \varepsilon$. Kies een verdeling $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = b$ van het interval $[a, b]$ zo dat $a_j - a_{j-1} < \delta$ voor alle $1 \leq j \leq N$. Dan geldt voor iedere $1 \leq j \leq N$ en alle $t \in [a_{j-1}, a_j]$ dat $|t - a_j| < \delta$ dus $\gamma(t) \in B(\gamma(a_j); \varepsilon)$. Derhalve $\gamma([a_{j-1}, a_j]) \subset B(\gamma(a_j); \varepsilon) \subset U$. Schrijf $\gamma_j := \gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$, voor $1 \leq j \leq N$. Dan volgt uit het eerste deel van het bewijs dat

$$\int_{\gamma_j}^{*} v(x) \cdot dx = \int_{\gamma_j} v(x) \cdot dx = \int_{a_{j-1}}^{a_j} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Door de som te nemen over $j = 1, \ldots, N$ en herhaald gebruik te maken van Lemma 5.15 vinden we nu dat

$$\int_{\gamma}^{*} v(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{a_{j-1}}^{a_j} v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_{\gamma} v(x) \cdot dx.$$

Hiemee is het bewijs voltooid. $\square$

Lemma 5.17 *Zij (X, d) een metrische ruimte, en $U \subset X$ open. Zij $A \subset U$. Als A rij-compact is, dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat voor alle $a \in A$ geldt dat $B(a; \varepsilon) \subset U$.*

Bewijs We geven een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat zo'n $\varepsilon > 0$ niet bestaat. Dan bestaat er voor iedere gehele $n \geq 1$ een $x_n \in A$ zo dat de bol $B(x_n; \frac{1}{n})$ niet in U ligt, dus een punt $y_n \in X \setminus U$ bevat. We merken op dat $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ voor alle n. Uit de rij-compactheid van A volgt het bestaan van een deelrij x_{n_j} met een in A gelegen limiet x. Dus $x = \lim_{j\to\infty} x_{n_j}$. Uit $d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{1}{n_j}$ volgt

$$d(y_{n_j}, x) \leq d(y_{n_j}, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) \to 0$$

voor $j \to \infty$, dus $y_{n_j} \to x$. Dus x is een limietpunt van de gesloten verzameling $\mathbb{R}^n \setminus U$. We concluderen dat $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$ wat in tegenspraak is met $x \in A \subset U$. $\square$

In de praktijk komt het veel voor dat we de integraal over een zogenaamde stuksgewijze C^1-kromme willen nemen.

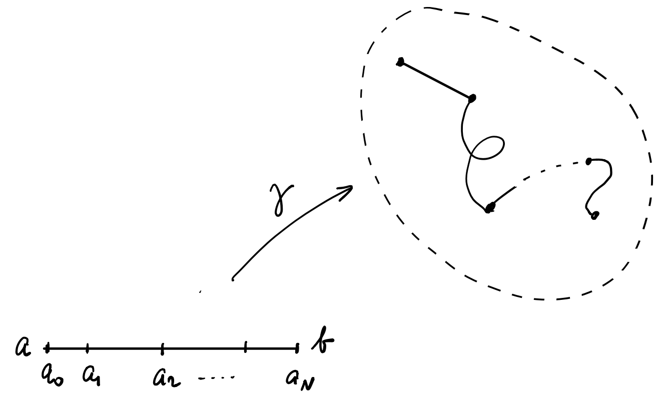
Definitie 5.18 (Stuksgewijze C^1 kromme) Onder een *stuksgewijze C^1 kromme* in U verstaan we een continue kromme $\gamma : [a, b] \to U$ met de eigenschap dat er een verdeling $a = a_0 < \ldots < a_N = b$ van het interval $[a, b]$ bestaat zo dat de beperking $\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$ een C^1-kromme is, voor iedere $1 \leq j \leq N$. $\oslash$

Uit het bovenstaande resultaat gecombineerd met Lemma 5.15 volgt nu gemakkelijk:

Gevolg 5.19 *Laat $\gamma : [a, b] \to U$ een stuksgewijze C^1-kromme zijn, en $a = a_0 < \ldots < a_N = b$ een verdeling van het interval $[a, b]$ als in de bovenstaande definitie. Dan is*

$$\int_{\gamma}^{*} v(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}} v(x) \cdot dx.$$

Wegens de bovenstaande resultaten laten we in het vervolg de ster weg in de notatie van de in Definitie 5.12 gedefinieerde integraal.



Stuksgewijze C^1 kromme

5.3 Inversie en compositie van krommen

In het vervolg is U een open deel, en v een rotatievrij vectorveld op U. Aan Lemma 5.14 zien we dat we iedere kromme $\gamma : [a, b] \to U$ kunnen herparametriseren tot een kromme $[0, 1] \to U$ zonder dat de integraal van v langs de kromme verandert. Dit maakt het zinvol om compositie en inversie op de ruimten van alle krommen $[0, 1] \to U$ te definiëren en de gevolgen voor de integratie van v in kaart te brengen.

Definitie 5.20 (Compositie) Voor een tweetal continue krommen $c_1, c_2 : [0, 1] \to U$ met $c_1(1) = c_2(0)$ dan wordt de *samengestelde kromme* of *compositie* $c_1 \cdot c_2 : [0, 1] \to U$ gedefinieerd door

$$c_1 \cdot c_2(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \text{als} \quad t \in [0, \frac{1}{2}], \\ c_2(2t - 1) & \text{als} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

$\oslash$

Merk op dat de samengestelde kromme weer continu is.

Lemma 5.21 *Zij $v : U \to \mathbb{R}^n$ een rotatievrij vectorveld, en $c_1, c_2 : [0, 1] \to U$ een tweetal continue krommen met $c_1(1) = c_2(0)$. Dan is*

$$\int_{c_1 \cdot c_2} v(x) \cdot dx = \int_{c_1} v(x) \cdot dx + \int_{c_2} v(x) \cdot dx.$$

Bewijs We definiëren $\gamma : [0, 2] \to U$ door $\gamma(t) = c_1 \cdot c_2(t/2)$. Dan is γ een herparametrisering van $c_1 \cdot c_2$, dus voor de bijbehorende integraal geldt:

$$\int_{c_1 \cdot c_2} v(x) \cdot dx = \int_{\gamma} v(x) \cdot dx.$$

Zij $I_1 = [0, 1]$ en $I_2 = [1, 2]$ en schrijf $\gamma_j = \gamma|_{I_j}$, voor $j = 1, 2$. Dan is $\gamma_1 = c_1$ en $\gamma_2(t) = c_2(t - 1)$ voor $t \in [1, 2]$, dus γ_2 is een herparametrisering van c_2, zodat

$$\int_{c_j} v(x) \cdot dx = \int_{\gamma_j} v(x) \cdot dx.$$

Het is dus voldoende aan te tonen dat de integraal van v langs γ gelijk is aan de som van de integralen langs γ_1 en γ_2. Dit laatste is een gevolg van Lemma 5.15. $\square$

Definitie 5.22 (Inverse kromme) Voor een continue kromme $\gamma : [0,1] \to U$ definiëren we de *omgekeerde* of *inverse* kromme $\gamma^\vee : [0,1] \to U$ door $\gamma^\vee(t) = \gamma(1-t)$. $\oslash$

Lemma 5.23 *Is f een primitieve van v langs γ dan is $f^\vee : t \mapsto f(1-t)$ een primitieve van v langs $\gamma^\vee$.*

Bewijs Veronderstel dat f een primitieve van v langs γ is. Zij $t_0 \in [0,1]$. Zij F een primitieve van v in een omgeving B van $\gamma(1-t_0)$. Dan is $F(\gamma(s)) = f(s)$ voor s in een omgeving J van $1-t_0$. De afbeelding $\tau : t \mapsto (1-t)$ is continu $[0,1] \to [0,1]$ dus er is een omgeving $J^\vee$ van t_0 in $[0,1]$ zo dat $\tau(J^\vee) \subset J$. Voor $t \in J^\vee$ geldt $\tau(t) \in J$, dus

$$F(\gamma(1-t)) = F(\gamma(\tau(t))) = f(\tau(t)) = f(1-t).$$

Voor $t \in J^\vee$ geldt dus $F(\gamma^\vee(t)) = f^\vee(t)$. Derhalve is $f^\vee$ een primitieve van v langs $\gamma^\vee$. $\square$

Gevolg 5.24 *Is v een rotatievrij vectorveld op U en $\gamma : [0,1] \to U$ een continue kromme, dan is*

$$\int_{\gamma^\vee} v(x) \cdot dx = -\int_\gamma v(x) \cdot dx.$$

Bewijs Kies een primitieve van v langs c, zeg f. Dan is $f^\vee$ een primitieve van v langs $\gamma^\vee$, dus wegens Definitie 5.12 geldt:

$$\int_c v(x) \cdot dx = f(1) - f(0) = f^\vee(0) - f^\vee(1) = -\int_{c^\vee} f(x) \cdot dx$$

$\square$

5.4 Homotopie-invariantie van lijnintegralen

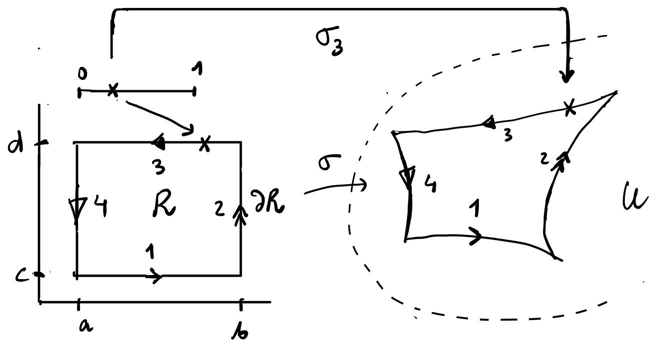
Zij $R = [a,b] \times [c,d]$ een rechthoek in $\mathbb{R}^2$. We noteren de rand van R in $\mathbb{R}^2$ met ∂R. Deze rand bestaat uit vier lijnstukken. Is een continue afbeelding $\sigma : \partial R \to U$ gegeven, dan hanteren we in dit hoofdstuk de volgende notaties voor vier continue krommen die de beelden van de genoemde randlijnstukken parametriseren:

$$\sigma_1 : [0,1] \to U, t \mapsto \sigma(a + t(b-a), c), \quad \sigma_2 : [0,1] \to U, t \mapsto \sigma(b, c + t(d-c)),$$

$$\sigma_3 : [0,1] \to U, s \mapsto \sigma(b + t(a-b), d), \quad \sigma_4 : [0,1] \to U, t \mapsto \sigma(a, d + t(c-d)).$$

Bovendien schrijven we, voor een gegeven rotatievrij vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_\sigma v(x) \cdot dx := \sum_{j=1}^{4} \int_{\sigma_j} v(x) \cdot dx. \tag{5.4}$$



De krommen σ_j

Lemma 5.25 *Zij $\sigma : \partial R \to U$ continu, en v een rotatievrij vectorveld op U. Heeft v een primitieve op U, dan is*

$$\int_\sigma v(x) \cdot dx = 0.$$

Bewijs Zij f een primitieve van v. Dan is voor iedere $1 \leq j \leq 4$ de functie $f \circ \sigma_j$ een primitieve van v langs σ_j. Daarom geldt wegens Definitie 5.12 dat het rechterlid van (5.4) gelijk is aan

$$\sum_{j=1}^{4} [f(\sigma_j(1)) - f(\sigma_j(0))]. \tag{5.5}$$

Uit het feit dat $\sigma_j(1) = \sigma_{j+1}(0)$ voor $j = 1, 2, 3$, terwijl $\sigma_4(1) = \sigma_1(0)$, volgt dat de som in (5.5) gelijk is aan nul. $\square$

Het volgende resultaat zal voor ons van cruciaal belang blijken te zijn.

Propositie 5.26 *Laat $\sigma : \partial R \to U$ continu zijn en v een rotatievrij vectorveld op U. Als σ uitbreidbaar is tot een continue afbeelding $R \to U$ dan is*

$$\int_\sigma v(x) \cdot dx = 0. \tag{5.6}$$

De genoemde continue uitbreidbaarheid betekent dat er een continue $\Gamma : R \to U$ bestaat zo dat $\sigma = \Gamma|_{\partial R}$.

We zullen de bovenstaande propositie bewijzen door een geschikte verdeling van R te gebruiken, en dan te reduceren tot Lemma 5.25.

Het volgende lemma is daarvoor van cruciaal belang. Zij $a = s_0 < s_1 < \ldots s_p = b$ een verdeling van $[a, b]$ en $c = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = d$ een verdeling van $[c, d]$. We noteren

$$R_{jk} = [s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k].$$

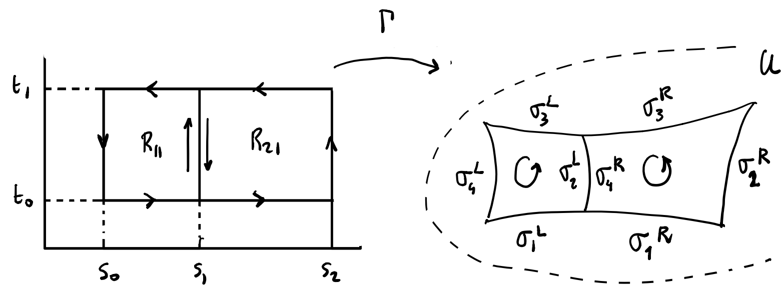
Dan is R de vereniging van de rechthoeken R_{jk}, voor $1 \leq j \leq p$ en $1 \leq k \leq q$.

Lemma 5.27 *Zij $\Gamma : R \to U$ een continue afbeelding, en v een rotatievrij vectorveld op U. Voor elke verdeling van R in deelrechthoeken als boven geldt:*

$$\int_{\Gamma|_{\partial R}} v(x) \cdot dx = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} \int_{\Gamma|_{\partial R_{jk}}} v(x) \cdot dx$$

Bewijs We bewijzen het lemma eerst in de situatie dat het aantal rechthoeken R_{ij} gelijk is aan twee, dus $pq = 2$. Door verwisseling van de rol van de coordinaten kunnen we ons beperken tot het geval dat $p = 2$ en $q = 1$. Dan is $R = R_{11} \cup R_{21}$ waarbij $R_{11} \cap R_{21} = \{s_1\} \times [c, d]$. We schrijven $\sigma = \Gamma|_{\partial R}$ en $\sigma^L = \Gamma|_{\partial R_{11}}$ en $\sigma^R = \Gamma|_{\partial R_{21}}$. Dan volgt, met weglating van de integrand $v(x) \cdot dx$ in de notatie,

$$\int_{\Gamma|_{\partial R_{11}}} = \int_{\sigma^L} = \sum_{j=1}^{4} \int_{\sigma_j^L} \tag{5.7}$$



Bij het bewijs van Lemma 5.27

Anderzijds is

$$\int_{\Gamma|_{\partial R_{21}}} = \int_{\sigma^R} = \sum_{j=1}^{4} \int_{\sigma_j^R} \tag{5.8}$$

Nu is gemakkelijk in te zien dat

$$\sigma_1 = \sigma_1^L \cdot \sigma_1^R, \quad \sigma_3 = \sigma_3^R \cdot \sigma_3^L$$

terwijl

$$\sigma_2 = \sigma_2^R, \quad \sigma_4 = \sigma_4^L$$

Door sommatie van (5.7) en (5.8), krijgen we, rekening houdend met Lemma 5.21, de som

$$\sum_{j=1}^{4} \int_{\sigma_j} + \int_{\sigma_2^L} + \int_{\sigma_4^R}.$$

Omdat $\sigma_4^R = (\sigma_2^L)^\vee$ vallen de laatste twee integralen in deze som tegen elkaar weg wegens Gevolg 5.24. Aldus vinden we:

$$\int_{\Gamma|_{\partial R_{11}}} + \int_{\Gamma|_{\partial R_{21}}} = \sum_{j=1}^{4} \int_{\sigma_j} = \int_{\Gamma|_{\partial R}}.$$

We behandelen nu het algemene geval. Voor $1 \leq k \leq q$ schrijven we $R(k) = [a, b] \times [t_{k-1}, t_k]$. Door herhaald toepassen van het hierboven behandelde speciale geval volgt dat

$$\int_{\Gamma|_{\partial R(k)}} v(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^{p} \int_{\Gamma|_{\partial R_{jk}}} v(x) \cdot dx$$

Door sommatie over k en het weer herhaaldelijk toepassen van het speciale geval $p = 1, q = 2$ vinden we de gewenste identiteit. $\square$

We zijn nu gereed voor het bewijs van Propositie 5.26.

Bewijs van Prop. 5.26 Aangezien $R := [a,b] \times [c,d]$ gesloten en begrensd is in $\mathbb{R}^2$ en dus rij-compact, geldt dat $\Gamma(R)$ een rij-compact deel van U is. Hieruit volgt wegens Lemma 5.17 het bestaan van een $\varepsilon > 0$ zo dat voor iedere $x \in \Gamma(R)$ geldt $B(x;\varepsilon) \subset U$.

Uit de rij-compactheid van R volgt dat de afbeelding Γ uniform continu is op zijn domein R. Er bestaat dus een $\delta > 0$ zo dat voor alle $\xi, \eta \in R$ met $\|\xi - \eta\| < \delta$ geldt dat $\|\Gamma(\xi) - \Gamma(\eta)\| < \varepsilon$. We kiezen nu een verdeling $a = s_0 < s_1 < \dots s_p = b$ en een verdeling $c = t_0 < t_1 < \dots < t_q$ zo dat $s_j - s_{j-1} < \delta/2$ en $t_k - t_{k-1} < \delta/2$ voor alle $1 \leq j \leq p$ en $1 \leq k \leq q$. Zij $R_{jk} := [s_{j-1} \times s_j] \times [t_{k-1}, t_k]$. Dan geldt voor alle $\xi, \eta \in R_{jk}$ dat $\|\xi - \eta\| < \delta$ dus $\|\Gamma(\xi) - \Gamma(\eta)\| < \varepsilon$. Hieruit volgt dat

$$\Gamma(R_{jk}) \subset B(\Gamma(s_j, t_k); \varepsilon) \subset U.$$

Wegens Lemma 5.9 heeft v een primitieve op $B(\Gamma(s_j, t_k); \varepsilon)$. Wegens Lemma 5.25 geldt nu, voor alle $1 \leq j \leq p$ en $1 \leq k \leq q$ dat

$$\int_{\partial\Gamma_{jk}} v(x) \cdot dx = 0.$$

Het gewenste resultaat volgt nu door te sommeren over j en k en gebruik te maken van Lemma 5.27. $\square$

We naderen nu een belangrijk resultaat, namelijk de homotopie-invariantie van lijnintegralen van rotatie-vrije vectorvelden over continue krommen.

Definitie 5.28 (Homotopie van krommen) Laat $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ een tweetal continue krommen zijn. Onder een *homotopie* van γ_0 en γ_1 binnen U, verstaan we een continue afbeelding

$$\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to U$$

zo dat voor alle $s \in [a,b]$ geldt

$$\Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \quad \text{en} \quad \Gamma(s,1) = \gamma_1(s).$$

$\oslash$

In de situatie van de bovenstaande definitie schrijven we ook wel γ_t voor de continue kromme $s \mapsto \Gamma(s,t)$, $[a,b] \to U$. Een homotopie is zo op te vatten als een continue vervorming van de kromme γ_0 naar de kromme γ_1, via de krommen γ_t.

Twee situaties zijn voor ons belangrijk. De eerste situatie is dat de krommen γ_0 en γ_1 gemeenschappelijk begin- en eindpunt hebben. Daarmee bedoelen we dat

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{en} \quad \gamma_0(b) = \gamma_1(b). \tag{5.9}$$

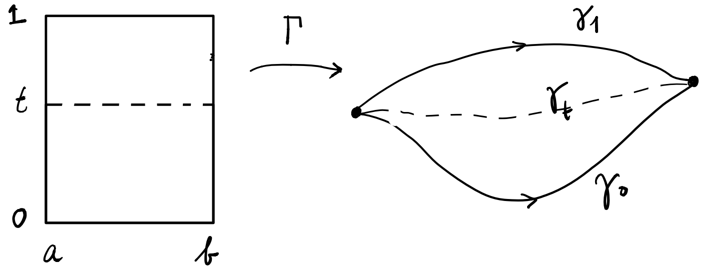
De tweede situatie is dat voor elke $j = 0, 1$ de kromme γ_j gesloten is, dwz begin- en eindpunt vallen samen:

$$\gamma_j(a) = \gamma_j(b).$$

Definitie 5.29 (Homotopie met behoud van eindpunten) Laten $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ krommen zijn met gemeenschappelijk begin- en eindpunt. Zij $\Gamma : [a,b] \times I \to U$ een homotopie van γ_0 en γ_1. We zeggen dat de homotopie Γ begin- en eindpunt behoudt indien voor alle $t \in [0,1]$ geldt:

$$\Gamma(a,t) = \gamma_0(a) \quad en \quad \Gamma(b,t) = \gamma_0(b). \tag{5.10}$$

⊘



Homotopie met behoud van eindpunten

Uiteraard geldt de gelijkheid (5.10) dan ook met γ_1 in plaats van γ_0. De gelijkheid (5.10) betekent precies dat alle krommen γ_t hetzelfde begin- en eindpunt hebben als γ_0 en γ_1.

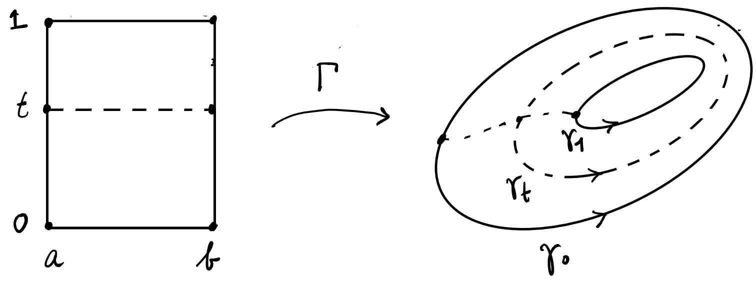
Voor gesloten krommen geldt de volgende definitie.

Definitie 5.30 (Homotopie van gesloten krommen) Laten $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ gesloten krommen zijn. Zij $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to U$ een homotopie van γ_0 en γ_1. We zeggen dat Γ een homotopie van gesloten krommen is indien voor alle $t \in [0,1]$ geldt:

$$\Gamma(a,t) = \Gamma(b,t).$$

⊘

Anders gezegd, ieder van de krommen $\gamma_t = \Gamma(\,\cdot\,, t)$ dient gesloten te zijn.



Homotopie van gesloten krommen

Stelling 5.31 (Homotopie-invariantie) *Laat U een open deel van $\mathbb{R}^n$ zijn en $v : U \to \mathbb{R}^n$ een rotatievrij vectorveld. Laat $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ een tweetal continue krommen in U zijn, en $\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to U$ een homotopie van γ_0 en γ_1. Veronderstel bovendien dat aan een van de twee volgende voorwaarden voldaan is.*

(a) *γ_0 en γ_1 hebben begin- en eindpunt gemeenschappelijk, en Γ behoudt dat begin- en eindpunt;*

(b) *γ_0 en γ_1 zijn beide gesloten, en Γ is een homotopie van gesloten krommen.*

Dan geldt:

$$\int_{\gamma_0} v(x) \cdot dx = \int_{\gamma_1} v(x) \cdot dx. \tag{5.11}$$

Bewijs Zij $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$ een homotopie van γ_0 en γ_1 en schrijf $R = [a, b] \times [0, 1]$. Schrijf verder $\sigma = \Gamma|_{\partial R}$. Dan is σ_1 een herparametrisering van γ_0 en $\sigma_3^\vee$ een herparametrisering van γ_1, dus met Propositie 5.26 en (5.4) vinden we dat

$$0 = \int_{\Gamma|_{\partial R}} = \int_{\gamma_0} + \int_{\sigma_2} - \int_{\gamma_1} + \int_{\sigma_4}; \tag{5.12}$$

wederom hebben we overal de integrand $v(x) \cdot dx$ in de notatie weggelaten. In geval (a) zijn σ_2 en σ_4 constante krommen zodat de corresponderende lijnintegralen nul zijn (ga na). Hieruit volgt (5.11).

We gaan verder met geval (b). In dit geval geldt voor elke $t \in [0, 1]$ dat

$$\sigma_2(t) = \Gamma(b, t) = \Gamma(a, t) = \sigma_4(1 - t),$$

dus de krommen σ_2 en σ_4 zijn elkaars inverse. Hieruit volgt dat de bijbehorende integralen in (5.12) tegen elkaar wegvallen. Ook hieruit volgt (5.11). □

Definitie 5.32 (Samentrekbare kromme) Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ open zijn. Een gesloten kromme $\gamma : [a, b] \to U$ heet *samentrekbaar* in U indien er een homotopie $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$ bestaat zo dat $\Gamma(\,\cdot\,, 0) = \gamma$ en zo dat $\Gamma(\,\cdot\,, 1)$ een constante kromme is. ⊘

Gevolg 5.33 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deel zijn, en $\gamma : [a, b] \to U$ een continue gesloten kromme, die samentrekbaar in U is. Dan geldt voor ieder rotatievrij vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$ dat*

$$\int_{\gamma} v(x) \cdot dx = 0. \tag{5.13}$$

Bewijs Schrijf $\gamma_0 = \gamma$. Er is een constante kromme $\gamma_1 : [a, b] \to U$ en een homotopie $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$ van γ_0 en γ_1 als in Stelling 5.31 (b). Derhalve geldt (5.11). Omdat γ_1 constant is, is het rechterlid van (5.11) gelijk aan nul. Hieruit volgt (5.13). □

5.5 Enkelvoudig samenhangende verzamelingen

In deze paragraaf onderzoeken we voor een open verzameling $U \subset \mathbb{R}^n$ en een rotatievrij vectorveld v op U wat er te zeggen valt over de verzameling van primitieven van v.

Het volgende lemma is een direct gevolg van Gevolg 1.20.

Lemma 5.34 *Laat U boogsamenhangend zijn. Dan geldt voor ieder tweetal primitieven f_1, f_2 van een rotatievrij vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$ dat $f_1 - f_2$ constant is op U. In het bijzonder is er voor iedere $a \in U$ ten hoogste één primitieve f van v met $f(a) = 0$.*

Bewijs De functie $g = f_1 - f_2$ voldoet aan $\mathrm{grad}\, g = 0$ op U, dus $Dg(x) = 0$ voor alle $x \in U$. Hieruit volgt door toepassing van Gevolg 1.20 dat g constant is. Is $g(a) = 0$ dan volgt dat $g = 0$. $\square$

De oplosbaarheid van de vergelijking $\mathrm{grad}\, f = v$ wordt gegarandeerd door de volgende topologische eigenschap van U.

Definitie 5.35 **(Enkelvoudig samenhangend)** Een open verzameling $U \subset \mathbb{R}^n$ heet *enkelvoudig samenhangend* indien de volgende condities gelden:

(a) U is boogsamenhangend,

(b) elke gesloten continue kromme $\gamma : [a,b] \to U$ is samentrekbaar in U.

$\oslash$

Voorbeeld 5.36 Iedere bol $B(0;r)$ in $\mathbb{R}^n$ is enkelvoudig samenhangend. Immers, definieer de afbeelding $G : B(0;r) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ door

$$G(x,t) = (1-t)x.$$

Dan is G continu, terwijl $G(x,0) = x$ voor alle $x \in B(0:r)$ en $G(x,1) = 0$ voor alle $x \in B(0;r)$. Is $\gamma : [a,b] \to B(0;r)$ een gesloten kromme, dan wordt door $\Gamma : (s,t) \mapsto G(\gamma(x),t)$ $[a,b] \times [0,1] \to B(0;r)$ een homotopie van gesloten krommen in $B(0;r)$ gedefinieerd zo dat $\gamma_0 = \gamma$ en $\gamma_1 = 0$. $\oslash$

Voorbeeld 5.37 (Opgave) De verzameling $U = \mathbb{R}^n$ is samentrekbaar. $\oslash$

Stelling 5.38 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een enkelvoudig samenhangende open verzameling zijn, en v een rotatievrij vectorveld op U.*

(a) *Voor iedere gesloten continue kromme $\gamma : [a,b] \to U$ geldt dat*

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

(b) *Voor ieder tweetal krommen $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to U$ waarvan begin- en eindpunt overeenkomen geldt:*

$$\int_{\gamma_1} v(x) \cdot dx = \int_{\gamma_2} v(x) \cdot dx$$

Bewijs Bewering (a) volgt door toepassing van Gevolg 5.33.

Laten $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to U$ continue krommen als in (b) zijn. Dan zijn er herparametriseringen $c_j : [0,1] \to U$ voor γ_j. Het is voldoende aan te tonen dat de integralen van v langs c_1 en c_2 gelijk zijn. Het eindpunt van c_1 komt overeen met het beginpunt van de inverse $c_2^\vee$. De samenstelling $c_1 \cdot c_2^\vee$ heeft beginpunt $c_1(0)$ en eindpunt $c_2^\vee(1) = c_2(0) = c_1(0)$, en is dus gesloten. Met (a), Lemma 5.21 en Gevolg 5.24 volgt hieruit dat

$$0 = \int_{c_1 c_2^\vee} v(x) \cdot dx = \int_{c_1} v(x) \cdot dx - \int_{c_2} v(x) \cdot dx.$$

$\square$

Stelling 5.39 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een enkelvoudig samenhangende open verzameling zijn, en $a \in U$. Laat v een rotatievrij vectorveld op U zijn. Dan is er een unieke potentiaal f op U met $f(a) = 0$.*

Bewijs De uniciteit van f volgt uit Lemma 5.34. We richten ons op het bestaan.

Zij $x \in U$. Dan is er een continue kromme $\gamma_x : [0,1] \to U$ die a en x verbindt. De integraal van v langs γ_x is onafhankelijk van de keuze van γ_x. We definiëren nu de functie $f : U \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \int_{\gamma_x} v(\xi) \cdot d\xi,$$

met $\gamma_x : [0,1] \to U$ een willekeurige continue kromme met beginpunt a en eindpunt x. Door voor γ_a de constante kromme $\gamma_a : t \mapsto a$ te nemen zien we dat $f(a) = 0$.

We zullen aantonen dat f een primitieve is van v. Zij daartoe $b \in U$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat $B := B(b;\delta) \subset U$. Het vectorveld v heeft een primitieve F op B. Is $x \in B$ en $c_x : [0,1] \to B$ een continue kromme in B van b naar x, dan is $F \circ c_x$ een primitieve van v langs γ_x, zodat volgens Definitie 5.12 geldt

$$\int_{c_x} v(\xi) \cdot \xi = F(c_x(1)) - F(c_x(0)) = F(x) - F(b).$$

Anderzijds is de compositie $\gamma_b \cdot c_x$ een continue kromme van a naar x dus

$$f(x) = \int_{\gamma_b \cdot c_x} v(\xi) \cdot d\xi = \int_{\gamma_b} v(\xi) \cdot d\xi + \int_{c_x} v(\xi) \cdot d\xi = f(b) + F(x) - F(b).$$

Hieruit volgt dat $f - F$ constant is op B, dus $f|_B$ is een primitieve van v rond het punt b. Aangezien b willekeurig is, zien we dat f een primitieve van v is op U. □

Voorbeeld 5.40 We beschouwen de open deelverzameling $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}^2$. Dan is $v : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)^{-1}(-y,x)$ een C^1 vectorveld op U. Uit een directe berekening volgt

$$\frac{\partial}{\partial y} v_1(x) = -\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Op soortgelijke wijze blijkt

$$\frac{\partial}{\partial x} v_2(x) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

We concluderen dat v rotatievrij is.

We beschouwen nu de gesloten kromme $\gamma : [0,2\pi] \to U$ gedefinieerd door

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Het beeld van deze kromme is de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$. De kromme γ is C^1 met afgeleide $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$. Nu is

$$v(\gamma(t)) = (-\sin t, \cos t),$$

dus

$$v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

en we concluderen dat

$$\int_\gamma v(\xi) \cdot d\xi = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

Uit het niet-nul zijn van de integraal volgt wegens Stelling 5.38 dat γ niet samentrekbaar is binnen U, dus U is niet enkelvoudig samenhangend. $\oslash$

Voorbeeld 5.41 Men kan, met flink wat moeite, laten zien dat $U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ enkelvoudig samenhangend is voor $n \geq 3$. Veronderstel dat dit het geval is en beschouw het vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$ gedefineerd door

$$v(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}.$$

Dit vectorveld voldoet aan $\|v(x)\| = \|x\|^{-2}$ en is voor $n = 3$ bekend uit de zwaartekrachttheorie van Newton. Er geldt voor $i \neq j$ dat

$$\begin{aligned} D_i v_j(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j(\|x\|^2)^{-3/2} \\ &= -\frac{3}{2}x_j(\|x\|)^{-5/2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|^2) \\ &= -3x_j x_i \|x\|^{-5}. \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat v rotatievrij is op U. Met Stelling 5.39 volgt dat v een potentiaal $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heeft. $\oslash$

Opmerking 5.42 (Opgave) Zij $f : U := \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ de unieke potentiaal van het vectorveld $v : U \to \mathbb{R}^n$ uit Voorbeeld 5.41, die voldoet aan $f(e_1) = 0$. Zij S de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^n$.

(a) Toon aan dat $f(re_1) = \frac{1}{r} - 1$, voor alle $r > 0$.

(b) Toon aan dat voor iedere orthogonale lineaire transformatie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en iedere C^1-kromme $\gamma : [0, 1] \to U$ geldt

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \int_{A \circ \gamma} v(x) \cdot dx.$$

(b) Toon aan dat voor ieder tweetal vectoren $y, z \in S$ met $y, z \perp e_1$ een orthogonale transformatie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestaat met $Ae_1 = e_1$ en $Ay = z$.

(c) Toon aan dat voor alle $y, z \in S \cap e_1^\perp$ geldt $f(y) = f(z)$.

(d) Toon aan dat voor alle $x \in S$ geldt dat $f(x) = 1$.

(e) Toon aan dat $f(x) = \|x\|^{-1} - 1$ voor $x \in U$.

(f) Toon op twee manieren aan dat door $g : x \mapsto \|x\|^{-1}, U \to \mathbb{R}$ een potentiaal van v gedefinieerd wordt: (1) door (e) te gebruiken, (2) door een directe berekening.

$\oslash$

6 Reeksen en oneigenlijke integralen

6.1 Reeksen in $\mathbb{C}$

In deze paragraaf behandelen we de basis van de theorie van de complexe reeksen. Daarbij zullen thema's een rol spelen, die verderop in gecompliceerdere vorm terugkomen in de theorie van de oneigenlijke integralen. Op de theorie in deze paragraaf zal later voortgebouwd worden in de cursus 'Functies en Reeksen'.

Ons standpunt zal zijn dat het lichaam $\mathbb{C}$ hetzelfde is als $\mathbb{R}^2$ voorzien van de complexe vermenigvuldiging. Hierbij is $x + iy$ een notatie voor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die er toe dient om aan te geven dat we (x, y) willen zien als complex getal. In deze notatie wordt de complexe vermenigvuldiging gegeven door:

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

voor $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Deze formule volgt uit de gebruikelijke rekenregels voor optelling en vermenigvuldiging, aangevuld met de regel dat $i \cdot i = -1$. We kunnen deze rekenregel ook in de $\mathbb{R}^2$-notatie invoeren door

$$(x, y)(u, v) = ((xu - yv), (xv + yu)). \tag{6.1}$$

Het is gemakkelijk in te zien dat deze vermenigvuldiging commutatief is. Als we vervolgens afspreken dat we $\mathbb{R}$ zien als deel van $\mathbb{R}^2$ via de injectieve reëel lineaire afbeelding $x \mapsto (x, 0)$ en dat i een notatie is voor $(0, 1)$, dan krijgen we bekende complexe notatie terug uit

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + yi.$$

Het gemak van deze identificaties is dat we gegeven definities voor $\mathbb{R}^2$ direct kunnen vertalen naar $\mathbb{C}$. In het bijzonder komt de modulus $|\cdot|$ op $\mathbb{C}$ overeen met de norm $\|\cdot\|$ op $\mathbb{R}^2$. Immers

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|.$$

De Euclidische metriek op $\mathbb{R}^2$ wordt in de complexe notatie beschreven door

$$d(z, w) := |z - w|, \qquad (z, w \in \mathbb{C}).$$

Op deze manier wordt het limietbegrip zinvol voor rijen in $\mathbb{C}$. De te verwachten bijbehorende rekenregels volgen gemakkelijk uit de overeenkomstige rekenregels voor rijen in $\mathbb{R}^2$.

Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. We gebruiken de notatie $\sum_{k\geq 0} a_k$ om aan te geven dat we de intentie hebben om de elementen a_k van de gegeven rij te sommeren. Voor $n \geq 0$ definiëren we de n-de partiële som van de reeks door

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{6.2}$$

Opmerking 6.1 Merk op dat de *reeks* $\sum_{k\geq 0} a_k$ iets anders is dan de *rij* $(a_k)_{k\geq 0}$. Als we de reeks als formeel wiskundige object willen introduceren, dan kunnen we dit beter doen door de reeks te definiëren als de rij $(A_n)_{n\geq 0}$ van partiële sommen. $\oslash$

Definitie 6.2 Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. De *reeks* $\sum_{k\geq 0} a_k$ heet *convergent* indien de n-de partiële sommen A_n, gedefinieerd door (6.2), een convergente rij in $\mathbb{C}$ vormen. In dat geval schrijven we

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Dit getal heet de *som van de reeks*. $\oslash$

Opmerking 6.3 Voor een gegeven geheel getal $p \geq 1$ kan men ook een rij $(a_k)_{k \geq p}$ beschouwen en de bijbhorende reeks $\sum_{k \geq p} a_k$. Dit is terug te voeren op het bovenstaande door de reeks $\sum_{k \geq 0} a_{p+k}$ te beschouwen. Aldus zien we dat convergentie van de reeks equivalent is met convergentie van de rij $(A_n)_{n \geq p}$ van partiële sommen, gedefinieerd door $A_n := \sum_{k=p}^{n} a_k$. In geval van convergentie schrijven we dan

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k := \lim_{n \to \infty} A_n.$$

$\oslash$

Lemma 6.4 *Laat $a_k \geq 0$, voor $k \in \mathbb{N}$. De reeks $\sum_{k \geq 0} a_k$ is convergent dan en slechts dan als de bijbehorende rij (A_n) van partiële sommen naar boven begrensd is. In geval van convergentie is*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sup\{A_n \mid n \geq 0\}. \tag{6.3}$$

Bewijs De partiële sommen zijn reëel en voldoen aan

$$A_{n+1} = A_n + a_n \geq A_n.$$

De rij van partiële sommen is dus monotoon stijgend. In de cursus ‘Inleiding Analyse’ hebben we gezien dat een dergelijke rij convergent is dan en slechts dan als hij naar boven begrensd is. Bovendien geldt in geval van convergentie dat

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \sup\{A_n \mid n \geq 0\}.$$

Hieruit volgt (6.3). $\square$

Lemma 6.5 *Laat $a_k \in \mathbb{C}$, voor $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt:*

$$\sum_{k \geq 0} a_k \ \text{ convergent } \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{6.4}$$

Bewijs Schrijf $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Dan heeft de complexe rij $(A_n)_{n \geq 0}$ een limiet die we noteren met A. Dus $\lim_{n \to \infty} A_n = A$. Hieruit volgt dat ook $\lim_{n \to \infty} A_{n-1} = A$. Anderzijds geldt $a_n = A_n - A_{n-1}$. Met de somregel voor limieten leiden we nu af dat

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0.$$

$\square$

Opmerking 6.6 (Waarschuwing) Het omgekeerde van de bewering (6.4) is in het algemeen niet waar. Dit blijkt bijvoorbeeld uit het volgende lemma. $\oslash$

Lemma 6.7 *De* harmonische *reeks* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ *is divergent.*

Bewijs We beschouwen de rij A_n van partiële sommen en merken op dat voor $m \geq 1$ geldt:

$$\begin{aligned} A_{2^m} &= A_{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}} \\ &\geq A_{2^{m-1}} + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = A_{2^{m-1}} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Met inductie volgt hieruit dat

$$A_{2^m} \geq \frac{m+1}{2}, \qquad (m \geq 0).$$

De rij (A_n) is in $\mathbb{R}$ niet naar boven begrensd, en daarom niet convergent. We concluderen dat de harmonische reeks divergent is. $\square$

Algemener geldt het volgende resultaat. Voor $s = 1$ geeft dit een ander bewijs van het bovenstaande lemma.

Lemma 6.8 *Zij* $s \in \mathbb{R}$. *De reeks*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s} \tag{6.5}$$

is convergent dan en slechts dan als $s > 1$.

Bewijs Als $s \leq 0$, dan geldt niet dat $1/k^s \to 0$ voor $k \to \infty$. Wegens Lemma 6.5 is de reeks dan niet convergent. We mogen ons daarom beperken tot het geval dat $s > 0$. In dit geval is de functie $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x^s$ continu, monotoon dalend en niet-negatief op $[1, \infty]$. Wegens het onderstaande lemma is de reeks (6.8) convergent dan en slechts dan als de integraal $I_n := \int_1^{n+1} f(x)\, dx$ een limiet heeft voor $n \to \infty$.

Met de fundamentaalstelling voor de integraalrekening zien we dat

$$I_n = \left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s}.$$

Hieruit blijkt dat de rij (I_n) divergent is voor $s < 1$ terwijl voor $s > 1$ geldt $I_n \to 1/(s-1)$, $(n \to \infty)$. Voor $s = 1$ geldt

$$I_n = \log(n+1) \to \infty, \;\; (n \to \infty),$$

dus in dit geval is de rij (I_n) divergent. $\square$

Lemma 6.9 (Vergelijking reeks en integraal) *Zij* $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ *een monotoon dalende functie zo dat voor iedere* $N \in \mathbb{N}$ *de functie* f *Riemann-integreerbaar is over* $[1, N]$. *Schrijf*

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad I_n := \int_1^{n+1} f(x)\, dx \quad \text{en} \quad R_n = A_n - I_n.$$

De rij $(R_n)_{n\geq 1}$ *is convergent met een in* $[0, f(1)]$ *gelegen limiet. In het bijzonder is de rij* $(A_n)_{\geq 1}$ *convergent dan en slechts dan als de rij* $(I_n)_{n\geq 1}$ *dat is.*

Bewijs Zij V_n de verdeling van het interval $[1, n+1]$ in stukken van lengte 1. Dan wordt de bovensom van de integraal van f over $[1, n+1]$ ten aanzien van deze verdeling gegeven door

$$\overline{S}(f, V_n) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k-1) = A_n,$$

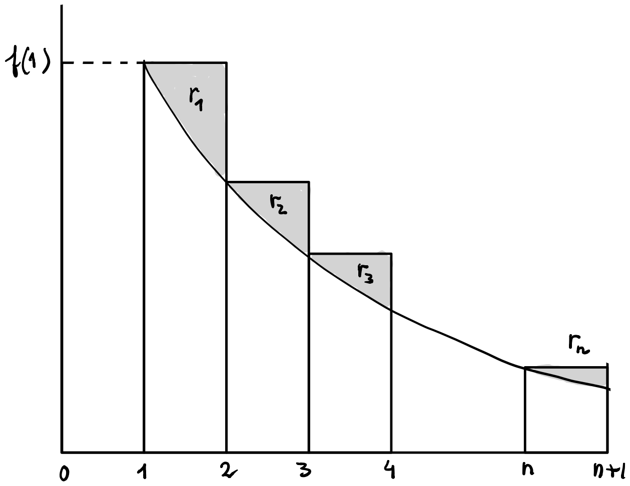
Hierdoor gemotiveerd vinden we

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\, dx \right] = \sum_{k=1}^{n} r_k$$

waarin

$$r_k = \int_k^{k+1} [f(k) - f(x)]\, dx,$$

zie figuur.



$R_n = \sum_{k=1}^{n} r_k$

Uit de monotonie van f volgt dat

$$0 \leq r_k \leq f(k) - f(k+1), \qquad (k \geq 1).$$

Hieruit volgt dat de rij (R_n) monotoon stijgend is. Door sommatie over k volgt dat $0 \leq R_n \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1)$. De rij (R_n) is daarom convergent met een in $[0, f(1)]$ gelegen limiet, die we noteren met R. Is de rij (I_n) convergent met limiet I dan volgt met de somregel voor limieten dat de rij (A_n) convergent is met limiet $R + I$. Is de rij (A_n) convergent met limiet A, dan volgt wederom met de somregel dat de rij (I_n) convergent is met limiet $A - R$. $\square$

Voorbeeld 6.10 (Opgave) Laat zien dat de limiet

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

bestaat, en een positief geheel getal $\gamma > 0$ definieert. Het is niet bekend of deze constante van Euler–Mascheroni irrationaal is. $\oslash$

Opmerking 6.11 (Opgave: rekenregels) Laat $\sum_{k\geq 0} a_k$ en $\sum_{k\geq 0} b_k$ een tweetal convergente complexe reeksen zijn. Dan is ook de reeks $\sum_k (a_k + b_k)$ convergent, terwijl

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Zij $\lambda \in \mathbb{C}$. Dan is ook de reeks $\sum_{k\geq 0} \lambda a_k$ convergent, en er geldt:

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k$$

$\oslash$

Ter voorbereiding op de theorie van de reeksen geven we nog het volgende resultaat.

Lemma 6.12 *Zij (a_k) een rij complexe getallen zo dat de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ convergent is. Dan is voor iedere $n \in \mathbb{N}$ de reeks $\sum_{k\geq n} a_k$ convergent. Bovendien geldt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0.$$

Bewijs Voor alle $m \geq n$ geldt $\sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{m} a_k$. Door de limiet voor $m \to \infty$ te nemen blijkt hieruit dat de genoemde reeks $\sum_{k\geq n} a_k$ convergent is, terwijl

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Door de limiet voor $n \to \infty$ te nemen leiden we hieruit met de somregel voor limieten af dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = 0.$$

$\square$

Voorbeeld 6.13 (Meetkundige reeks) Zij $z \in \mathbb{C}$. De reeks

$$\sum_{k\geq 0} z^k \tag{6.6}$$

staat bekend als de *meetkundige reeks* met *reden* z. Hierbij dient z^0 gelezen te worden als 1, ook als $z = 0$.

Zij $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$ de n-de partiële som van de reeks. Dan geldt:

$$zS_n - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^k = z^{n+1} - 1,$$

dus als $z \neq 1$, dan is

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Als $z = 1$ dan is $S_n = n + 1$. $\oslash$

Lemma 6.14 *Zij $z \in \mathbb{C}$. De meetkundige reeks (6.6) convergeert dan en slechts dan als $|z| < 1$. Voor $|z| < 1$ geldt dat*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Bewijs Voor $|z| \geq 1$ geldt $|z^k| \geq 1$, dus niet $\lim_{k\to\infty} z^k = 0$. Hieruit volgt wegens Lemma 6.5 dat de meetkundige reeks divergeert.

Veronderstel nu dat $|z| < 1$. Dan geldt dat $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$ voor $n \to \infty$, dus

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1 - \lim z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Hieruit volgt het gestelde. □

Definitie 6.15 (Absolute convergentie) Een complexe reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ heet *absoluut convergent* indien de reeks $\sum_{k\geq 0} |a_k|$ convergent is. ⊘

Lemma 6.16 *Laat $(a_k)_{k\geq 0}$ een rij complexe getallen zijn. Indien de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ absoluut convergent is, dan is hij ook convergent, en er geldt:*

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \tag{6.7}$$

Bewijs Uit de absolute convergentie volgt dat de rij $B_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ convergent is, dus Cauchy. Zij $\varepsilon > 0$ dan bestaat er een N zo dat voor alle $q \geq p \geq N$ geldt $|B_p - B_q| < \varepsilon$. Zij A_n de n-de partiële som van de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$. Dan geldt voor alle $q \geq p \geq N$ dat

$$|A_q - A_p| = |\sum_{k=p+1}^{q} a_k| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| = |B_q - B_p| < \varepsilon.$$

Dus (A_n) is een Cauchy-rij, en aangezien $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ volledig is, concluderen we dat deze rij van partiële sommen convergeert. De reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ convergeert dus.

Voor alle $n \geq 0$ geldt dat

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Nemen we de limiet voor $n \to \infty$, dan concluderen we dat (6.7) geldt. □

Om voor de hand liggende redenen vatten we de uitspraak dat de reeks $\sum_{k\geq 0} a_k$ absoluut convergeert soms ook samen in de formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Opmerking 6.17 (Opgave) Is $\sum_{k\geq 0} a_k$ een absoluut convergente complexe reeks, dan zijn ook beide reeksen

$$\sum_{j\geq 0} a_{2j} \quad \text{en} \quad \sum_{j\geq 0} a_{2j+1}$$

absoluut convergent, terwijl

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}$$

$\oslash$

Het volgende resultaat wordt zeer vaak gebruikt om de convergentie van reeksen aan te tonen.

Stelling 6.18 (Majorantiekenmerk voor convergentie) *Laat (a_k) een complexe rij zijn, en (t_k) een reële rij, terwijl er een $C > 0$ bestaat zo dat*

$$|a_k| \leq C t_k \qquad (\forall k \geq 0).$$

Indien $\sum_k t_k$ convergeert, dan convergeert de reeks $\sum_k a_k$ absoluut, en er geldt dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} t_k. \tag{6.8}$$

Bewijs We noteren de n-de partiële som van de reeks $\sum_{k\geq 0} t_k$ met T_n, en die van $\sum_{k\geq 0} |a_k|$ met B_n. Uit het gegeven volgt dat $B_n \leq CT_n$ voor alle n. Veronderstel dat de reeks $\sum_k t_k$ convergent is, dan is de rij (T_n) convergent, dus begrensd. Er is dus een $M > 0$ zo dat $T_n \leq M$. De rij (B_n) is dus begrensd door CM. Uit

$$B_{n+1} = B_n + |a_{n+1}| \geq B_n$$

volgt dat de rij (B_n) monotoon stijgend en naar boven begrensd is, dus convergent. We concluderen dat de reeks $\sum_k |a_k|$ convergent is. Voor alle $n \geq 0$ geldt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq C \sum_{k=0}^{n} t_k.$$

De ongelijkheid (6.8) volgt hieruit door limietovergang voor $n \to \infty$. $\square$

Door het majorantie criterium te combineren met kennis over de meetkundige reeks leiden we het volgende af.

Lemma 6.19 (Quotiëntkenmerk) *Zij (a_n) een rij in $\mathbb{C}$ zo dat*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L$$

(in het bijzonder veronderstellen we het bestaan van de limiet).

Als $|L| < 1$, dan is de reeks

$$\sum_{k\geq 0} a_k \tag{6.9}$$

absoluut convergent. Als $|L| > 1$, dan is de reeks divergent.

Bewijs Veronderstel eerst dat $L < 1$. Kies $\varepsilon > 0$ zo dat $L + \varepsilon < 1$. Dan is er een N zo dat voor $k \geq N$ geldt dat

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq L + \varepsilon.$$

Voor $k \geq N$ geldt daarom

$$|a_k| \leq (L+\varepsilon)^{k-N}|a_N| \leq C(L+\varepsilon)^k$$

waarbij $C = (L+\varepsilon)^{-N}|a_N|$. Aangezien de meetkundige reeks $\sum_k (L+\varepsilon)^k$ convergent is (Lemma 6.14) volgt nu met Stelling 6.18 dat de reeks (6.9) absoluut convergeert. □

Voorbeeld 6.20 Als in de setting van het bovenstaande lemma geldt dat $L = 1$, dan kan de reeks zowel convergeren als divergeren. Nemen we $a_k = k^{-s}$, met $s > 0$, dan geldt dat $L = 1$, terwijl de reeks

$$\sum_{k \geq 1} a_k$$

volgens Lemma 6.8 convergeert voor $s > 1$ en divergeert voor $s \leq 1$. ⊘

Voorbeeld 6.21 (Complexe e-macht) We beschouwen, voor $z \in \mathbb{C}$, de reeks

$$\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}.$$

Schrijven we $a_k = z^k/k!$ dan zien we dat

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|z|}{k+1} \to L = 0$$

voor $k \to \infty$. Hieruit volgt dat de reeks convergeert, voor elke $z \in \mathbb{C}$. We definiëren de complexe e-macht door

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{6.10}$$

Wegens een eerder in de cursus 'Inleiding Analyse' gegeven toepassing van de stelling van Taylor met rest komt deze e-macht voor reële z overeen met de bekende reële e-macht.

Door $z = iy$ met $y \in \mathbb{R}$ in te vullen in (6.10) en de reeks te splitsen als in Opmerking 6.17 vinden we dat

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{k \geq 0} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k \geq 0} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de bekende formule

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

⊘

6.2 Convergentie van integralen

In deze paragraaf zullen we het begrip *oneigenlijke integraal* invoeren. Daarna zullen we oneigenlijke integralen met een parameter beschouwen, zodat we in het bijzonder het gedrag van de integraal voor de Gamma-functie zullen kunnen analyseren, zie Voorbeeld 3.13.

Het begrip oneigenlijke Riemann-integraal is een verruiming van het begrip Riemann-integraal van gesloten en begrensde intervallen naar willekeurige intervallen.

Voorbeeld 6.22 Als eerste motiverende voorbeeld beschouwen we de integraal

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx.$$

De functie $f : [0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x}$ is continu, en dus Riemann-integreerbaar over ieder gesloten en begrensd interval van de vorm $[0,\beta]$, met $0 \leq \beta < \infty$. Met de hoofdstelling van de integraalrekening vinden we

$$\int_0^\beta e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_0^\beta = 1 - e^{-\beta}.$$

Hieraan zien we dat

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta e^{-x}\, dx = 1.$$

We zeggen ook wel dat $x \mapsto e^{-x}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $[0,\infty[$, met als oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

$\oslash$

Voorbeeld 6.23 Als tweede motiverend voorbeeld beschouwen we de functie $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Deze functie is niet begrensd op $]0,1]$, dus kan niet opgevat worden als Riemann-integreerbare functie op $[0,1]$ (door hem een willekeurige waarde in 0 toe te kennen). Hij is continu, dus Riemann-integreerbaar op $[\alpha,1]$ voor iedere $\alpha \in]0,1]$. Bovendien volgt met de hoofdstelling van de integraalrekening dat

$$\int_\alpha^1 f(x)\, dx = [2\sqrt{x}]_\alpha^1 = 2 - 2\sqrt{\alpha}.$$

Hieruit volgt dat

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \int_\alpha^1 f(x)\, dx = 2.$$

In dit geval zeggen we dat $f : x \mapsto 1/\sqrt{x}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $]0,1]$, en we schrijven

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 2.$$

$\oslash$

Voorbeeld 6.24 We beschouwen de functie $f : I =]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1}{e^x \sqrt{x}}, \qquad (0 < x < 1).$$

In dit geval is f continu, dus Riemann-integreerbaar over ieder segment $[\alpha, \beta] \subset]0, \infty[$. Het ligt voor de hand te zeggen dat f oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $]0, \infty[$ indien de integraal

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

een limiet heeft voor $\alpha \downarrow 0$ en $\beta \to \infty$. Daarmee bedoelen we dat er een $S \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor iedere $\varepsilon < 0$ elementen $\alpha_0, \beta_0 \in I$ bestaan zo dat voor alle $\alpha, \beta \in I$ geldt

$$\alpha \leq \alpha_0, \beta \geq \beta_0 \implies \left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - S \right| < \varepsilon.$$

Verderop zullen we zien dat zo'n S in dit geval bestaat en uniek is, en dan schrijven we

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x \sqrt{x}}\, dx = S.$$

$\oslash$

Geïnspireerd door de bovenstaande Voorbeelden 6.22, 6.23 en 6.24 zullen we een definitie opstellen van oneigenlijke integreerbaarheid voor een functie f met als domein een niet-leeg interval $I \subset \mathbb{R}$. Om dit in algemeenheid te kunnen doen gebruiken we de bekende karakterisering van een interval uit de cursus 'Inleiding Analyse'.

Karakterisering interval. Een interval is een deelverzameling I van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor alle $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ geldt $[\alpha, \beta] \subset I$.

De nu volgende definitie dient ertoe het bestaan van de Riemann-integraal van een functie $I \to \mathbb{R}$ over een deelsegment van I te garanderen.

Definitie 6.25 (Lokaal Riemann-integreerbaar) Laat $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval zijn. Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet *lokaal Riemann-integreerbaar* indien voor alle $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ geldt dat de beperking $f|_{[\alpha,\beta]}$ Riemann-integreerbaar is over $[\alpha, \beta]$. $\oslash$

Opmerking 6.26 We merken op dat een continue functie $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar is. $\oslash$

De setting van Definitie 6.25 garandeert het bestaan van de Riemann integraal $\int_a^\beta f(x)\, dx$, voor iedere $\beta \geq a$. Hiermee wordt de volgende definitie zinvol.

Definitie 6.27 Laat $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval zijn en veronderstel dat $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar is. Laat $S \in \mathbb{R}$; dan betekent

$$\lim_{[\alpha,\beta] \nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = S \tag{6.11}$$

dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ bestaat met de volgende eigenschap. Voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ met $\alpha < \beta$ geldt

$$I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - S \right| < \varepsilon. \tag{6.12}$$

$\oslash$

De hierboven geïntroduceerde limiet is uniek bepaald.

Lemma 6.28 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar zijn en veronderstel dat $S, S' \in \mathbb{R}$ en*

$$\lim_{[\alpha,\beta]\nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = S \quad \text{en} \quad \lim_{[\alpha,\beta]\nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = S'.$$

Dan is $S = S'$.

Bewijs Kies I_0 en I_0' als in (6.11) voor respectievelijk S en S'. Zij $[\alpha, \beta] \subset I$ een gesloten en begrensd interval dat zowel I_0 als I_0' bevat. Dan volgt dat

$$|S - S'| \leq \left| S - \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \right| + \left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - S' \right| < 2\varepsilon.$$

Dit geldt voor elke $\varepsilon > 0$, dus $S = S'$. $\square$

Definitie 6.29 (Oneigenlijk Riemann-integreerbaar) Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval. Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet *oneigenlijk Riemann-integreerbaar* over I indien het volgende geldt

(a) De functie f is lokaal Riemann-integreerbaar.

(b) Er bestaat een (noodzakelijkerwijs uniek) getal $S \in \mathbb{R}$ zo dat (6.11) geldt.

Is $f : I \to \mathbb{R}$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar, dan noemen we het unieke getal S uit (b) de *oneigenlijke Riemann-integraal* van f over I, notatie

$$\int_I f(x)\, dx := S = \lim_{[\alpha,\beta]\nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

$\oslash$

Opmerking 6.30 Is $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar, dan zeggen we in plaats van 'f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I' ook wel dat de integraal $\int_I f(x)\, dx$ *convergeert.* Is f niet oneigenlijk Riemann-integreerbaar, dan zeggen we ook wel dat de integraal *divergeert.* $\oslash$

De oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid is voor een niet-negatieve functie te karakteriseren op een manier die sterke overeenkomst vertoont met Lemma 6.4

Lemma 6.31 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval, en $f : I \to \mathbb{R}$ een lokaal Riemann-integreerbare functie met $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I.*

(b) *Er is een $M > 0$ zo dat voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ met $\alpha < \beta$ geldt*

$$[\alpha, \beta] \subset I \implies \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq M.$$

Is aan (a) en (b) voldaan, dan is

$$\int_I f(x)\, dx = \sup_{[\alpha,\beta]\subset I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

Bewijs We beginnen met de opmerking dat voor ieder tweetal segmenten $I_1 = [\alpha_1, \alpha_1] \subset I$ en $I_2 = [\alpha_2, \beta_2] \subset I$ met $I_1 \subset I_2$ geldt dat

$$\int_{I_2} f(x)\, dx = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} f(x)\, dx + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x)\, dx + \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\, dx \geq \int_{I_1} f(x)\, dx.$$

Veronderstel nu eerst dat (a) geldt, en laat $S := \int_I f(x)\, dx$.

Dan is er een segment $I_0 \subset I$ zo dat voor $a < b$ met $I_0 \subset [a, b] \subset I$ geldt $|\int_a^b f(x)\, dx - S| < 1$. Uit dit laatste volgt

$$\int_a^b f(x)\, dx < S + 1. \tag{6.13}$$

Zij nu $\alpha < \beta$ zo dat $[\alpha, \beta] \subset I$. Zij $a = \min(I_0 \cup \{\alpha\})$ en $b = \max(I_0, \{\beta\})$. Dan geldt $I_0 \subset [a, b] \subset I$, dus (6.13). Uit $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ volgt wegens het eerste deel van het bewijs dat

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx < S + 1.$$

Dus (b) geldt met $M = S + 1$.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt. Dan is de collectie

$$V := \left\{ \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \mid \alpha < \beta, [\alpha, \beta] \subset I \right\}$$

een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ die naar boven begrensd is door M. Derhalve heeft V een kleinste bovengrens

$$S = \sup V.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $S - \varepsilon$ geen bovengrens van V dus er is een segment $I_0 \subset I$ zo dat $\int_{I_0} f(x)\, dx > S - \varepsilon$. Zij $\alpha < \beta$ zo dat $I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I$, dan volgt wegens het eerste deel van het bewijs dat

$$S - \varepsilon < \int_{I_0} f(x)\, dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq S.$$

Hieruit volgt (a), terwijl

$$\int_I f(x)\, dx = S = \sup_{[\alpha,\beta]\subset I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

$\square$

Voorbeeld 6.32 We beschouwen nogmaals de functie $f : I =]0, \infty[\to \mathbb{R}$ uit Voorbeeld 6.24 gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{e^x \sqrt{x}}.$$

Deze functie is continu, dus lokaal Riemann-integreerbaar op I, terwijl $f(x) > 0$ voor alle $x \in I$. Voor $0 < x \leq 1$ geldt $f(x) \leq e/\sqrt{x}$, dus voor $0 < \alpha \leq 1$ geldt:

$$\int_\alpha^1 f(x)\, dx \leq e \int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = e(2 - 2\sqrt{\alpha}) < 2e.$$

Voor $x \geq 1$ geldt $f(x) \leq e^{-x}$, dus voor $1 \leq \beta < \infty$ geldt:

$$\int_1^\beta f(x)\, dx \leq \int_1^\beta e^{-x}\, dx = 1 - e^{-\beta} < 1.$$

Hieruit leiden we gemakkelijk af dat voor alle $0 < \alpha < \beta < \infty$ geldt dat

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq 2e + 1.$$

Wegens het bovenstaande lemma is f daarom oneigenlijk Riemann-integreerbaar op I. $\oslash$

Uit het volgende resultaat blijkt dat oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid voor gesloten en begrensde intervallen samenvalt met Riemann-integreerbaarheid.

Lemma 6.33 *Zij $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval, met $a < b$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is Riemann-integreerbaar op I.*

(b) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar op I.*

Is aan (een van de) eisen (a) en (b) voldaan, dan is

$$\int_I f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{6.14}$$

Bewijs Uit (b) volgt per definitie dat f lokaal Riemann-integreerbaar is op $[a, b]$, dus Riemann-integreerbaar op $[a, b]$.

Veronderstel dat (a) geldt. Dan is f ook lokaal Riemann-integreerbaar. Kies $I_0 = [a, b]$, dan geldt voor alle $\alpha < \beta$ met $I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I$ dat $I_0 = [\alpha, \beta] = I$, dus ook

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| = 0 < \varepsilon$$

voor iedere $\varepsilon > 0$. Hieruit volgt dat (b) geldt en dat bovendien (6.14). $\square$

Opmerking 6.34 Uit de cursus 'Inleiding Analyse' weten we dat ieder niet-leeg interval $I \subset \mathbb{R}$ één van de volgende vormen heeft:

(a) $I = [a, b]$ met $-\infty < a < b < \infty$,

(b) $I = [a, b[$ met $-\infty < a < b \leq \infty$,

(c) $I = \,]\,a, b]$ met $-\infty \le a < b < \infty$,

(d) $I = \,]\,a, b\,[$ met $-\infty \le a < b \le \infty$.

In al deze gevallen noemen we a en b de grenzen van het interval en schrijven we ook

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_I f(x)\,dx = \lim_{[\alpha,\beta]\nearrow I} f(x)\,dx.$$

Bovendien hanteren we de conventie dat

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Wegens Lemma 6.33 is deze notatie in overeenstemming met de reeds gebruikte notatie voor de eigenlijke Riemann integraal. $\oslash$

In het vervolg veronderstellen we dat $I \subset \mathbb{R}$ een interval is, dat niet gesloten en begrensd is. Zo'n interval heeft dus één van de in Opmerking 6.34 genoemde vormen (b)-(c). We zullen de definitie van oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid in elk van deze gevallen apart onderzoeken.

Lemma 6.35 *Veronderstel dat $I \subset \mathbb{R}$ een interval van de vorm $I = [a, b[$ is, met $a < b \le \infty$. Veronderstel nu dat $f : I \to \mathbb{R}$ een lokaal Riemann-integreerbare functie is. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over het interval $[a, b[$.*

(b) *De limiet*

$$\lim_{\beta\uparrow b} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

bestaat.

Indien (a) en (b), dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\uparrow b} \int_a^\beta f(x)\,dx. \tag{6.15}$$

In de bovenstaande situatie noteren we de integraal in het vervolg ook met

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\uparrow b} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Bewijs Veronderstel eerst dat (a) geldt. Zij $\varepsilon > 0$ Kies een gesloten en begrensd interval $I_0 = [a_0, b_0] \subset [a, b[$ zo dat (6.12) geldt. Dan geldt voor alle $\beta \in \,]b_0, b[$ dat $I_0 \subset [a, \beta] \subset I$, dus

$$\left| \int_a^\beta f(x)\,dx - \int_I f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Hieruit blijkt dat (b) geldt, met limiet gelijk aan $\int_I f(x)\,dx$.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt, en zij S de waarde van de limiet. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een b_0 met $a < b_0 < b$ zo dat voor alle $\beta \in \,[b_0, b\,[$ geldt

$$\left| \int_a^\beta f(x)\,dx - S \right| < \varepsilon.$$

Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zo dat $\alpha < \beta$ en $I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I$. Dan geldt dat $\alpha = a$ en $b_0 \leq \beta < b$, en de bovenstaande schatting geldt met $a = \alpha$. Hieraan zien we dat

$$S = \lim_{[\alpha,\beta] \nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

We concluderen dat (a) geldt, en (6.15). □

Gevolg 6.36 *Zij $-\infty < a < b \leq \infty$ en zij $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ lokaal Riemann-integreerbaar. Zij $a \leq c < b$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[a, b[$.*

(b) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[c, b[$.*

Als (a) en (b) gelden, dan geldt bovendien dat

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Bewijs Voor alle $\beta > c$ geldt

$$\int_a^\beta f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^\beta f(x)\, dx$$

De uitspraken volgen hieruit door de limiet voor $\beta \uparrow b$ te nemen. □

Voorbeeld 6.37 We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^s$ op $I = [1, \infty[$, met $s \in \mathbb{R}$ een constante, ongelijk aan -1. Deze functie is continu, dus lokaal Riemann-integreerbaar. Voor $\beta > 1$ geldt dat

$$\int_1^\beta f(x)\, dx = \left.\frac{x^{s+1}}{s+1}\right|_1^\beta = \frac{\beta^{s+1} - 1}{s+1}. \tag{6.16}$$

De laatste uitdrukking heeft een limiet voor $\beta \uparrow \infty$ dan en slechts dan als $s + 1 < 0$. In dit geval is de functie f oneigenlijk Riemann integreerbaar over $[1, \infty[$, met als oneigenlijke integraal de limiet:

$$\int_1^\infty x^s\, dx = \lim_{\beta \to \infty} \frac{\beta^{s+1} - 1}{s+1} = -\frac{1}{s+1}, \qquad (s < -1).$$

De uitdrukking (6.16) heeft geen limiet voor $s > -1$, ofwel, de integraal divergeert in dat geval.

Tenslotte beschouwen we ook nog het geval dat $s = -1$. Dan heeft $f(x) = 1/x$ de functie $\log x$ als primitieve, en dus heeft

$$\int_1^\beta \frac{1}{x}\, dx = \log \beta$$

geen limiet voor $\beta \to \infty$. De bijbehorende integraal $\int_1^\beta x^{-1}\, dx$ is dan ook divergent. Samenvattend concluderen we dat het onderstaande lemma geldt. ⊘

Lemma 6.38 *Zij $s \in \mathbb{R}$. Dan convergeert de oneigenlijke Riemann-integraal*

$$\int_1^\infty x^s\,dx \tag{6.17}$$

dan en slechts dan als $s < -1$. In dat geval is de waarde van de integraal gelijk aan $1/(-s-1)$.

Soortgelijke beschouwingen als hier boven leiden tot een andere karakterisering van oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid op intervallen als in Opmerking 6.34 (c), dus $I =]a, b]$ met $-\infty \leq a < b < \infty$.

Een interessant voorbeeld wordt gegeven door het onderstaande lemma.

Lemma 6.39 *Zij $s \in \mathbb{R}$. De oneigenlijke integraal*

$$\int_0^1 x^s\,dx$$

is convergent dan en slechts dan als $s > -1$. In dat geval is de oneigenlijke integraal gelijk aan $1/(s+1)$.

Bewijs De functie $f : x \mapsto x^s$ is continu op het interval $I =]0, 1]$, dus Riemann-integreerbaar op ieder deelinterval $[\alpha, 1] \subset I$. We veronderstellen eerst dat $s \neq -1$. Dan is $(s+1)^{-1}x^{s+1}$ primitieve van f, dus

$$\int_\alpha^1 x^s\,dx = \frac{1}{s+1} - \frac{\alpha^{s+1}}{s+1}$$

voor alle $0 < \alpha < 1$. We zien dat de limiet voor $\alpha \downarrow 0$ bestaat dan en slechts dan als $s > -1$. In dat geval geldt

$$\int_0^1 x^s = \frac{1}{s+1}.$$

We beschouwen tenslotte het geval dat $s = -1$. Dan heeft f de functie $\log$ als primitieve op I, zodat

$$\int_\alpha^1 x^{-1}\,dx = -\log\alpha.$$

Deze uitdrukking heeft geen limiet voor $\alpha \downarrow 0$, zodat de bijbehorende oneigenlijke integraal divergent is. Het lemma volgt. $\square$

Om het geval (d) van Opmerking 6.34 te begrijpen, waarin sprake is van een tweezijdig open interval $I =]\,a, b\,[$, met $-\infty \leq a < b \leq \infty$, hebben we de volgende karakterisering van oneigenlijke integreerbaarheid nodig.

Lemma 6.40 (Cauchy criterium) *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval en zij $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I.*

(b) *Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ zo dat voor alle gesloten en begrensde intervallen J_1, J_2 met $I_0 \subset J_j \subset I$ geldt dat*

$$\left|\int_{J_1} f(x)\,dx - \int_{J_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Bewijs Veronderstel eerst dat (a) geldt. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ zo dat voor ieder gesloten en begrensd interval $[\alpha, \beta]$ met $I_0 \subset [\alpha, \beta] \subset I$ geldt

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx - \int_I f(x)\, dx \right| < \varepsilon/2.$$

Zijn J_1 en J_2 gesloten en begrensde intervallen als in (b), dan geldt dat

$$\begin{aligned} &\left| \int_{J_1} f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx \right| \\ &\quad \leq \left| \int_{J_1} f(x)\, dx - \int_I f(x)\, dx \right| + \left| \int_I f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt (b).

We veronderstellen nu dat (b) geldt. Er bestaat een rij $J(n) = [\alpha_n, \beta_n]$ van gesloten en begrensde intervallen zo dat $J(n) \subset J(n+1) \subset I$ en zo dat

$$\bigcup_{k \geq 0} J(k) = I.$$

We zullen laten zien dat de integraalwaarden

$$S_n := \int_{J(n)} f(x)\, dx$$

een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ vormen. Laat $\varepsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $[\alpha, \beta] \subset I$ als in (b). Er bestaan $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ zodat $\alpha \in J(N_1)$ en $\beta \in J(N_2)$. Zij $N = \max(N_1, N_2)$, dan geldt $[\alpha, \beta] \subset J(N)$. Voor $p, q > N$ geldt $[a, b] \subset J(p)$ en $[\alpha, \beta] \subset J(q)$ dus $|S_p - S_q| < \varepsilon$. De rij (S_n) is dus inderdaad Cauchy in $\mathbb{R}$. Wegens de volledigheid van $\mathbb{R}$ bestaat $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

We tonen tenslotte aan dat

$$\lim_{[\alpha,\beta]\nearrow I} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx = S. \tag{6.18}$$

Laat daartoe $\varepsilon > 0$ gegeven zijn en zij $[\alpha, \beta]$ als in (b). Er is een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $[\beta, \beta] \subset J(n)$ en $|S_n - S| < \varepsilon$. Zij J een gesloten begrend interval met $[\alpha, \beta] \subset J \subset I$. Dan geldt voor $n \geq N$ dat

$$\left| \int_J f(x)\, dx - S \right| \leq \left| \int_J f(x)\, dx - \int_{J_n} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{J_n} f(x)\, dx - S \right| < 2\varepsilon.$$

Hieruit volgt inderdaad (6.18). We concluderen dat f oneigenlijk integreerbaar is over I. □

Uit het volgende lemma blijkt dat oneigenlijke integreerbaarheid over een interval van de vorm (d) uit Opmerking 6.34 herleid kan worden tot de twee reeds behandelde gevallen (b) en (c).

Lemma 6.41 *Zij $I =]a, b[$, met $-\infty \leq a < b \leq \infty$ en zij $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar. Laat voorts $c \in I$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I.*

(b) *De functie f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over zowel $]a, c]$ als $[c, b[$.*

Indien (a) en (b) gelden, dan is

$$\int_I f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{6.19}$$

Bewijs We veronderstellen eerst dat (a) geldt. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er wegens Lemma 6.40 een gesloten en begrensd interval $I_0 = [a_0, b_0]$ in I zo dat voor alle gesloten en begrensde intervalleen J_1, J_2 met $I_0 \subset J_j \subset I$ geldt dat

$$\left| \int_{J_1} f(x)\,dx - \int_{J_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Als we I_0 vervangen door een groter interval, dan blijft deze uitspraak geldig. We mogen daarom aannemen dat $a_0 < c < b_0$. Veronderstel nu dat twee gesloten en begrensde intervallen J_j^+ gegeven zijn met $[c, b_0] \subset J_j^+ \subset [c, b[$. Definieer $J_j = [a_0, c] \cup J_j^+$. Dan zijn J_j, voor $j = 1, 2$, gesloten en begrensde intervallen met $I_0 \subset J_j \subset I$. Bovendien geldt

$$\int_{J_j} f(x)\,dx = \int_{a_0}^c f(x)\,dx + \int_{J_j^+} f(x)\,dx.$$

Hieruit volgt dat

$$\left| \int_{J_1^+} f(x)\,dx - \int_{J_2^+} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{J_1} f(x)\,dx - \int_{J_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

We concluderen met behulp van Lemma 6.40 dat f oneigenlijk integreerbaar is over $[c, b[$. Op soortgelijke wijze zien we dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]a, c]$. Dus (b) geldt.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $[c, b_0]$ zo dat voor elk gesloten en begrensd interval $[c, \beta]$ met $I_0^+ \subset [c, \beta] \subset [c, b[$ geldt dat

$$\left| \int_c^\beta f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Evenzo is er een gesloten en begrensd interval $[a_0, c] \subset]a, c]$ zo dat voor elk interval $[\alpha, c]$ met $[a_0, c] \subset [\alpha, c] \subset]a, c]$ geldt dat

$$\left| \int_\alpha^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zij $I_0 = [a_0, b_0]$. En zij $[\alpha, \beta]$ zo dat $[a_0, b_0] \subset [\alpha, \beta] \subset]a, b[$. Dan geldt $[c, b_0] \subset [c, \beta] \subset [c, b[$ en $[a_0, c] \subset [a_0, c] \subset]a_0, c]$. Uit de twee bovenstaande schattingen volgt nu met behulp van de driehoeksongelijkheid dat

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \left(\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \right) \right| < \varepsilon.$$

Hieruit concluderen we met Definitie 6.29 dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]a, b[$ en bovendien dat

$$\int_I f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

$\square$

De integraal in het linkerlid van (6.19) schrijven we in het vervolg ook als $\int_a^b f(x)\, dx$.

Definitie 6.42 (Absoluut integreerbaar) Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval. Een lokaal Riemann-integreerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet absoluut oneigenlijk Riemann-integreerbaar indien de functie $|f| : x \mapsto |f(x)|, I \to \mathbb{R}$, oneigenlijk Riemann-integreerbaar is. $\oslash$

Opmerking 6.43 Merk op dat in de bovenstaande definitie de functie $|f|$ lokaal Riemann-integreerbaar is. Voorts wordt de convergentie van de integraal $\int_I |f(x)|\, dx$ wel genoteerd met

$$\int_I |f(x)|\, dx < \infty.$$

$\oslash$

Het volgende resultaat is analoog aan Lemma 6.16.

Lemma 6.44 *Laat $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval zijn met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$, en veronderstel dat $f : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar is. Indien f absoluut oneigenlijk integreerbaar is, dan is f oneigenlijk integreerbaar, en*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Bewijs Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een gesloten en begrensd interval $I_0 \subset I$ zo dat voor elk tweetal gesloten en begrensde intervallen J_1, J_2 met $I_0 \subset J_j \subset I$ geldt

$$\left| \int_{J_1} |f(x)|\, dx - \int_{J_2} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon/2.$$

In het bijzonder volgt hieruit voor dergelijke intervallen dat

$$\int_{J_j \setminus I_0} |f(x)|\, dx = \left| \int_{J_j} |f(x)|\, dx - \int_{I_0} |f(x)|\, dx \right| < \varepsilon/2, \qquad (j = 1, 2). \tag{6.20}$$

Strikt genomen is $J_j \setminus I_0$ de vereniging van een of twee begrensde intervallen, waarvan de afsluitingen tot I behoren. Met de integraal over $J_j \setminus I_0$ wordt de som van de Riemann-integralen over deze afsluitingen bedoeld.

Uit (6.20) leiden we af dat voor dergelijke intervallen J_1, J_2 geldt dat

$$\begin{aligned} \left| \int_{J_1} f(x)\, dx - \int_{J_2} f(x)\, dx \right| &= \left| \int_{J_1 \setminus I_0} f(x)\, dx - \int_{J_2 \setminus I_0} f(x)\, dx \right| \\ &\leq \int_{J_1 \setminus I_0} |f(x)|\, dx + \int_{J_2 \setminus I_0} |f(x)|\, dx \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

We concluderen dat $f : I \to \mathbb{R}$ voldoet aan conditie (b) van Lemma 6.40. Dus f is Riemann-integreerbaar over I. Voor alle $\alpha < \beta$ met $[\alpha, \beta] \subset I$ geldt wegens de driehoeksongelijkheid voor Riemann integralen dat

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx.$$

Hieruit volgt (6.21) door limietovergang voor $[\alpha, \beta] \nearrow I$. $\square$

Stelling 6.45 (Majorantiekenmerk voor integreerbaarheid) *Laat $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval zijn met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$, en veronderstel dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar zijn, $C > 0$ en dat voor alle $x \in I$ geldt:*

$$|f(x)| \leq Cg(x)$$

Indien g oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op I, dan is f dat ook, en er geldt bovendien dat

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq C \int_a^b g(x)\, dx. \tag{6.21}$$

Opmerking 6.46 Dit resultaat kan opgevat worden als het analogon van het eerdere majorantie-kenmerk voor reeksen, zie Stelling 6.18. $\oslash$

Bewijs Uit de voorwaarden blijkt dat $g \geq 0$ en dat voor elk segment $[\alpha, \beta] \subset I$ geldt

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\, dx \leq C \int_\alpha^\beta g(x)\, dx \leq \int_I g(x)\, dx.$$

Met Lemma 6.31 volgt hieruit dat $|f|$ oneigenlijk integreerbaar is en dat

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \leq C \int_a^b g(x)\, dx.$$

Het bewijs wordt voltooid door toepassing van Lemma 6.44. $\square$

Voorbeeld 6.47 (Gamma-functie) We beschouwen wederom de volgende integraal voor de Gamma-functie, zie ook Voorbeeld 3.13,

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0. \tag{6.22}$$

Als $0 < x < 1$, dan gaat de integrand naar oneindig als $t \downarrow 0$, dus dan moeten we ook bij de ondergrens $t = 0$ de integraal als een oneigenlijke integraal opvatten.

We zullen nu met behulp van het majorantie-criterium aantonen dat de integraal voor de Gamma-functie convergeert. Daartoe verdelen we het interval $]0, \infty[$ in de stukken $]0, 1]$ en $[1, \infty[$.

Voor $t \in]0, 1]$ geldt dat $|t^{x-1}e^{-t}| \leq t^{x-1}$ en $\int_0^1 t^{x-1}\, dt$ convergeert, dus ook

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{6.23}$$

convergeert.

We beschouwen nu het deel van de integraal over $[1, \infty[$. Zij $N \in \mathbb{N}, N > x - 1$. Dan geldt voor $t \geq 1$ dat $t^{x-1}e^{-t} \leq t^N e^{-t}$. Uit $\lim_{t\to\infty} t^N e^{-t/2} = 0$ volgt het bestaan van een constante $C > 0$ zo dat

$$t^N e^{-t} \leq Ce^{-t/2}, \qquad (t \geq 1).$$

Omdat de integraal $\int_1^\infty e^{-t/2}\, dt$ convergent is, concluderen we nu dat

$$\int_1^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \tag{6.24}$$

convergent is.

Uit de convergentie van (6.23) en (6.24) concluderen we tenslotte dat de integraal (6.22) convergent is voor alle $x > 0$.

Men kan aantonen dat de Gamma-functie niet op een algebraïsche manier in termen van de bekende functies is uit te drukken. $\oslash$

Voorbeeld 6.48 (Bèta-functie) We beschouwen opnieuw de *Bèta-functie van Euler* uit Voorbeeld 3.12. Dit is de functie van twee reële variabelen $p,\ q$, gedefinieerd door

$$B(p,\, q) := \int_0^1 t^{p-1}\,(1-t)^{q-1}\,dt. \tag{6.25}$$

Deze functie is, net als de Gamma-functie, niet op een algebraïsche manier in termen van bekende functies uit te drukken.

De gegeven integraal voor $B(p,q)$ convergeert voor $p, q > 0$. Dit is als volgt in te zien. Voor genoemde p, q is de functie

$$f : t \mapsto t^{p-1}(1-t)^{q-1}$$

continu dus lokaal Riemann-integreerbaar op het interval $]0,1[$. We splitsen dit interval in twee delen, namelijk $]0, \frac{1}{2}]$ and $[\frac{1}{2}, 1[$ en behandelen de bijbehorende integralen afzonderlijk.

De functie $t \mapsto (1-t)^{q-1}$ is continu op $[0, \frac{1}{2}]$, dus begrensd door een constante $C > 0$. Voor $0 < t \leq \frac{1}{2}$ geldt daarom dat

$$|f(t)| \leq Ct^{p-1}.$$

De functie in het rechterlid van deze uitdrukking is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $]0, \frac{1}{2}]$ wegens Lemma 6.39. Hieruit volgt de convergentie van de integraal van f over $]0, \frac{1}{2}]$. De functie $t \mapsto t^{p-1}$ is continu op $[\frac{1}{2}, 1]$ dus begrensd door een constante $C' > 0$. Voor $\frac{1}{2} \leq t < 1$ geldt daarom dat

$$|f(t)| \leq C'(1-t)^{q-1}.$$

De functie in het rechterlid van deze uitdrukking is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[\frac{1}{2}, 1[$, wegens Lemma 6.39 (pas de substitutieregel toe om dit in te zien). We concluderen dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]\frac{1}{2}, 1]$. $\oslash$

Uit het majorantiekenmerk voor de convergentie van oneigenlijke integralen volgt het eveneens gemakkelijk hanteerbare limietkenmerk.

Gevolg 6.49 (Limietkenmerk voor integreerbaarheid) *Laat I een interval van de vorm $[c, b[$ zijn, met $-\infty < c < b \leq \infty$. Veronderstel voorts dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbare functies zijn, terwijl $g > 0$ op I en*

$$\lim_{x \uparrow b} \frac{|f(x)|}{g(x)} = L \in [0, \infty[.$$

Als g oneigenlijk integreerbaar is op I, dan is f dat ook.

Bewijs Er bestaat een $\beta > 0$ zo dat $||f(x)|/g(x) - L| < 1$ voor alle $x \in [\beta, b[$. Hieruit volgt dat $|f(x)| \leq (L+1)g(x)$ voor al dergelijke x. De functie $(L+1)g(x)$ is oneigenlijk integreerbaar over I, dus ook over $[\beta, b[$, en wegens het majorantiekenmerk volgt dat f oneigenlijk integreerbaar is over $[\beta, b[$. Hieruit volgt dat f oneigenlijk integreerbaar is over I. $\square$

Opmerking 6.50 Uiteraard geldt een soortgelijk limietkenmerk voor lokaal integreerbare functies op een interval van de vorm $I =]a, c]$, met $-\infty \leq a < c < \infty$. $\oslash$

Ook voor oneigenlijke integralen geldt een verwisselingsstelling met limieten. We bewijzen eerst twee technische resultaten. Daaruit leiden we dan een dominantie-kenmerk af dat in de praktijk vaak goed werkt.

Lemma 6.51 *Laat I een niet-leeg interval zijn met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Laat $V \subset \mathbb{R}^n$ zijn en $f : V \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Veronderstel verder dat de volgene voorwaarden vervuld zijn.*

(a) *Voor elke $x \in V$ is de functie $t \mapsto f(x, t)$ oneigenlijk integreerbaar over I.*

(b) *Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een gesloten en begrensd interval $[\alpha, \beta] \subset I$ zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat:*

$$\left| \int_a^b f(x,t)\, dt - \int_\alpha^\beta f(x,t)\, dt \right| < \varepsilon \tag{6.26}$$

Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$$

continu.

Bewijs Laat $x_0 \in V$. Dan is het voldoende de continuïteit van F in het punt x_0 aan te tonen. Voor $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ definiëren we

$$F_\alpha^\beta : x \mapsto \int_\alpha^\beta f(x,t)\, dt.$$

Zij nu $\varepsilon > 0$, dan volgt uit de hypothese dat er $\alpha, \beta \in I$ bestaan met $\alpha < \beta$, zo dat

$$|F(x) - F_\alpha^\beta(x)| < \varepsilon/3,$$

voor alle $x \in V$. Uit Stelling 3.8 volgt dat de functie F_α^β continu is op V, dus in het bijzonder in x_0. Er bestaat dus een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in B(x_0; \delta)$ geldt dat

$$|F_\alpha^\beta(x) - F_\alpha^\beta(x_0)| < \varepsilon/3.$$

We merken nu op dat voor alle $x \in B(x_0; \delta)$ geldt dat

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &\leq |F(x) - F_\alpha^\beta(x)| + |F_\alpha^\beta(x) - F_\alpha^\beta(x_0)| + |F_\alpha^\beta(x_0) - F(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hiermee is de continuïteit van F in x_0 aangetoond. $\square$

Ook het volgende lemma zal nuttig blijken. Is I een niet-leeg interval, en $c \in I$ dan definiëren we de volgende deelintervallen van I,

$$I_{\leq c} := \{x \in I \mid x \leq c\}, \quad \text{en} \quad I_{\geq c} := \{x \in I \mid x \geq c\}.$$

Lemma 6.52 *Zij I een niet-leeg interval en $a, b \in I$ met $a < b$. Dan geldt voor elke oneigenlijk Riemann-integreerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$ dat f oneigenlijk integreerbaar is over $I_{\leq a}$ en over $I_{\geq b}$, terwijl*

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{I_{\leq a}} f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_{I_{\geq b}} f(x)\,dx.$$

Bewijs Door toepassen van Lemma 6.41 en Gevolg 6.36 vinden we dat

$$\begin{aligned}\int_I f(x)\,dx &= \int_{I_{\leq a}} f(x)\,dx + \int_{I_{\geq a}} f(x)\,dx \\ &= \int_{I_{\leq a}} f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_{I_{\geq b}} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Uit het bovenstaande leiden we het volgende practisch goed toepasbare principe van gedomineerde continuïteit af.

Stelling 6.53 (Gedomineerde continuïteit) *Laat $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval zijn met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ en $f : V \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Veronderstel verder dat er een oneigenlijk Riemann-integreerbare functie $g : I \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat*

$$|f(x,t)| \leq g(t) \qquad \text{voor alle} \qquad (x,t) \in V \times I.$$

Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$$

continu.

Bewijs We zullen laten zien dat de voorwaarden van Lemma 6.51 vervuld zijn. Zij $x \in V$. Dan is de functie $f_x : t \mapsto f(x,t)$, $I \to \mathbb{R}$ continu, dus lokaal Riemann-integreerbaar, terwijl $|f_x| \leq g$ op I. Dus f_x is oneigenlijk integreerbaar wegens Stelling 6.45. Hiermee is voorwaarde (a) aangetoond. Zij $\varepsilon > 0$ en zij $c \in I$. Uit de oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid van g volgt het bestaan van $\alpha, \beta \in I$ met $\alpha < \beta$ zo dat

$$\left| \int_I g(t)\,dx - \int_\alpha^\beta g(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Hieruit volgt voor alle $x \in V$ dat

$$\begin{aligned}\left| \int_I f(x,t)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt \right| &= \left| \int_{I_{\leq\alpha}} f(x,t)\,dt + \int_{I_{\geq\beta}} f(x,t)\,dt \right| \\ &\leq \int_{I_{\leq\alpha}} |f(x,t)|\,dt + \int_{I_{\geq\beta}} |f(x,t)|\,dt \\ &\leq \int_{I_{\leq\alpha}} g(t)\,dx + \int_{I_{\geq\beta}} g(t)\,dt \\ &= \int_I g(t)\,dt - \int_\alpha^\beta g(t)\,dt < \varepsilon.\end{aligned}$$

Hieruit volgt de ongelijkheid (6.26) waaruit blijkt dat voorwaarde (b) van Lemma 6.51 vervuld is. $\square$

Opmerking 6.54 Het idee van de voorwaarde in Stelling 6.53 is dat $t \mapsto f(x,t)$ gedomineerd wordt door de oneigenlijk integreerbare (niet-negatieve) functie $t \mapsto g(t)$, met uniformiteit in de parameter $x \in V$. Dit dwingt de voorwaarden van Lemma 6.51 af. $\oslash$

Voorbeeld 6.55 (Gamma-functie) We passen het bovenstaande toe op de Gamma-functie

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad (x > 0).$$

Zij $0 < a < b$ en $X =]a,b[$. Dan geldt voor alle $t \in]0,1]$ dat $t^{x-1} = e^{(x-1)\log t} \leq t^{a-1}$. De functie $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ is continu op $]a,b[\times]0,1]$ en voor alle $(x,t) \in X \times]0,1]$ geldt dat $|f(x,t)| \leq g(t) := t^{a-1}e^{-t}$, terwijl g oneigenlijk integreerbaar is, dus

$$F_0 : x \mapsto \int_0^1 t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

definieert een continue functie op X.

Anderzijds is f ook continu op $]a,b[\times [1,\infty[$, terwijl op deze verzameling een majorantie van de vorm $|f(t,x)| \leq t^{b-1}e^{-t}$ bestaat. De laatste functie is weer oneigenlijk integreerbaar op $]1,\infty[$, dus

$$F_1 : x \mapsto \int_1^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

definieert een continue functie op $]a,b[$. Hieruit volgt dat $\Gamma = F_0 + F_1$ continu is op $]a,b[$. Aangezien a,b willekeurig waren volgt dat Γ continu is op $]0,\infty[$. $\oslash$

Opmerking 6.56 We merken op dat

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^R = 1.$$

Zij $x > 0$, dan volgt uit het bovenstaande dat

$$\Gamma(x+1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^x\, e^{-t}\, dt.$$

De integraal is met behulp van partiële integratie als volgt te herschrijven:

$$\begin{aligned} \int_0^R t^x\, e^{-t}\, dt &= -\int_0^R t^x\, \frac{d}{dt} e^{-t}\, dt \\ &= \left[-t^x\, e^{-t}\right]_0^R + x\int_0^R t^{x-1}\, e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

De laatste integraal is convergent. Omdat $x > 0$ is, geldt $t^x|_{t=0} = 0$. Tevens geldt $R^x\, e^{-R} \to 0$ voor $R \to \infty$. Door de limiet voor $R \to \infty$ te nemen concluderen we daarom dat

$$\Gamma(x+1) = x\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

dus

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (x > 0).$$

Passen we dit toe met $x = n-1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, dan vinden we met inductie dat

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!.$$

Anders gezegd, de Gamma-functie $x \mapsto \Gamma(x)$ levert een continue uitbreiding tot de positieve reële as van de faculteitsfunctie $n \mapsto (n-1)!$, waarbij de laatste functie alleen voor de gehele positieve getallen n is gedefinieerd. $\oslash$

Voorbeeld 6.57 (Béta-functie) We passen het bovenstaande toe op de Bèta-functie

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt \tag{6.27}$$

De integrand is continu als functie van (p,q,t), voor $p,q > 0$ en $0 < t < 1$. Fixeer $p_0, q_0 > 0$. Dan geldt voor alle $p \geq p_0$, $q \geq q_0$ en $t \in \,]0,1[$ dat

$$0 \leq t^{p-1}(1-t)^{q-1} \leq t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}.$$

Zoals we eerder in Voorbeeld 6.48 zagen is de functie in het rechterlid oneigenlijk integreerbaar over $]\,0,1[$. Met Stelling 6.53 concluderen we nu dat B continu is op $[p_0,\infty[\, \times\, [q_0,\infty[$. Dit geldt voor iedere $p_0, q_0 > 0$. Dus B is continu op de verzameling $]\,0,\infty[\, \times\,]\,0,\infty[$. $\oslash$

We zien aan deze voorbeelden dat uniforme majorantie vaak gemakkelijker is toe te passen na splitsing van de oneigenlijke integratie in integraties over intervallen die minstens een der eindpunten bevatten, zodat men zich alleen op het gedrag van de integrand naar het overgebleven eindpunt hoeft te concentreren.

Er is ook een versie van differentiatie onder het integraalteken voor oneigenlijke integralen. Ook dit gaat weer in termen van een geschikte uniforme dominantie.

Stelling 6.58 (Differentiatie onder het integraalteken) *Zij $X \subset \mathbb{R}$ een open interval en I een niet-leeg interval met grenzen $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Zij verder $f : X \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie die voldoet aan de volgende eigenschappen.*

(a) *voor alle $x \in X$ is de functie $f_x : t \mapsto f(x,t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I;*

(b) *de functie f is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele, $D_1 f$ is continu op $X \times I$ en er is een oneigenlijk Riemann-integreerbare functie $g : I \to \mathbb{R}$ zo dat*

$$|D_1 f(x,t)| \leq g(t) \qquad \text{voor alle} \quad (x,t) \in X \times I.$$

Dan is de functie $F : X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$$

(continu) differentieerbaar op X en er geldt dat

$$F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,t)\, dt. \tag{6.28}$$

Bewijs Zij $x_0 \in X$. We zullen de differentieerbaarheid van F in x_0 aantonen. Hiertoe definiëren we de functie $q : X \times I \to \mathbb{R}$ door

$$q(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0}, \qquad (x \in X \setminus \{x_0\}, \quad t \in I),$$

en

$$q(x_0,t) = D_1 f(x_0,t), \qquad (t \in I).$$

De functie q is continu op $X \times I$ wegens Lemma 3.14. We zullen laten zien dat voor alle $x \in X$ en $t \in I$ geldt dat

$$|q(x,t)| \leq g(t). \tag{6.29}$$

Voor $x = x_0$ volgt dit uit de voorwaarde (b). Laat $(x,t) \in (X \setminus \{x_0\}) \times I$. Dan geldt vanwege de middelwaardestelling toegepast op de eerste variabele van f dat er een tussen x_0 en x gelegen $\xi = \xi(x,t)$ bestaat zo dat $q(x,t) = D_1 f(\xi, t)$. De schatting (6.29) volgt nu ook uit voorwaarde (b).

Wegens het majorantiekenmerk is de functie $q : t \mapsto q(x,t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I, voor elke $x \in X$. Wegens Stelling 6.53 is de functie $Q : X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$Q(x) = \int_a^b q(x,t)\, dt$$

continu op X, dus in het bijzonder in x_0. Uit de definities volgt direct dat

$$F(x) - F(x_0) = Q(x)(x - x_0)$$

voor alle $x \in X \setminus \{x_0\}$. En uiteraard is de bewering ook geldig voor $x = x_0$. Omdat Q continu is in x_0 leiden we hieruit af dat F differentieerbaar is in x_0, en dat de afgeleide gegeven wordt door

$$F'(x_0) = Q(x_0) = \int_a^b D_1 f(x_0,t)\, dt.$$

Hieruit volgt dat F differentieerbaar is op X. Uit de formule (6.28) volgt door toepassing van Stelling 6.53 dat de afgeleide continu is. $\square$

Voorbeeld 6.59 (Gamma-functie) We tonen aan dat de Gamma-functie willekeurig vaak differentieerbaar is op $]\,0,\infty\,[$, terwijl

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad (k \in \mathbb{N},\ x > 0).$$

De Gamma-functie is daarmee een gladde uitbreiding tot de positieve reële as van de faculteitsfunctie $(n-1)!$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. We schrijven $f_k(x,t)$ voor de integrand.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is

$$\lim_{t \downarrow 0}\ (\log t)^k\, t^{\varepsilon} = 0,$$

dus er bestaat een constante $C_\varepsilon > 0$ zo dat $|\log t|^k \leq C_\varepsilon t^{-\varepsilon}$ voor alle $t \in]\,0,1]$. Dit geeft een schatting van het type

$$|f_k(x,t)| \leq C_\varepsilon t^{x-1-\varepsilon}, \qquad (0 < t \leq 1).$$

Hierbij kunnen we $\varepsilon > 0$ kiezen met $\varepsilon < x$, zodat de dominerende functie $t \mapsto C_\varepsilon t^{x-1-\varepsilon}$ oneigenlijk integreerbaar is op het interval $]\,0,1]$. Hieruit volgt de convergentie van $\int_0^1 f_k(x,t)\, dt$.

Voor de integratie over $[1, \infty[$ merken we op dat

$$\lim_{t\to\infty} (\log t)^k t^N e^{-t/2} = 0$$

voor alle $k, N \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat er een $C_k > 0$ bestaat zo dat

$$|f_k(x,t)| \le C_k e^{-t/2} \qquad (t \ge 1).$$

Hieruit volgt de convergentie van $\int_1^\infty f_k(x,t)\, dt$.

Laat nu $0 < a < b$ zijn, en veronderstel dat $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt voor alle $x \in\,]a, b[$ dat

$$|f_k(x,t)| \le |f_k(a,t)|, \qquad (0 < t \le 1),$$

en dat

$$|f_k(x,t)| \le |f_k(b,t)|, \qquad (t \ge 1).$$

Voor alle $k \in \mathbb{N}, x > 0, t > 0$ geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial x} f_k(x,t) = f_{k+1}(x,t).$$

Het resultaat volgt nu met inductie naar k, door toepassing van Stelling 6.58. $\oslash$

Voorbeeld 6.60 (Bèta-functie) We beschouwen nogmaals de Bèta-functie van Euler, zie (6.27), waarvoor we nu de sterkere uitspraak zullen bewijzen dat hij willekeurig vaak differentieerbaar is op $]0,\infty[\times]0,\infty[$ terwijl voor alle $k, l \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ geldt dat

$$\frac{\partial^{k+l} B(p,\, q)}{\partial p^k\, \partial q^l} = \int_0^1 (\log t)^k\, t^{p-1}\, (\log(1-t))^l\, (1-t)^{q-1}\, dt. \tag{6.30}$$

De continuïteit, van de integrand als functie van $(p,\, q,\, t) \in]1,\, \infty[\times]1,\, \infty[\times]0,\, 1[$ is evident. Als functie van t is de integrand dus lokaal Riemann integreerbaar op $]0,1[$. Zij nu $p_0, q_0 > 0$. Dan geldt voor $p > 2p_0$ en $q > 2q_0$ dat

$$|(\log t)^k\, t^{p-1}\, (\log(1-t))^l\, (1-t)^{q-1}| \le \psi(t)\, t^{p_0-1} t^{q_0-1} \tag{6.31}$$

met

$$\psi(t) := (\log t)^k\, t^{p_0}\, (\log(1-t))^l\, (1-t)^{q_0}.$$

Deze functie is continu voortzetbaar tot $[0,1]$, omdat

$$\lim_{t\downarrow 0} \psi(t) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{t\uparrow 1} \psi(t) = 0.$$

Hieruit volgt dat er een $M > 0$ bestaat zo dat $|\psi(t)| \le M$ voor alle $0 < t < 1$. We concluderen dat de functie in het rechterlid van (6.31) op $]0,1[$ gemajoreerd kan worden door de functie

$$t \mapsto M t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1},$$

die absoluut convergent is op $]0,1[$, wegens Voorbeeld 6.57.

Door herhaald Stelling 6.58 toe te passen op de variabelen p en q concluderen we dat de functie B willekeurig vaak differentieerbaar is op $]2p_0,\infty[\times]2q_0,\infty[$, met partiële afgeleiden die gegeven worden door (6.30). Aangezien dit geldt voor alle $p_0, q_0 > 0$ zien we dat B willekeurig vaak differentieerbaar is op $]0,\infty[\times]0,\infty[$ met de gegeven partiële afgeleiden. $\oslash$

Index