Inleiding Analyse

Opgaven

E.P. van den Ban

1 Limieten en continuïteit

Opgave 1.1

(a) Bewijs direct uit de definitie van limiet dat $\lim_{y\to 0} y = 0$.

(b) Bewijs $\lim_{y\to 0} y^3 = 0$ uit de definitie van limiet.

(c) Bewijs $\lim_{y\to 0} y^3 = 0$ door stellingen te gebruiken.

Opgave 1.2

(a) Bewijs direct uit de definitie van limiet dat $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{1}{x} = 2$.

(b) Bewijs dit ook door stellingen te gebruiken.

Opgave 1.3 We willen met behulp van de definitie van limiet bewijzen dat

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

(a) Laat zien dat we voor elke $\delta > 0$ het volgende hebben: voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x-1| < \delta$ geldt:

$$|1+x| < 2+\delta.$$

Concludeer dat voor zulke x geldt:

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\delta|1+x| < \frac{1}{2}\delta(2+\delta).$$

Men kan nu δ oplossen als functie van ϵ uit de kwadratische vergelijking $\frac{1}{2}\delta^2+\delta-\epsilon = 0$. Als positieve wortel vinden we $\delta = \sqrt{1+2\epsilon}-1$. Dit argument is in dit geval toepasbaar, maar in algemenere situaties niet zo geschikt. We geven daarom de voorkeur aan de onderstaande argumentatie.

(b) Beredeneer dat we mogen aannemen dat $0 < \delta \le 1$. Laat zien dat dan geldt:

$$\frac{1}{2}\delta(2+\delta) \le \frac{3}{2}\delta.$$

(c) Zij $\epsilon' > 0$ willekeurig gekozen. Laat zien dat voor elke $0 < \delta < 1$ met $\delta < \epsilon'$ we het volgende hebben. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ met $|x-1| < \delta$ geldt:

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right| < 3\epsilon'.$$

(d) Bewijs met behulp van de definitie van limiet dat $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$.

Opgave 1.4 Bewijs met behulp van de definitie van limiet:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x}{1-x} = 1$;

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1}{2}$.

Opgave 1.5 Gegeven zijn een functie $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ en een punt $a \in \mathbb{R}$. Bewijs dat

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

zodra een van de twee limieten bestaat (u moet dus in het bijzonder het bestaan van de andere limiet bewijzen).

Opgave 1.6

(a) Gegeven zijn een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en een reëel getal $b \in \mathbb{R}$. Bewijs: de uitspraak $\lim_{x \to 0} f(x) = b$ is equivalent met de uitspraak $\lim_{x \to 0} f(x^3) = b$.

(b) Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor $\lim_{x \to 0} f(x^2)$ bestaat, terwijl $\lim_{x \to 0} f(x)$ niet bestaat.

Opgave 1.7 Bepaal de afsluiting van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Vergeet niet te bewijzen dat uw antwoord correct is.

(a) $]-1, \infty[$;

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$;

(c) $\{-\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \,]0, 1[$.

Opgave 1.8 Bepaal de volgende limieten.

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$, $\quad (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$;

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x}$;

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$;

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin^2 x}{x^3}$;

(f) $\lim_{x \downarrow 0} \frac{x\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x} \sin x}$;

(g) $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

Opgave 1.9 Zij $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Toon vanuit de definitie van limiet aan dat

$$\lim_{y \to b} y_1 y_2 = b_1 b_2.$$

We beschouwen nu een tweetal functies $f, g : \mathbb{R}^n \supset\!\!\!\to \mathbb{R}$ en een punt $a \in \mathbb{R}^n$.

(b) Toon met behulp van (a) en de substitutiestelling (nog eens) de volgende produktregel aan. Als $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$ en $\lim_{x \to a} g(x) = b_2$, dan is

$$\lim_{x \to a} f(x) g(x) = b_1 b_2.$$

Hint: definieer $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y_1 y_2$ en beschouw de functie $m \circ (f, g)$.

Opgave 1.10 We beschouwen de functie $\varphi : \mathbb{R} \supset\!\!\!\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ als $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Laat $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(a) Toon aan dat voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ met $|x - a| < \frac{1}{2}|a|$ geldt:

$$|\varphi(x) - \varphi(a)| \leq 2|a|^{-2}|x - a|.$$

(b) Toon met behulp van de definitie van limiet aan dat $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$.

(c) Combineer het bovenstaande met de productregel en de substitutiestelling om de volgende quotiëntregel opnieuw te bewijzen.

Stelling. Laten functies $g : \mathbb{R}^n \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^m$ en $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\!\to \mathbb{R}$ gegeven zijn, en veronderstel dat $\lim_{x \to a} g(x) = b$ en $\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$, met $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ en $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dan geldt

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} g(x) = \frac{1}{\lambda} b.$$

Opgave 1.11

(a) Gegeven zijn een functie $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^p$, en een punt $a \in \mathbb{R}^n$. Met $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat bedoelen we dat er een $b \in \mathbb{R}^p$ bestaat zo dat $\lim_{x \to a} f(x) = b$.
Bewijs: als $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat, dan bestaat er voor elke $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$x, y \in \mathrm{Dom}\,(f) \cap B(a; \delta) \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Hint: gebruik de driehoeksongelijkheid voor d.

(b) Bewijs dat de limiet

$$\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$$

niet bestaat.

(c) We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{als} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{als} \quad x = 0. \end{cases}$$

Bewijs dat $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat. Hint: werk vanuit de definitie. Is de limiet uniek? Motiveer uw antwoord.

Opgave 1.12 Bereken de volgende limieten. Maak daarbij gebruik van de formule $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ voor $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x}}{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}}.$$

Opgave 1.13 Onderzoek of de volgende limieten bestaan. Zo ja, bepaal ze.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{\sin x}).$$

Opgave 1.14 Definieer de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g :]\,0, \infty\,[\to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = x^2, \qquad \text{en} \qquad g(x) = \frac{x^2 - x}{x - \sqrt{x}}.$$

Bepaal $\lim_{x\to 0}(g \circ f)(x)$.

Opgave 1.15 Zij $a \in \mathbb{R}^n$ en $R > 0$. Zij $b \in B(a; R)$. Zij verder $0 < r < R - d(a, b)$. Toon aan dat

$$B(b; r) \subset B(a; R).$$

Opgave 1.16 We beschouwen een tweetal deelverzamelingen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ en veronderstellen dat ieder punt van B een limietpunt van A is, m.a.w., $B \subset \overline{A}$. Verder veronderstellen we dat $c \in \mathbb{R}^n$ een limietpunt van B is. Zij $\delta > 0$.

(a) Toon aan dat er een $b \in B$ bestaat met $d(b, c) < \frac{1}{2}\delta$.

(b) Toon aan dat er een $a \in A$ bestaat met $d(a, c) < \delta$.

(c) Toon aan dat $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(d) Veronderstel dat verder gegeven is dat $A \subset B$. Toon aan dat $\overline{B} = \overline{A}$.

(e) Toon aan dat $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Opgave 1.17 Van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven: f is continu en $f(10) = 2$. Laat zien dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $t \in\,]\,10 - \delta, 10 + \delta\,[$ geldt: $f(t) > 1$. Hint: gebruik de definitie van limiet.

Opgave 1.18 Gegeven zijn een continue functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en een punt $c \in \mathbb{R}^n$.

(a) Veronderstel dat $f(c) > 0$ en laat m een reëel getal zijn met $0 < m < f(c)$. Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in B(c;\delta)$ geldt $f(x) > m$.

(b) Veronderstel nu dat $f(c) \neq 0$. Toon aan dat er een $m > 0$ en een $\delta > 0$ bestaan zo dat voor alle $x \in B(c;\delta)$ geldt $|f(x)| > m$.

Opgave 1.19

(a) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu in 0 en zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = xf(x)$, voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0.

(b) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde functie, d.w.z. er bestaat een $M > 0$ zo dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Zij $g(x) = x^2 f(x)$, $(x \in \mathbb{R})$. Toon aan dat g differentieerbaar is in 0.

(c) Toon aan dat de functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ voor $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en door $h(0) = 0$, differentieerbaar is in 0. Bepaal $h'(0)$. Laat zien dat de afgeleide functie h' niet continu is in 0.

(d) Van een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven dat f differentieerbaar is in 0 en dat $f(0) = 0$. Bewijs dat er een functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat die continu is in 0, terwijl $f(x) = xg(x)$, $(x \in \mathbb{R})$.

Opgave 1.20

(a) We beschouwen een deelverzameling $D \subset \mathbb{R}^n$, een punt $a \in D$ en een functie $\varphi : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m$ met $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$, $(b \in \mathbb{R}^m)$. We definiëren de functie $\psi : D \to \mathbb{R}^m$ door

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{als} \quad x \in D \setminus \{a\}, \\ b & \text{als} \quad x = a. \end{cases}$$

Toon aan dat ψ continu is in a.

(b) We veronderstellen nu dat D te schrijven is als vereniging $D_1 \cup \cdots \cup D_r$ van een eindig aantal deelverzamelingen $D_j \subset D$. Gegeven is een functie $f : D \to \mathbb{R}^m$. We schrijven φ_j voor de beperking van f tot D_j, voor $1 \leq j \leq r$.

Toon aan: als $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$, dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig:

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$;

(2) voor alle $1 \leq j \leq r$ geldt $\lim_{x\to a} \varphi_j(x) = b$.

(c) Laat zien dat (a) opgevat kan worden als speciaal geval van (b).

Opgave 1.21 Bewijs dat de volgende afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continu zijn:

(a) $x \mapsto \langle a, x\rangle$, waarbij a een gegeven vast element in $\mathbb{R}^n$ is.

(b) $x \mapsto \|x\|$.

(c) $x \mapsto \langle x, x\rangle$.

Geef het bewijs op twee manieren:

(i) Zonder gebruik te maken van coördinaten en met behulp van de definitie van continuïteit en eigenschappen van het inprodukt.

(ii) Door gebruik te maken van coördinaten en geschikte stellingen toe te passen.

Opgave 1.22 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{2xy}{x^2+y^2} \qquad \text{als} \qquad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ de functie $y \mapsto f(x,y)$ continu is en dat voor iedere $y \in \mathbb{R}$ de functie $x \mapsto f(x,y)$ continu is.

(c) Schets de niveauverzamelingen van f voor de functiewaarden -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1.

(d) Bewijs dat f niet continu is in $(0,0)$.

Opgave 1.23

(a) Bewijs dat de functie $x \mapsto \|x\|$ continu is op $\mathbb{R}^n$.

(b) Gegeven is een continue functie $f : \mathbb{R}^m \supset\!\!\to \mathbb{R}^n$. Toon aan dat de functie $\|f\| : \mathbb{R}^m \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ continu is.

Voor ieder tweetal reëele getallen $a, b \in \mathbb{R}$ is het getal $\max(a,b)$ gedefinieerd door

$$\max(a,b) := \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq b \\ b & \text{als} \quad a < b. \end{cases}$$

(c) Toon aan dat voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|.$$

Gegeven zijn twee continue functies $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(d) Toon aan dat de functie $\max(f,g) : x \mapsto \max(f(x), g(x))$ continu is. Wat is het domein van deze functie?

(e) Toon tevens aan dat de functie $\min(f,g)$ continu is

Opgave 1.24 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = x^2$ voor $x \in \mathbb{Q}$ en door $f(x) = -x^2$ voor $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Bewijs dat f differentieerbaar is in 0 en bepaal $f'(0)$.

Opgave 1.25 Gegeven zijn een interval $I \subset \mathbb{R}$, een punt $a \in I$ en een functie $f : I \to \mathbb{R}$ die differentieerbaar is in a. Bewijs dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Opgave 1.26 Laat $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ en schrijf $I =]a-r, a+r[$ en $I_+ = [a, a+r[$. Gegeven is een functie $f : I \to \mathbb{R}$ die differentieerbaar is in $a \in I$. Veronderstel dat voor alle $x \in I$ geldt dat $f(x) \leq f(a)$.

(a) Bewijs dat de functie $f_+ := f|_{I_+}$ differentieerbaar is in a en dat $f'_+(a) = f'(a)$.

(b) Bewijs dat $f'_+(a) \leq 0$.

(c) Bewijs dat tevens $f'(a) \geq 0$ en concludeer dat $f'(a) = 0$.

(d) Laat $g : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in a en veronderstel dat voor alle $x \in I$ geldt $g(x) \geq g(a)$. Bewijs dat $g'(a) = 0$.

Opgave 1.27 Zij $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ en schrijf $J = [a, a+r[$. Gegeven is een drietal functies $f, g, h : J \to \mathbb{R}$ met

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

voor alle $x \in J$. Veronderstel dat f en g differentieerbaar zijn in a en dat $f(a) = g(a)$ en $f'(a) = g'(a)$. Bewijs dat h differentieerbaar is in a en dat $h'(a) = f'(a)$.

Opgave 1.28 Zij $I \subset \mathbb{R}$. We noemen een functie $G : I \times I \to \mathbb{R}$ continu in elk van zijn variabelen als voor alle $a, b \in I$ geldt dat $x \mapsto G(x, b)$ en $y \mapsto G(a, y)$ continu zijn op I. Veronderstel nu dat een functie $f : I \to \mathbb{R}$ gegeven is. Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn.

(a) De functie f is differentieerbaar in elk punt van I.

(b) Er bestaat een functie $F : I \times I \to \mathbb{R}$, continu in elk van zijn variabelen, zo dat

$$f(x) - f(y) = F(x, y)(x - y) \quad \text{voor alle} \quad (x, y) \in I \times I.$$

Opgave 1.29 Definieer

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

In $(0, 0)$ is f niet gedefinieerd. We bestuderen $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

(a) Bepaal de waarde van $f(x, y)$ op een willekeurige rechte lijn door $(0, 0)$. Bepaal de limiet van $f(x, y)$ als (x, y) langs die rechte lijn naar $(0, 0)$ nadert. N.B. Je moet alle mogelijke rechte lijnen door (0,0) onderzoeken.

(b) Bepaal nu het gedrag van $f(x, y)$ op de kromme $x = y^2$ in de buurt van $(0, 0)$.

(c) Bewijs dat niet geldt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Hiervoor kun je bijvoorbeeld een geschikte negatie van de limietdefinitie opstellen en laten zien dat f aan deze negatie voldoet.

(d) Bewijs dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ niet bestaat. Is dit resultaat verrassend? Waarom wel of waarom niet? Plot eventueel de grafiek van de functie met Mathematica.

Opgave 1.30 Stel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zijn functies. We definiëren voor alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} k(x) &= \max\{f(x), g(x)\}, \quad \text{d.w.z. het maximum van } f(x) \text{ en } g(x), \\ h(x) &= \min\{f(x), g(x)\}, \quad \text{d.w.z. het minimum van } f(x) \text{ en } g(x). \end{aligned}$$

Met $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat bedoelen we: er is een $p \in \mathbb{R}$ zo dat $\lim_{x\to a} f(x) = p$.

(a) Bewijs: als $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaat ook, dan bestaan $\lim_{x\to a} h(x)$ en $\lim_{x\to a} k(x)$. Hint: onderscheid eventueel verschillende gevallen.

(b) Geldt het omgekeerde ook? Dat wil zeggen: als $\lim_{x\to a} h(x)$ bestaat en als $\lim_{x\to a} k(x)$ ook bestaat, en de limieten zijn ongelijk, volgt dan dat $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat en dat $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaat? Zo ja, geef een bewijs, en zo nee, geef een tegenvoorbeeld. Laat in het laatste geval precies zien waarom je tegenvoorbeeld niet aan de limietdefinitie voldoet.

(c) Als $\lim_{x\to a} h(x)$ bestaat en $\lim_{x\to a} k(x)$ ook bestaat, en de limieten gelijk zijn aan elkaar, onderzoek dan ook of $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat. Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 1.31 Laat a, b, c, d reële getallen zijn met $a < b$ en $c < d$. Veronderstel dat $f : [a, b] \to [c, d]$ een reële functie is die monotoon stijgend is (als $x < y$ dan $f(x) \leq f(y)$) en surjectief ($f([a, b]) = [c, d]$).

(a) Bewijs dat $f(a) = c$ en $f(b) = d$.

(b) Bewijs dat f continu is.

Opmerking: later zullen we bewijzen dat uit (a) en (b) volgt dat f surjectief is.

Veronderstel nu dat f ook monotoon strikt stijgend is (als $x < y$ dan $f(x) < f(y)$).

(c) Laat zien dat de inverse functie f^{-1} bestaat en continu is op $[c, d]$.

(d) Veronderstel dat de functie $f\colon [0,1] \to [0,1]$ gegeven door $f(x) = x^n$ surjectief is. (We zullen later uit eigenschappen van de reële getallen bewijzen dat dit zo is.)

Laat zien dat de wortelfunctie $x \to \sqrt[n]{x}$ continu is op [0,1].

Opgave 1.32 We schrijven $[x]$ voor het grootste gehele getal dat $\leq x$ is. Definieer voor $x > 0$

$$f(x) = 1 - x\left[\frac{1}{x}\right], \quad g(x) = x - x^2\left[\frac{1}{x}\right], \quad \text{en} \quad f(0) = g(0) = 0.$$

(a) Bewijs dat $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - [\frac{1}{x}])$ niet bestaat.

(b) Ga na of f continu is in 0. Bewijs je bewering.

(c) Ga na waar g differentieerbaar is. Bewijs je bewering. Hint: onderscheid $x = 0, x = \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{Z}_+$ en de overige x.

2 Open en gesloten verzamelingen

Opgave 2.1 Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de vereniging van oneindig veel gesloten verzamelingen niet gesloten hoeft te zijn.

Opgave 2.2 Schets elk van de volgende verzamelingen $V \subset \mathbb{R}^2$, en bepaal tevens het inwendige inw V, de afsluiting $\overline{V}$ en de rand $\overline{V} \setminus \text{inw } V$. Zeg tevens of de verzameling open en/of gesloten of geen van beiden is. U mag volstaan met het geven van antwoorden zonder motivatie.

(a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|(x, y)\| < 1\}$,
(b) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|(x, y)\| \leq 1\}$,
(c) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|(x, y)\| \leq 1,\ y > 0\}$,
(d) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ xy \leq 1\}$,
(e) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x| < 1,\ |y| < 1,\ (x, y) \neq (0, 0)\}$,
(f) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ xy = 1,\ y > 0\}$.

Opgave 2.3 Schets elk van de volgende deelverzamelingen $V \subset \mathbb{R}^2$ en bepaal of hij open of gesloten of geen van beiden is. Bewijs uw beweringen door zoveel mogelijk gebruik te maken van de resultaten van Hoofdstuk 2 uit het dictaat.

(a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y < x^2\}$,
(b) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y \leq x^2\}$,
(c) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 0 \leq y \leq x^2\}$,
(d) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ 0 < y < x^2 \leq 4\}$,
(e) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x| < 1,\ |y| < 1,\ (x, y) \neq (0, 0)\}$,
(f) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ xy = 1,\ y > 0\}$.

Opgave 2.4

(a) Gegeven zijn twee deelverzamelingen $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Toon aan: als A en B gesloten zijn in $\mathbb{R}^n$, dan is $A \cap B$ dat ook.

(b) Toon aan dat iedere eindige doorsnede van gesloten delen van $\mathbb{R}^n$ weer gesloten is in $\mathbb{R}^n$.

(c) Gegeven is een continue functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Toon aan dat voor iedere $c \in \mathbb{R}^m$ de verzameling

$$f^{-1}(\{c\}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$$

gesloten is in $\mathbb{R}^n$. Aanwijzing: combineer het resultaat voor $m = 1$ (dictaat) met onderdeel (b).

(d) We beschouwen de deelverzameling D van $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2 + y^2 = 1 \ \text{ en } \ x + y + z = 1\}.$$

Toon aan dat D gesloten is.

Opgave 2.5 We definiëren de functie $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $\|x\|_1 := \max(|x_1|, |x_2|)$.

(a) Toon aan dat $\|\cdot\|_1$ een norm op $\mathbb{R}^2$ definieert.

De bij $\|\cdot\|_1$ behorende afstand noteren we met d_1. De door deze metriek gedefinieerde bol met middelpunt $a \in \mathbb{R}^2$ en straal $r > 0$ noteren we met $B_1(a; r)$.

(b) Bepaal de open bol $B_1(0; 1)$ met middelpunt $0 = (0, 0)$ en straal 1.

(c) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}^2$ en iedere $\epsilon > 0$ de bol $B_1(a; \epsilon)$ open is ten aanzien van de Euclidische metriek.

(d) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}^2$ en iedere $\epsilon > 0$ de bol $B(a; \epsilon)$ open is ten aanzien van de metriek d_1.

(e) Toon aan dat voor een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ het volgende geldt:

$$A \quad \text{is open ten aanzien van} \quad d \quad \Longleftrightarrow A \quad \text{is open ten aanzien van} \quad d_1.$$

Opgave 2.6 We schrijven $U = \mathbb{R}^n,\ V = \mathbb{R}^m,\ W = \mathbb{R}^{n+m}$, en voorzien deze verzamelingen van de Euclidische metrieken. Zij $a \in U$, $b \in V$. We zien (a, b) als punt van W.

(a) Bewijs dat voor $(x, y) \in U \times V$ geldt: $d_U(x, a) \leq d_W((x, y), (a, b))$ en $d_V(y, b) \leq d_W((x, y), (a, b))$.

(b) Toon aan dat voor iedere $r > 0$ geldt $B_W((a, b); r) \subset B_U(a; r) \times B_V(b; r)$. Laat dmv een schets zien wat dit betekent voor $n = m = 1$.

(c) Gegeven zijn twee open verzamelingen $O_1 \subset U$ en $O_2 \subset V$. Toon aan dat de verzameling $O_1 \times O_2$ open is in W.

Opgave 2.7 Gegeven is een metrische ruimte (V, d), een deelverzameling $A \subset V$ en een punt $p \in \overline{A}$ met $p \notin A$.

(a) Toon aan dat voor iedere $\delta > 0$ de doorsnede $B(p; \delta) \cap A$ oneindig veel elementen bevat.

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de bewering in (a) niet geldig hoeft te zijn als $p \in A$.

(c) Bespreek het verband met het begrip 'accumulation point' dat bij 'Wat is Wiskunde' aan de orde is geweest.

Opgave 2.8 Gegeven is een metrische ruimte V en een deel $A \subset V$.

(a) Toon aan: als A open is, dan bestaat er een functie $\epsilon : A \to]\,0, \infty\,[$ zo dat

$$A = \cup_{a \in A} B(a; \epsilon(a)).$$

Geldt de omgekeerde implicatie ook? Bewijs uw bewering.

In het vervolg veronderstellen we dat V een deel is van $\mathbb{R}^n$ voorzien van de geïnduceerde metriek. Merk op dat voor iedere $p \in V$ en $r > 0$ geldt

$$B_V(p; r) = V \cap B(p; r).$$

(b) Laat O een open deel zijn van $\mathbb{R}^n$. Toon aan dat $O \cap V$ open in V is.

(c) Zij $A \subset V$. Toon aan: als A open is in V dan bestaat er een open verzameling $O \subset \mathbb{R}^n$ zo dat $A = O \cap V$. Hint: gebruik (a).

Opgave 2.9 Zij (V, d) een metrische ruimte. Voor een deelverzameling $A \subset V$ definiëren we de rand $\mathrm{fr}(A)$ door

$$\mathrm{fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{inw}(A).$$

Toon aan: een punt $p \in V$ behoort tot $\mathrm{fr}(A)$ dan en slechts dan als voor elke $\delta > 0$ geldt dat

$$B(p; \delta) \cap A \neq \emptyset \quad \text{en} \quad B(p; \delta) \cap (V \setminus A) \neq \emptyset.$$

Opgave 2.10 Gegeven is een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^n$ en een punt $p \in \mathbb{R}^n$ met $p \notin A$. Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn:

(a) p is een limietpunt van A;

(b) voor iedere $\delta > 0$ is de verzameling $B(p; \delta) \cap A$ oneindig.

Opgave 2.11 Gegeven zijn twee continue functies $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Toon aan dat de verzameling

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < g(x)\}$$

open is.

(b) Zij $c \in \mathbb{R}^n$ en veronderstel dat $f(c) < g(c)$. Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in B(c; \delta)$ geldt $f(x) < g(x)$.

(c) Toon aan dat de verzameling

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = g(x)\}$$

gesloten is.

Opgave 2.12 Gegeven is een metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling $A \subset V$.

(a) Zij p een limietpunt van $\bar{A}$. Toon aan dat p ook een limietpunt van A is. Aanwijzing: zij $\delta > 0$. Toon aan dat $B(p; \frac{1}{2}\delta) \cap \bar{A}$ een punt q bevat. Beschouw vervolgens $B(q; \frac{1}{2}\delta) \cap A$.

(b) Toon aan dat $\bar{A}$ gesloten is.

(c) Toon aan dat voor elke gesloten deelverzameling B van V geldt: $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset B$.

Merk op dat (c) te formuleren is als:

De afsluiting $\bar{A}$ van A is de kleinste gesloten deelverzameling van V die A bevat.

Dit rechtvaardigt de naam 'afsluiting van A.'

Opgave 2.13 Gegeven is een metrische ruimte (V, d) en een deelverzameling $A \subset V$.

(a) Toon aan dat voor iedere open deelverzameling $O \subset V$ geldt: $O \subset A \Rightarrow O \subset \text{inw}(A)$.
(b) Toon aan dat $\text{inw}(A)$ een open deelverzameling van A is.

Conclusie:

Het inwendige $\text{inw}(A)$ *van* A *is de grootste open deelverzameling van* V *die bevat is in* A.

Opgave 2.14 Gegeven is een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$.

(a) Toon aan dat voor iedere $a \in U$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat de kubus

$$V(a; \delta) :=]\, a_1 - \delta, a_1 + \delta\, [\ \times \cdots \times\ ]\, a_n - \delta, a_n + \delta\, [$$

bevat is in U.
(b) We beschouwen de afbeelding $\pi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven door $\pi_1(x) = x_1$. Toon aan dat de verzameling $\pi_1(U)$ open is in $\mathbb{R}$.
(c) Geef een voorbeeld van een gesloten deelverzameling $S \subset \mathbb{R}^2$ zo dat $\pi_1(S)$ niet gesloten is in $\mathbb{R}$.

Opgave 2.15 In deze opgave is V een metrische ruimte en A een deelverzameling van V.

(a) Laat $B \subset V$ en veronderstel dat $A \subset B$. Bewijs dat $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(b) Zij $f : V \to \mathbb{R}$ continu en veronderstel dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in A$. Toon aan dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \overline{A}$.
(c) Zij $f, g : V \to \mathbb{R}$ continu en veronderstel dat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in A$. Toon aan dat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in \overline{A}$.
(d) Geef een voorbeeld van een verzameling $A \subset \mathbb{R}$ en een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) > 0$ voor alle $x \in A$, maar niet $f(x) > 0$ voor alle $x \in \overline{A}$.

Opgave 2.16 Gegeven zijn een metrische ruimte V en een tweetal deelverzamelingen $A, B \subset V$.

(a) Toon aan dat $\text{inw}(V \setminus A) = V \setminus \overline{A}$. Bij een dergelijke vraag, waarbij gevraagd wordt gelijkheid van twee verzamelingen te bewijzen, is het verstandig te proberen twee inclusies te bewijzen.
(b) Toon aan dat $\overline{V \setminus B} = V \setminus \text{inw}(B)$. Probeer dit uit (a) af te leiden.
(c) Toon aan dat $\text{inw}(A \cap B) = \text{inw}(A) \cap \text{inw}(B)$.
(d) Laat zien dat $\text{inw}(A) \cup \text{inw}(B) \subset \text{inw}(A \cup B)$. Laat door middel van een voorbeeld zien dat de omgekeerde inclusie niet altijd hoeft te gelden.
(e) Toon aan dat $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(f) Onderzoek het verband tussen $\overline{A \cap B}$ en $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Opgave 2.17 We definieren als in Opgave 2.5 de maximumnorm $\|x\|_m := \max(|x_1|, |x_2|)$ op $\mathbb{R}^2$ en we kiezen ook een willekeurige norm $\|\cdot\|_w$ op $\mathbb{R}^2$. Hiervan veronderstellen we alleen de eigenschappen in Lemma 1.3 in het dictaat.

(a) Kies $x = (x_1, x_2)$ willekeurig in $\mathbb{R}^2$, en toon aan dat er een constante $q > 0$ bestaat zodat $\|x\|_w \leq q\|x\|_m$. Hint: schrijf $x = x_1(1,0) + x_2(0,1)$.

De bij $\|\cdot\|_i$ behorende afstand noteren we met d_i, en de door de metriek d_i gedefinieerde bol met middelpunt $a \in \mathbb{R}^2$ en straal $r > 0$ noteren we met $B_i(a; r)$, voor $i = w$ en $i = m$.

(b) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}^2$ en iedere $\epsilon > 0$ de bol $B_w(a; \epsilon)$ open is ten aanzien van de metriek d_m.

(c) Bewijs dat voor elke deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ geldt: als A open is in d_w, dan is A open in d_m (en dus ook in de Euclidische metriek volgens Opgave 2.5).

(d) Kun je voor $\mathbb{R}^n$ iets soortgelijks bewijzen, en zo ja, hoe?

Opgave 2.18 Zij (V, d) een metrische ruimte met de afstandfunctie d. We definieren een functie $\tilde{d} : V \times V \to \mathbb{R}$ met de formule

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in V.$$

Bewijs dat $(V, \tilde{d})$ ook een metrische ruimte is.

Hint: Om de driehoeksongelijkheid te bewijzen, laat zien dat voor $a, b, c \geq 0$ de ongelijkheid $a + b - c \geq 0$ impliceert:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq 0\,.$$

Opgave 2.19 We noteren met $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. We kiezen een element ω dat niet in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zit en we definiëren $V := \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\omega\}$. We gaan V van een metriek voorzien.

(a) Definieer $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt

$$0 \leq f(x) < 1 \quad \text{en} \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Maak een plaatje van de grafiek van f (Hint: $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$).

We breiden f uit tot een functie $V \to \mathbb{R}$ door te definiëren $f(\omega) = 1$. Voorts definiëren we voor $x, y \in V$

$$d_2(x, y) := |f(x) - f(y)|.$$

(b) Laat zien dat d_2 een metriek is op V.

(c) Laat zien dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $d_2(x, y) \leq |x - y|$. Kies een vaste $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en laat $0 < \delta \leq 1$. Laat zien dat voor alle $x \in V$ met $|x - a| \leq \delta$ geldt

$$d_2(x, a) \geq \frac{1}{(a+2)^2} \cdot |x - a|.$$

We definiëren nu de functie $g : V \to V$ door

$$\begin{cases} g(0) = \omega, \\ g(\omega) = 0, \\ g(x) = \frac{1}{x}, \quad (x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\}). \end{cases}$$

(d) Laat zien dat voor $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $a > 0$ geldt $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$, ook ten opzichte van de metriek d_2!

(e) Bewijs dat g continu is op V met metriek d_2.

Opgave 2.20 Neem het interval $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ en knip daar het middelste derde $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ uit weg. Er blijven twee intervallen over: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ en $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Uit elk van deze twee intervallen knippen we weer het middelste deel weg. Als we dit proces onbeperkt voortzetten, vinden we als limiet de *Cantorverzameling* Λ.

Bewijs dat Λ gesloten is in $\mathbb{R}$.

3 Rijen en volledigheid

Opgave 3.1 Bepaal de volgende limieten:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+5}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+2}{n^2+1}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3-10}$.

Opgave 3.2 Bepaal voor de volgende rijen $(a_n)_{n\geq 1}$ of ze convergeren, en zo ja, bepaal de limiet, indien a_n wordt gegeven door:

(a) 2^{-n};

(b) $1 + (-1)^n$;

(c) $2^{1/n}$;

(d) $(-1)^n n$;

(e) $(1 + \frac{1}{n}^2)^2$;

(f) $n!$.

Opgave 3.3 We beschouwen de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ gedefinieerd door de recurrente betrekkingen $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$ $(n \geq 1)$. Bewijs de volgende beweringen.

(a) De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ is monotoon stijgend;

(b) De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ is naar boven begrensd;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Opgave 3.4 Zij $0 < a_1 < b_1$, en definieer met inductie:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{(meetkundig gemiddelde)}, \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad \text{(rekenkundig gemiddelde)}. \end{aligned}$$

Bewijs het volgende:

(a) $0 \leq a_n \leq b_n$ voor alle $n \geq 1$;

(b) (a_n) is monotoon stijgend;

(c) (b_n) is monotoon dalend;

(d) (a_n) en (b_n) convergeren en hebben beide dezelfde limiet.

Opgave 3.5 Gegeven is een rij $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ die voldoet aan

$$a_1 > 0 \quad \text{en} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \quad (n \geq 1).$$

Bewijs de volgende beweringen:

(a) Als $a_1 > 3$, dan $3 < a_{n+1} < a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(b) Als $a_1 < 3$, dan $0 < a_n < a_{n+1} < 3$ $(n \in \mathbb{N})$.

(c) $(a_n)_{n\geq 1}$ is convergent.

Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Opgave 3.6 De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ wordt gegeven door

$$a_1 = 2 \quad \text{en} \quad a_{n+1} = (a_n^2 + 3)/2(a_n - 1), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bewijs dat $a_n > a_{n+1} > 3$ voor alle $n \geq 2$. Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ convergeert en bepaal de limiet.

Opgave 3.7 Definieer de rijen

$$a_n := 4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{n}, \qquad b_n := 4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{n+1}, \qquad (n \geq 1).$$

Laat zien dat $(a_n)_{n\geq 1}$ monotoon stijgend is en dat $(b_n)_{n\geq 1}$ monotoon dalend is. Toon aan dat beide rijen convergent zijn en dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Opgave 3.8 Voor elke $n \geq 1$ definiëren we

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(a) Bewijs dat de rij $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ monotoon dalend is.

(b) Bewijs dat de rij $(a_{2n})_{n\geq 1}$ monotoon stijgend is.

(c) Bewijs dat de in (a) en (b) genoemde rijen convergent zijn.

(d) Bewijs dat $a_{2n+1} - a_{2n} \to 0$ voor $n \to \infty$.

(e) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat.

Opgave 3.9 Bepaal

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2-1} + \frac{3}{n^2-2} + \cdots + \frac{n}{n^2-n+1}\right).$$

Aanwijzing: geef eerst een boven- en een ondergrens voor $1/(n^2 - k + 1)$ voor $1 \leq k \leq n$, beide onafhankelijk van k.

Opgave 3.10 Zij $(a_n)_{n\geq 1}$ een rij in $\mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$.

(a) Veronderstel dat $N \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ en dat voor alle $n > N$ geldt $|a_n - a| < \epsilon$. Toon aan dat voor alle $n > N$ geldt

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} a_k - a \right| \leq \epsilon + \frac{N}{n} |a|.$$

(b) Toon aan dat:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a.$$

Opgave 3.11 Laat $r \in \mathbb{R}$ zijn, $r \neq 1$.

(a) Toon aan dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$1 + r + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

(b) Toon aan: als $0 \leq r < 1$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1}{1 - r}.$$

We beschouwen nu een oneindig voortlopende repreterende decimale breuk van de vorm

$$x = 0,\overbrace{c_1 \dots c_p}\overbrace{c_1 \dots c_p}\dots\overbrace{c_1 \dots c_p}\dots,$$

met $p \geq 1$ en $c_1, \dots, c_p \in \{0, \dots, 9\}$. We definiëren de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door

$$a_n = 0,\overbrace{c_1 \dots c_p}\overbrace{c_1 \dots c_p}\dots\overbrace{c_1 \dots c_p} \qquad (n \quad \text{groepjes}).$$

(c) Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

(d) Toon aan dat x een rationaal getal is. Hint: herschrijf a_n op een geschikte manier door onderdeel (a) te gebruiken.

Opmerking. Uit het bovenstaande valt direkt af te leiden dat iedere decimale ontwikkeling die op een gegeven moment periodiek wordt een rationaal getal definieert. Met iets meer moeite kan men laten zien dat omgekeerd iedere decimale ontwikkeling van een rationaal getal op den duur periodiek wordt.

Opgave 3.12 Bewijs voor elk van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ dat zij een infimum en een supremum bezit. Bepaal tevens het infimum en het supremum; bewijs daarbij de juistheid van uw antwoord.

(a) $]-1, 1]$.

(b) $]3,4[\,\cup\{7\}$.
(c) $\{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 \leq 4\}$.
(d) $\{-3\}$.
(e) $\cap_{n=1}^{\infty}[0, 1 + \frac{1}{n}\,[$.

Opgave 3.13 Onderzoek welke van de volgende verzamelingen een supremum of een infimum bezit. Bepaal alle suprema en infima; bewijs daarbij de juistheid van uw antwoorden.

(a) $\{\frac{1}{p} \mid p \in \mathbb{N} \quad \text{priemgetal} \quad \}$.
(b) $\{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$.
(d) $\cap_{n=1}^{\infty}\,]\,1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\,[$.
(e) $\cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.
(f) $\cup_{n=1}^{\infty}[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Opgave 3.14 We beschouwen een niet-lege deelverzameling $V \subset \mathbb{R}$ en een ondergrens a van V. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.

(a) $a = \inf V$;
(b) voor elke $\epsilon > 0$ geldt $[a, a + \epsilon\,[\,\cap V \neq \emptyset$.

Opgave 3.15 We beschouwen twee niet-lege en naar boven begrensde deelverzamelingen V en W van $\mathbb{R}$. We definiëren de som van V en W door $V + W = \{x + y \mid x \in V,\ y \in W\}$.

(a) Toon aan dat $V + W$ naar boven begrensd is en dat $\sup V + \sup W$ een bovengrens voor $V + W$ is.
(b) Toon aan dat $V + W$ een supremum heeft en dat $\sup(V + W) \leq \sup V + \sup W$.
(c) Zij $\delta > 0$. Toon aan dat er een $v \in V$ en een $w \in W$ bestaan met $v > \sup V - \delta/2$ en $w > \sup W - \delta/2$.
(d) Zij $a \in \mathbb{R}$ en veronderstel dat $a < \sup V + \sup W$. Toon aan dat a geen bovengrens is voor $V + W$. Hint: gebruik onderdeel (c) met $\delta = \sup V + \sup W - a$.
(e) Toon aan dat $\sup(V + W) = \sup V + \sup W$.

Opgave 3.16 Voor ieder geheel getal $n \geq 1$ definiëren we het interval I_n door

$$I_n := [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}].$$

Voorts definiëren we de verzameling A door $A = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$.

(a) Toon aan dat $A \subset\,]\,0, 1\,[$.

Definieer de verzameling $B :=]\,0,1\,[\,\setminus A$.

(b) Bewijs dat $\inf A = 0$ en $\inf B = 0$.

Opgave 3.17 Gegeven is een functie $f : [0,1\,[\to [0,1]$ met de eigenschap dat f monotoon stijgend is, d.w.z. $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$.

(a) Toon aan dat de verzameling $f([0,1\,[\,)$ een supremum s heeft.

(b) Zij $\epsilon > 0$. Toon aan dat er een $a \in [0,1\,[$ bestaat zo dat $f(a) > s - \epsilon$.

(c) Laten ϵ, a zijn als in (b). Toon aan dat $f([a,1\,[\,) \subset\,]\,s-\epsilon, s]$.

(d) Toon aan dat

$$\lim_{x\to 1} f(x) = s.$$

Opgave 3.18 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = x^{13} + \frac{31}{2+\sin x}.$$

(a) Bewijs dat er $a, b \in \mathbb{R}$ bestaan met $a < b$ en $f(a) < 0$ en $f(b) > 5$.

(b) Bewijs dat er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat met $f(x) = 5$.

Opgave 3.19 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = x + \frac{1}{x^8 + 2x^6 + 4x^4 + 6x^2 + 8}.$$

(a) Toon aan dat er voor iedere $c \in \mathbb{R}$ een $a \in \mathbb{R}$ bestaat met $f(a) < c$.

(b) Bewijs dat $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Opgave 3.20 Bepaal voor de volgende veeltermfuncties f een geheel getal $n \in \mathbb{Z}$ zo dat $f(x) = 0$ voor een $x \in [n, n+1]$.

(a) $f(x) = x^3 - x + 3$;

(b) $f(x) = x^5 + x + 1$.

Opgave 3.21 Bewijs dat er een reëel getal $x > 0$ bestaat zo dat $\sin x = \frac{1}{2}x$.

Opgave 3.22 Laten $a, b \in \mathbb{R}$ zijn met $a < b$. Van twee continue functies $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ is gegeven dat $f(a) < g(a)$ en $f(b) > g(b)$. Toon aan dat er een $x \in\,]\,a,b\,[$ bestaat met $f(x) = g(x)$.

Opgave 3.23 We beschouwen een interval $I = [a, b]$ ($a < b$) en een continue functie $f : I \to \mathbb{R}$. Gegeven is dat er geen punten $x \in I$ bestaan met $f(x) = x$. Toon aan dat één van de volgende twee uitspraken waar is:

(a) $f(x) > x$ voor alle $x \in I$;

(b) $f(x) < x$ voor alle $x \in I$.

Aanwijzing: beschouw de functie $g(x) = f(x) - x$ en vertaal de aanname voor f in termen van g. Ontken dat (a) of (b) waar is, en leid een tegenspraak af.

Opgave 3.24 Van een continue functie $f : [0, 1\,[\to \mathbb{R}$ is gegeven dat $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ voor $x > 0$ en tenslotte

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

(a) Toon aan dat voor iedere $c > 0$ een $a \in [0, 1\,[$ bestaat met $f(a) > c$.

(b) Bewijs dat $f([0, 1\,[) = [0, \infty\,[$.

Opgave 3.25

(a) Gegeven zijn twee reële getallen $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Toon aan dat er een geheel getal $N \geq 1$ bestaat met $0 < N^{-1} < b - a$. Toon aan dat daarbij een geheel getal $k \in \mathbb{Z}$ bestaat zo dat

$$\frac{k}{N} \in \,]\,a, b\,[\,.$$

(b) Toon aan dat de afsluiting van de collectie $\mathbb{Q}$ der rationale getallen gelijk is aan $\mathbb{R}$. Men zegt ook wel dat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$.

(c) Gegeven is een segment $I \subset \mathbb{R}$ en een tweetal continue functies $f, g : I \to \mathbb{R}$ met $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in I \cap \mathbb{Q}$. Toon aan dat $f = g$.

(d) Toon aan dat voor ieder tweetal $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ een getal $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bestaat zo dat $a < x < b$. Hint: zoek een x van de vorm $x = r\sqrt{2}$, met $r \in \mathbb{Q}$.

(e) Gegeven is een segment $I \subset \mathbb{R}$ en een continue functie $f : I \to \mathbb{R}$. Toon aan: als f op I alleen rationale waarden aanneemt, m.a.w. als $f(I) \subset \mathbb{Q}$, dan is de functie f constant.

Opgave 3.26 Gegeven is een dalende rij segmenten $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Toon aan dat de rijen $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ convergeren. Noem de limieten van deze rijen a, respectievelijk b.

(b) Toon aan dat $a \leq b$ en dat $[a, b] \subset \cap_{n\geq 0} I_n$.

(c) Bewijs dat $[a, b] = \cap_{n\geq 0} I_n$.

Opgave 3.27 Voor (V, d) een metrische ruimte en $A \subset V$ een deelverzameling definiëren we de karakteristieke functie $\chi_A : V \to \mathbb{R}$ door

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x \in A, \\ 0 & \text{als} \quad x \in V \setminus A. \end{cases}$$

(a) Bepaal alle mogelijke volledige originelen

$$\chi_A^{-1}(Y) := \{x \in V \mid \chi_A(x) \in Y\},$$

met $Y \subset \mathbb{R}$.

(b) Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn.

(1) A is open en gesloten;

(2) de functie χ_A is continu.

De metrische ruimte V heet **samenhangend** als $\emptyset$ en V de enige deelverzamelingen van V zijn die zowel open als gesloten zijn.

(c) Toon aan dat $\mathbb{R}$ samenhangend is. Hint: gebruik de tussenwaardestelling.

(d) Zij $p \geq 1$. Toon aan dat $\mathbb{R}^p$ samenhangend is. Hint: veronderstel niet, en zij $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}^p$ een open en gesloten deelverzameling. Kies $a \in A$ en $b \in \mathbb{R}^p \setminus A$ en beschouw de functie $f : t \mapsto \chi_A(a + t(b - a)), \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Opgave 3.28 Laat $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ een continue functie zijn met de volgende eigenschappen:

(1) f is strikt monotoon stijgend;

(2) er is een $x_0 > 0$ zodat $f(x_0) = x_0$;

(3) voor alle x met $0 \leq x < x_0$ geldt $f(x) > x$;

(4) voor alle x met $x > x_0$ geldt $f(x) < x$.

Laat nu $c \geq 0$. We definiëren de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ door $a_1 = c$ en $a_{n+1} = f(a_n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel eerst $c < x_0$.

(a) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ strikt monotoon stijgend is.

(b) Toon aan dat de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ begrensd is.

(c) Laat zien dat $\lim_{n \to \infty} a_n$ bestaat, en bepaal deze limiet.

(d) Behandel nu het geval $c \geq x_0$.

(e) Ga na in hoeverre Opgaven 3.3, 3.5 (en eventueel 3.6) met behulp van de huidige opgave behandeld kunnen worden.

Bedenk zelf een opgave als 3.3, 3.5 of 3.6, waarbij voor de rij $(a_n)_{n \geq 1}$ de relatie tussen a_n en a_{n+1} concreet gegeven is.

Opgave 3.29 Zij V een metrische ruimte. We noemen V samenhangend indien $\emptyset$ en V de enige deelverzamelingen van V zijn die tegelijk open en gesloten zijn.

(a) Laat zien dat V onsamenhangend (d.w.z. niet samenhangend) is dan en slechts dan als $V = O \cup U$ met O, U niet lege open deelverzamelingen van V die disjunct zijn (d.w.z. lege doorsnede hebben).

(b) Zij V samenhangend en $f : V \longrightarrow W$ continu. Ga na dat $f(V) \subseteq W$ dan eveneens samenhangend is (een deelverzameling van een metrische ruimte is samenhangend indien deze als metrische ruimte (voorzien met de geïnduceerde metriek) samenhangend is).

Als $p, q \in V$ dan verstaan we onder een kromme in V met beginpunt p en eindpunt q een continue afbeelding $c : [a, b] \to V$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), met $c(a) = p$ en $c(b) = q$. De ruimte V heet *boogsamenhangend* indien er voor ieder tweetal punten $p, q \in V$ een kromme in V bestaat met beginpunt p en eindpunt q.

(c) Toon aan dat elke boogsamenhangende metrische ruimte samenhangend is.

(d) Geldt ook andersom dat elke samenhangende metrische ruimte boogsamenhangend is?

(e) Laat zien dat elke samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}$ boogsamenhangend is.

Opgave 3.30 Gegeven is een afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ met de eigenschap dat

$$2\,\|f(x, y) - f(x', y')\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \quad \text{voor alle } (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Laat zien dat f continu is.

Definieer het rijtje $((x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ inductief door

$$(x_0, y_0) = (0, 0) \quad \text{en} \quad (x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n)$$

(b) Ga na dat $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is. Hint: bereken eerst de afstand tussen (x_n, y_n) en (x_{n+1}, y_{n+1}) in termen van $\|f(0, 0)\|$.

(c) Concludeer dat de limieten $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ en $\eta = \lim_{n\to\infty} y_n$ bestaan en bewijs dat $f(\xi, \eta) = (\xi, \eta)$.

4 Maxima en minima

Opgave 4.1 Het doel van deze opgave is te laten zien waarom in het laatste deel van het bewijs van Stelling 4.5 een deelrij van een deelrij genomen is. We beschouwen een begrensde rij in $\mathbb{R}^2$ (dit komt overeen met $p = 1$), namelijk de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ die inductief gedefinieerd wordt door $a_0 = (1,1)$ en $a_{n+1} = Ra_n$. Hierin is $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de rotatie over hoek $\pi/2$, dus $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Schets de punten a_n, $n \geq 0$.

(b) Laat zien dat $a_{n+4} = a_n$ voor alle n.

We noteren een punt $x \in \mathbb{R}^2$ in coordinaten met $x = (x', x'')$.

(c) Laat zien dat er rijen $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ en $\tilde{n}_0 < \tilde{n}_1 < \tilde{n}_2 < \cdots$ van indices bestaan zo dat $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{\tilde{n}_l \mid l \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ en zo dat $\lim_{k\to\infty} a'_{n_k}$ en $\lim_{k\to\infty} a''_{\tilde{n}_k}$ bestaan.

(d) Laat zien dat er een rij $m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ bestaat zo dat $\lim_{k\to\infty} a'_{m_k}$ bestaat, terwijl $\lim_{k\to\infty} a''_{m_k}$ niet bestaat.

(e) Laat zien dat er een rij $k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$ bestaat zo dat $\lim_{j\to\infty} a''_{m_{k_j}}$ bestaat. Laat zien dat $\lim_{j\to\infty} a_{m_{k_j}}$ bestaat en bepaal deze limiet.

Opgave 4.2 Het doel van deze opgave is: een kennismaking met een karakterisering van volledigheid die op tal van plaatsen in de analyse van belang is.

Definitie: Zij (V, d) een metrische ruimte. Een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V heet een **Cauchy-rij** als voor iedere $\epsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor alle $n, m \geq N$ geldt $d(a_n, a_m) < \epsilon$.

(a) Zij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente rij in de metrische ruimte V. Toon aan dat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is. Aanwijzing: zij b de limiet van de rij en gebruik de driehoekongelijkheid voor b_m, b, b_n.

In het algemeen hoeft een Cauchy-rij niet convergent te zijn. In de volgende onderdelen wordt gevraagd aan te tonen dat een Cauchy-rij wel altijd begrensd is.

(b) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in een metrische ruimte V. Toon aan dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $a_n \in B(a_N; 1)$ voor alle $n \geq N$.

(c) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als in (b). Toon aan dat er een $b \in V$ en een $R > 0$ bestaan zo dat $a_n \in B(b; R)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Definitie: Een metrische ruimte V heet **volledig** indien iedere Cauchy-rij in V convergent is.

(d) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}^p$, $(p \geq 1)$. Toon aan dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ heeft.

(e) Zij $a \in \mathbb{R}^p$ de limiet van de genoemde deelrij $(a_{n_j})_{j\geq 1}$. Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Aanwijzing: gebruik de driehoeksongelijheid voor elementen van de vorm a_n, a_{n_j}, a

(f) Concludeer dat $\mathbb{R}^p$ volledig is.

Opgave 4.3 Deze opgave sluit aan op de vorige. Hij illustreert een belangrijke toepassing van volledigheid op de theorie van de reeksen.

Definitie: Onder een reeks in $\mathbb{R}^p$, $(p \geq 1)$ verstaan we een uitdrukking van de vorm $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$, met $a_k \in \mathbb{R}^p$ voor $k \in \mathbb{N}$. (Een reeks wordt zodoende bepaald door de rij $(a_k)_{k \geq 0}$ van termen, waarbij de notatie aangeeft dat we de intentie hebben te sommeren.) Onder de $n-$de partiële som van de reeks verstaan we de eindige som $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. De bovenstaande reeks heet **convergent** als $\lim_{n \to \infty} s_n$ bestaat. In dat geval gebruiken we voor deze limiet de notatie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Een niet convergente reeks heet *divergent*.

(a) Zij $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ en $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als boven. Toon aan dat $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor alle $p, q \in \mathbb{N}$ met $q \geq p > N$ geldt:

$$\| \sum_{k=p}^{q} a_k \| < \epsilon.$$

(b) Zij $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ een reeks in $\mathbb{R}^p$. De n-de partiële som van deze reeks noteren we met s_n. Merk op dat $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|a_k\|$ een reeks in $\mathbb{R}$ is. De n-de partiële som van deze reeks noteren we met t_n. Bewijs: als $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is, dan is $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchy rij in $\mathbb{R}^p$.

(c) We gebruiken de notatie van (b). Bewijs: als de reeks $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|a_k\|$ convergeert, dan convergeert ook de reeks $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$. Bovendien geldt

$$\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|.$$

We illustreren de hierboven behandelde theorie aan de hand van de uit de infinitesimaalrekening bekende reeks voor de exponentiële functie.

Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de reeks

$$\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad (*).$$

De n-de partiële som van deze reeks noteren we met $s_n(x)$.

(d) Zij $N \in \mathbb{N},\ N \geq 1$. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2N$ geldt

$$\frac{N^n}{n!} \leq \frac{N^{2N}}{(2N)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2N}.$$

Toon aan dat de rij $(s_n(N))_{n \in \mathbb{N}}$ naar boven begrensd is.

(e) Zij $x \geq 0$. Toon aan dat de rij $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ monotoon stijgend en naar boven begrensd is.

(f) Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Toon aan dat de reeks (*) convergeert. We definiëren de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Toon aan dat $|f(x)| \leq f(|x|)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Later zullen we aantonen dat $f(x) = e^x$.

Opgave 4.4 Gegeven is een metrische ruimte (V, d). Toon aan dat de volgende eigenschappen equivalent zijn.

(a) V is rij-compact.

(b) Voor iedere deelverzameling $A \subset V$ met oneindig veel elementen bestaat een punt $x \in V$ zo dat voor iedere $\delta > 0$ de verzameling $B(x; \delta) \cap A$ oneindig veel elementen heeft.

Hint voor '(a) $\Rightarrow$ (b)': kies een geschikte rij (a_n) in A.
Hint voor '(b) $\Rightarrow$ (a)': beschouw een rij (a_n) in V en onderscheidt de gevallen dat de verzameling $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eindig of oneindig veel elementen bevat.

Opgave 4.5 Gegeven is een continue afbeelding $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ met de eigenschap dat het volledig origineel $f^{-1}(A)$ van ieder gesloten en begrensd deel $A \subset \mathbb{R}^q$ gesloten en begrensd is in $\mathbb{R}^p$.

(a) Laat $(x_k)_{k \geq 1}$ en rij in $\mathbb{R}^p$ zijn zo dat de rij $(f(x_k))_{k \geq 1}$ convergent is met limiet $b \in \mathbb{R}^q$. Toon aan dat $(x_k)_{k \geq 1}$ een convergente deelrij heeft. Zij a de limiet van die convergente deelrij. Toon aan dat $f(a) = b$.

(b) Gegeven is een gesloten deel $V \subset \mathbb{R}^p$. Toon aan dat $f(V)$ een gesloten deel van $\mathbb{R}^q$ is.

(c) Bedenk zelf een uitbreiding van het bovenstaande naar een zo algemeen mogelijke context.

Opgave 4.6 Gegeven is een niet-lege verzameling $V \subset \mathbb{R}^p$ en een punt $a \in \mathbb{R}^p$. Voor $x, y \in \mathbb{R}^p$ noteren we $d(x, y) = \|x - y\|$ (de Euclidische metriek op $\mathbb{R}^p$).

(a) Toon aan dat

$$\inf\{d(a, x) \mid x \in V\}$$

bestaat. Dit getal noemen we de afstand van a tot V en noteren we met $d(a, V)$.

(b) Toon aan dat a een limietpunt is van V dan en slechts dan als $d(a, V) = 0$.

Neem nu aan dat de verzameling V gesloten is.

(c) Toon aan dat $a \in V \iff d(a, V) = 0$.

(d) Toon aan dat er een $b \in V$ bestaat zo dat $d(a, V) = d(a, b)$. Hint: beschouw de verzameling $V \cap \overline{B(a; R)}$ voor een geschikt gekozen $R > 0$.

Opgave 4.7 We beschouwen de verzameling V van begrensde functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Met de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is V een reële lineaire ruimte.

(a) Toon aan dat voor iedere $f \in \mathcal{B}$ het getal

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \quad | \; x \in \mathbb{R}\}$$

bestaat.

(b) Toon aan dat $\|\cdot\|$ een norm op V is.

Zij B de verzameling $f \in V$ met $\|f\| \leq 1$. Ga na dat B een gesloten en begrensd deel van V is.

(c) Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f_n = 1$ op $[2n, 2n+1]$ en door $f_0 = 0$ op $\mathbb{R} \setminus [2n, 2n+1]$. Toon aan dat de rij $(f_n)_{n \geq 1}$ tot B behoort en geen convergente deelrij heeft.

(d) Toon aan dat B niet rij-compact is.

Opgave 4.8 Gegeven is een metrische ruimte (V, d) en een rij-compacte deelverzameling $D \subset V$.

(a) Toon aan dat iedere gesloten deelverzameling van D weer rij-compact is.

(b) Gegeven is een collectie gesloten niet-lege deelverzamelingen $A_n \subset V$, voor $n \in \mathbb{N}$, met de eigenschap dat $A_0 = D$ en $A_n \supset A_{n+1}$ voor alle $n \geq 0$. Toon aan dat de doorsnede

$$A := \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

niet-leeg en rij-compact is. Hint: beschouw een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $a_n \in A_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(c) Geef een voorbeeld van een rij A_n van niet-lege gesloten delen van $\mathbb{R}$ met $A_n \supset A_{n+1}$ voor elke n, zo dat $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

(d) Geef een voorbeeld van een rij A_n van niet-lege begrensde delen van $\mathbb{R}$ met $A_n \supset A_{n+1}$ voor elke n, zo dat $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Opgave 4.9 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$.

(a) Bereken alle stationaire punten van f.

(b) Onderzoek in alle stationaire punten of f een lokaal maximum, een lokaal minimum of geen van beide heeft. Aanmwijzing: teken het nulvniveau van f en gebruik de maximum-minimum stelleing.

Opgave 4.10 De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.

(a) Bewijs dat f vier stationaire punten heeft.

(b) Bewijs dat f in precies één van deze punten een extremum heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau en gebruik de maximum-minimum stelling.

Opgave 4.11 De functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (met $n \geq 2$) is gedefinieerd door $f(x) = \langle x, x\rangle^2 - \langle a, x\rangle^2$, waarin a een vaste vector in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ is.

(a) Bewijs dat
$$f^{-1}(\,]-\infty, 0\,[\,) \subset B(0; \|a\|).$$

(b) Bewijs dat $(\operatorname{grad} f)(x) = 4\langle x, x\rangle x - 2\langle a, x\rangle a$.

(c) Bewijs dat f twee lokale minima heeft en bereken deze. Aanwijzing: gebruik de maximum-minimum stelling op $\bar{B}(0; \|a\|) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \|a\|\}$ en merk op dat $f(-x) = f(x)$.

(d) Geef met behulp van een tekening voor het geval $n = 2$ de tekenverdeling van de functie f.

Opgave 4.12 Beschouw de veeltermfunctie
$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x + xy^2$$
van twee variabelen. Bereken de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$, en bepaal de kritieke punten. Onderzoek of $f|_{V_+}$ zijn maximum en/of minimum aanneemt op het rechter halfvlak
$$V_+ = \{(x, y) \mid x \geq 0\},$$
en tevens of $f|_{V_-}$ dat doet op het linker halfvlak
$$V_- = \{(x, y) \mid x \leq 0\}.$$
Is dit zo, bepaal dan ook het maximum, resp. minimum. Beantwoord tenslotte dezelfde vragen met $f(x, y)$ vervangen door $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x - xy^2$.

Opgave 4.13 Bepaal van elk van de volgende functies of hij wel of niet uniform continu is. Bewijs de juistheid van uw bewering.

(a) $x \mapsto x^3$ op $\mathbb{R}$

(b) $x \mapsto x^3$ op $[0, 1]$.

(c) $x \mapsto \sqrt{x}$ op $[1, \infty\,[$.

(d) $x \mapsto \sqrt{x}$ op $[0, \infty\,[$.

Opgave 4.14 In deze opgave beschouwen we functies op $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$.

(a) Toon aan dat de functie $f : x \mapsto \|x\|$, $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ uniform continu is.

(b) Toon aan dat de functie $g : x \mapsto \|x\|^2$, $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ niet uniform continu is.

(c) Toon aan dat de functie $h : x \mapsto \sqrt{\|x\|}$, $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ uniform continu is.

Opgave 4.15 De functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn uniform continu op $\mathbb{R}$.

(a) Bewijs: de functie $f + g$ is uniform continu op $\mathbb{R}$.
(b) Bewijs: de samenstelling $g \circ f$ is uniform continu op $\mathbb{R}$.
(c) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de produktfunctie fg niet noodzakelijk uniform continu is op $\mathbb{R}$.
(d) Veronderstel nu dat bovendien gegeven is dat f, g begrensd zijn op $\mathbb{R}$. Bewijs dat fg uniform continu is op $\mathbb{R}$.

Opgave 4.16 Gegeven is een continue functie $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ met $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Zij $\epsilon > 0$.

(a) Toon aan dat er een $R \geq 0$ bestaat zo dat

$$x, y > R \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(b) Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in [0, R + 1]$ geldt

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(c) Toon aan dat de functie f uniform continu is op het interval $[0, \infty[$.

Opgave 4.17 We beschouwen een functie $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|, \qquad (x, y \in \mathbb{Q}).$$

(a) Zij $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ een Cauchy-rij. Toon aan dat $(g(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is in $\mathbb{R}$.
(b) Zij $x \in \mathbb{R}$ en laten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rijen rationale getallen zijn met $\lim a_n = \lim b_n = x$. Toon aan dat de rijen $(g(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $(g(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeren met dezelfde limiet. Aangezien die limiet niet afhankelijk is van de gekozen rij, noteren we hem in het vervolg met $f(x)$.
(c) Bewijs dat $f = g$ op $\mathbb{Q}$.
(d) Toon aan dat $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.
(e) Toon aan dat f continu is.

Opgave 4.18 We beschouwen een rij $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van gesloten en begrensde deelverzamelingen $B_n \subset \mathbb{R}^p$, met de eigenschap dat $B_n \supset B_{n+1} \supsetneq \emptyset$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (de rij is dus monotoon dalend). Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ kiezen we een element $a_n \in B_n$.

(a) Toon aan dat de rij (a_n) een convergente deelrij heeft. Noem de limiet van die deelrij x.
(b) Toon aan dat $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
(c) Toon aan dat het volledigheidsaxioma voor $\mathbb{R}$ gelijkwaardig is met de stelling van Bolzano-Weierstrass voor $\mathbb{R}^n$.

Opgave 4.19 Laten $a, b \in \mathbb{R}$ reële getallen zijn met $a < b$. We beschouwen een rij continue functies $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $f_n \leq f_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voorts veronderstellen we dat er een continue functie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor elke $x \in [0, 1]$ geldt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

(a) Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $f_n \leq f$ op $[a, b]$.

(b) Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en $\epsilon > 0$ definiëren we de verzameling $A_{n,\epsilon} = \{x \in [a, b] \mid f_n(x) \leq f(x) - \epsilon\}$. Toon aan dat deze verzameling gesloten en begrensd is.

(c) Zij $\epsilon > 0$. Toon aan: $\cap_{n\geq 0} A_{n,\epsilon} = \emptyset$.

(d) Zij $\epsilon > 0$. Toon aan: $A_{n,\epsilon} \supset A_{n+1,\epsilon}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(e) Zij $\epsilon > 0$. Toon aan: er bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $A_{N,\epsilon} = \emptyset$. Hint: gebruik Opgave 4.18.

(f) Toon aan dat er voor alle $\epsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$n \geq N \Rightarrow f - \epsilon < f_n \leq f \quad \text{op} \quad [a, b].$$

Opgave 4.20 We beschouwen een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in een metrische ruimte (V, d). Onder een **limietpunt** van de rij verstaan we een getal $a \in \mathbb{N}$ met de eigenschap dat voor iedere $\epsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $a_n \in B(a; \epsilon)$. Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn, voor elke $a \in V$.

(a) Er bestaat een deelrij $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

(b) Het punt a is een limietpunt van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Opgave 4.21 Gegeven is een begrensde rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. We definiëren een nieuwe rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door

$$b_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

(a) Bespreek waarom dit een correcte definitie is.

(b) Toon aan dat de rij (b_n) monotoon dalend is.

(c) Toon aan dat de rij (b_n) convergent is.

De limiet van de rij (b_n) wordt ook wel genoteerd met

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

In het vervolg schrijven we $\lambda := \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(d) Zij $\epsilon > 0$. Toon aan dat er voor elke $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $b_n - \epsilon < \lambda \leq b_n$. Toon aan dat hierbij een $k \geq n$ bestaat zo dat $b_n - \epsilon < a_k \leq b_n$.

(e) Toon aan dat λ een limietpunt is van de rij (a_n).

(f) Zij μ een limietpunt van de rij (a_n). Zij $\epsilon > 0$. Toon aan dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $b_N < \lambda + \frac{1}{2}\epsilon$. Toon aan dat hierbij een $k \geq N$ bestaat zo dat $\mu < a_k + \frac{1}{2}\epsilon$. Toon aan dat $\mu \leq \lambda + \epsilon$. Bewijs dat $\mu \leq \lambda$.

Zij L de verzameling limietpunten van de rij (a_n).

(g) Toon aan dat $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max L$.

(h) Definieer en bespreek een vergelijkbare limiet $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Merk in het bijzonder op dat $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min L$.

Opgave 4.22 We beschouwen een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in een metrische ruimte (V, d). Zij L de verzameling limietpunten van de rij (a_n).

(a) Zij $\lambda \in \bar{L}$. Toon aan dat er bij elke $\epsilon > 0$ en elke $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $d(\lambda, a_n) < \epsilon$. Hint: beschouw eerst $B(\lambda; \frac{1}{2}\epsilon) \cap L$.

(b) Toon aan dat L gesloten is.

Opgave 4.23 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) := \sin(x) \cdot \cos(y).$$

(a) Bereken alle stationaire punten van f op $\mathbb{R}^2$.

(b) Bepaal de nulniveauverzameling van f. Hint: schets een plaatje.

(c) Geef de relatieve maxima van f en bewijs dat je ook echt alle relatieve maxima hebt gevonden.

(d) Laat zien dat elk relatief minimum van f een absoluut minimum is.

Opgave 4.24 Zij D een rij-compacte metrische ruimte.

(a) Laat zien dat er voor elke $\varepsilon > 0$ eindig veel punten $x_1, \ldots, x_n \in D$ zijn met

$$D \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k; \varepsilon).$$

Een metrische ruimte met de in (a) geformuleerde eigenschap noemt men pre-compact (in het Engels ook *totally bounded*, een sterke vorm van begrensdheid).

(b) Toon aan dat (omgekeerd) elke metrische ruimte die volledig en pre-compact is ook rij-compact is.

(c) Concludeer dat in een volledige metrische ruimte V een deelverzameling $A \subseteq V$ rij-compact is dan en slechts dan als A gesloten en pre-compact is.

Opgave 4.25 De functie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{voor } x = \frac{p}{q}, \quad p \text{ en } q \text{ zonder gemeenschappelijke delers} \\ 0 & \text{voor } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Ga na dat f in geen enkel punt van $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ continu is.

(b) Bepaal de verzameling D van punten waarin f *wel* continu is.

(c) Is de restrictie $f_{|D} : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ook uniform continu?

(d) Leg uit waarom je (c) onafhankelijk van het antwoord nooit zou kunnen gebruiken om (b) op te lossen.

5 Inversen van functies van een variabele

Opgave 5.1 We beschouwen de functie $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^6 + 4x^4 + x^2$. Bewijs dat f een inverse g heeft. Wat zijn het definitiegebied en het beeld van deze inverse? Laat zien dat de inverse differentieerbaar is in 6 en bepaal $g'(6)$.

Opgave 5.2 Gegeven zijn een monotoon dalende functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en een punt $a \in \mathbb{R}$. Gegeven is voorts dat voor elke $\epsilon > 0$ getallen $p < a$ en $q > a$ bestaan zo dat $f(p) - f(q) < \epsilon$. Bewijs dat de functie f continu is in a.

Opgave 5.3 In het vervolg mag u de bekende eigenschappen van de functie $x \mapsto \sin x$ gebruiken. Voorts mag u gebruiken dat de beperking f van de functie tot het interval $I :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ monotoon strikt stijgend is.

(a) Bepaal het beeld J van de functie f. Motiveer uw antwoord.

(b) Zij $g : J \to I$ de inverse van de functie f. Laat zien dat de functie g differentieerbaar is, en bepaal een formule voor $g'(y)$, $y \in J$.

Opgave 5.4 In het vervolg mag u de bekende eigenschappen van de functie $x \mapsto e^x$ gebruiken. Voorts mag u gebruiken dat de functie $f = \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (e^x - e^{-x})/2$ monotoon strikt stijgend is.

(a) Toon aan dat f een inverse $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heeft.

(b) Toon aan dat de inverse gegeven wordt door

$$g(y) = \log(y + \sqrt{1 + y^2}), \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

(c) Toon aan dat g differentieerbaar is en bepaal een formule voor de afgeleide van g, zonder gebruik te maken van de in (b) gevonden formule. Aanwijzing: laat eerst zien dat $f'(x)^2 - f(x)^2 = 1$.

(d) Controleer het in (c) gevonden antwoord door differentiëren van de in (b) gevonden formule.

Opgave 5.5 Gegeven zijn metrische ruimten V, W, een rij-compacte verzameling $A \subset V$ en een continue afbeelding $f : A \to W$. Zoals we weten is het beeld $B = f(A)$ weer rij-compact. We veronderstellen voorts dat f injectief is. Derhalve heeft f een inverse $g : B \to A$. Doel van deze opgave is aan te tonen dat g continu is. We redeneren uit het ongerijmde en veronderstellen dat g niet continu is.

(a) Toon aan dat er een punt $b \in B$ bestaat waarvoor niet geldt dat $\lim_{y\to b} g(y) = g(b)$.

(b) Toon aan dat er een een constante $\epsilon > 0$ bestaat en een rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B met $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ en $d_V(g(b_n), g(b)) > \epsilon$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Schrijf $a_n := g(b_n)$. Laat zien dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ heeft. Noem de limiet van die deelrij a. Toon aan dat $f(a) = b$.

(d) Voltooi het bewijs.

Opgave 5.6 Doel van deze opgave is het bewijs van Lemma 5.4 uit het diktaat op een andere manier te bekijken. We beschouwen een interval $I \subset \mathbb{R}$ en een continue functie $f : I \to \mathbb{R}$. We beschouwen de deelverzameling $V = I \times I$ van $\mathbb{R}^2$ en de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x, y) = f(x) - f(y)$.

(a) Toon aan dat de functie F continu is.

Zij $V^+ := \{(x, y) \in V \mid y > x\}$.

(b) Toon aan dat f injectief is dan en slechts dan als F geen nulpunten heeft op V^+.

(c) Bewijs dat de functie f strikt monotoon is dan en slechts dan als F een vast teken heeft op V^+, dwz overal strikt positief of overal strikt negatief is.

(d) Veronderstel dat $a, b \in V^+$. Toon aan dat voor alle $t \in [0, 1]$ geldt $c(t) := (1-t)a + tb \in V^+$.

(e) We veronderstellen nu dat f bovendien injectief is. Laat $a, b \in V^+$. Toon aan dat $F(a) > 0 \iff F(b) > 0$. Hint: bekijk $F(c(t))$. Bewijs dat de functie f monotoon strikt stijgend is of monotoon strikt dalend.

Opgave 5.7 Zij $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ een strikt monotone functie.

(a) Laat zien dat f inverteerbaar is.

(b) Wat kun je over $f(\mathrm{Dom}(f))$ zeggen? Beschrijf i.h.b. het geval dat $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ een interval is.

(c) Toon aan dat $f^{-1} : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ continu is indien $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$ een interval is en geef een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat dit niet waar hoeft te zijn indien $\mathrm{Dom}(f)$ onsamenhangend is. Hint: herlees de preciese definitie van continuïteit.

6 Middelwaardestellingen

Opgave 6.1 Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie.

(a) Stel dat f twee verschillende nulpunten a en b in I heeft, d.w.z., $f(a) = f(b) = 0$. Bewijs dat de afgeleide f' een nulpunt heeft dat tussen a en b ligt.

(b) Veronderstel nu dat f in I n verschillende nulpunten heeft, ($n \geq 2$). Bewijs dat f' minstens $n-1$ verschillende nulpunten in I heeft.

(c) Bewijs dat de vergelijking $\tan x = x$ oneindig veel oplossingen $x \in]0, \infty[$ heeft. Hint: Pas (b) toe op de functie $f(x) = \sin x / x$.

Opgave 6.2

(a) Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een veeltermfunctie van de graad $n \geq 1$ zijn, en veronderstel dat $x_1 \in \mathbb{R}$ een nulpunt van f is. Toon aan dat er een unieke continue functie $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat $f(x) = q(x)(x - x_1)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat q een veeltermfunctie van de graad $n - 1$ is.

(b) Toon aan dat een veeltermfunctie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van de graad n ten hoogste n verschillende reële nulpunten heeft.

We definiëren de functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voor $n \in \mathbb{N}$ met inductie als volgt. De functie f_0 is constant 1, en voor elke $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}((x^2 - 1) f_n(x)).$$

(c) Bereken $f_n(x)$ voor $n = 1, 2, 3, 4$.

(d) Bewijs dat f_n een veeltermfunctie van de graad n is, voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(e) Bewijs, voor elke $n \in \mathbb{N}$, dat f_n precies n nulpunten heeft, die alle in het open interval $]-1, 1[$ gelegen zijn.

Opgave 6.3 Laat $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, en laten $p, q \in \mathbb{R}$ willekeurig zijn. We beschouwen de veeltermfunctie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x^n + px + q$.

(a) Veronderstel dat n oneven is. Bewijs dat f minstens één en maximaal drie nulpunten in $\mathbb{R}$ heeft.

(b) Veronderstel nu dat n even is. Bewijs dat f maximaal twee nulpunten in $\mathbb{R}$ heeft.

Opgave 6.4 Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en $a \in I$. Gegeven is een continue functie $f : I \to \mathbb{R}$. Veronderstel dat f differentieerbaar is op $I \setminus \{a\}$ en dat $\lim_{x \to a} f'(x)$ bestaat. Bewijs dat f differentieerbaar is op I en dat f' continu is in a.

Opgave 6.5 Gegeven zijn een differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en een constante $c > 0$ met de eigenschap dat $f'(x) \geq c$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Toon aan dat voor alle $x \geq 0$ geldt:

$$f(x) \geq f(0) + cx.$$

(b) Toon aan dat voor alle $x \leq 0$ geldt:

$$f(x) \leq f(0) + cx.$$

(c) Toon aan dat f een bijectie is van $\mathbb{R}$ op $\mathbb{R}$.

De inverse van f noemen we g.

(d) Toon aan dat g differentieerbaar is en dat voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt:

$$0 < g'(y) \leq \frac{1}{c}.$$

Opgave 6.6 Stelling van Darboux. Uit eerder behandelde voorbeelden weet u dat een afgeleide functie niet noodzakelijkerwijs continu hoeft te zijn. Zie ook Opgave 1.19. Toch is een afgeleide altijd doorlopend, zoals u in deze opgave zult bewijzen.

Gegeven is een differentieerbare functie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ met $g'(a) < 0$ en $g'(b) > 0$.

(a) Zij $r \in \mathbb{R}$ zo dat $g'(a) < r < 0$. Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in]\, a, a+\delta\, [$ geldt:

$$g(x) < g(a) + r(x - a).$$

Hint: gebruik de definitie van $g'(a)$.

(b) Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in]\, a, a + \delta\, [$ geldt: $g(x) < g(a)$.

(c) Toon aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in]\, b - \delta, b\, [$ geldt: $g(x) < g(b)$.

(d) Toon aan dat er een $c \in]\, a, b\, [$ bestaat waarin g zijn minimum op $[a, b]$ aanneemt.

(e) Toon aan dat er een $c \in]\, a, b\, [$ bestaat zo dat $g'(c) = 0$.

(f) Gegeven is nu een differentieerbare functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ met $f'(a) < f'(b)$. Toon aan dat voor iedere $p \in \mathbb{R}$ met $f'(a) < p < f'(b)$ een $c \in]\, a, b\, [$ bestaat zo dat $f'(c) = p$. Hint: beschouw de functie $g(x) = f(x) - px$.

Opgave 6.7 Zij $M > 0$.

(a) Gegeven is een differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $|f'(x)| \leq M$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt:

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

(b) Gegeven is nu een differentieerbare functie $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $\|\operatorname{grad}\varphi(x)\| \leq M$ voor alle $x \in \mathbb{R}^p$. Bewijs dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}^p$ geldt:

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq M\|y - x\|.$$

Hint: beschouw de functie $g : t \mapsto \varphi(x + t(y - x))$ en pas een uit de infinitesimaalrekening bekende kettingregel toe.

(c) Toon aan dat φ uniform continu is op $\mathbb{R}^p$.

Opgave 6.8 Bepaal de volgende limieten:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{x}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 + \frac{1}{3}x}{x^2}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{(\sin x)^2}$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$

Doel van de volgende twee opgaven is een ander bewijs te geven van Stelling 5.6 uit het dictaat.

Opgave 6.9 Gegeven is een interval $I \subset \mathbb{R}$ en een rij $(a_n)_{n\geq 0}$ in I die convergent is met een in I gelegen limiet a.

(a) Toon aan: als a geen bovengrens is van de verzameling $A := \{a_n \mid n \geq 0\}$, dan heeft A een maximaal element.

(b) Toon aan: als A geen maximaal element heeft, dan is $a = \sup\{a_n | n \geq 0\}$.

(c) Toon aan: $\sup\{a_n \mid n \geq 0\}$ en $\inf\{a_n \mid n \geq 0\}$ bestaan en behoren tot I.

(d) Toon aan dat er een segment (gesloten en begrensd interval) $I_0 \subset \mathbb{R}$ bestaat met $I_0 \subset I$ en $a_n \in I_0$ voor alle $n \geq 0$.

Opgave 6.10 We beschouwen een open interval $I \subset \mathbb{R}$ en een continue monotoon strikt stijgende functie $f : I \to \mathbb{R}$. Zoals bekend is $J := f(I)$ een interval. De functie f is een bijectie van I op J. De inverse noteren we met $g : J \to I$. Gegeven is een deelverzameling $A \subset I$ die gesloten is in I, d.w.z., ieder in I gelegen limietpunt van A behoort tot A.

(a) Zij b een in J gelegen limietpunt van $f(A)$. Toon aan dat er een rij (a_n) in A bestaat met $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

(b) Toon aan dat er $p, q \in I$ bestaan met $p \leq q$ en met $a_n \in [p, q]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Hint: gebruik de voorgaande opgave.

(c) Toon aan dat de rij (a_n) een convergente deelrij (a_{n_k}) heeft met een in $[p, q]$ gelegen limiet a. Toon aan dat $f(a) = b$.

(d) Toon aan dat $f(A)$ gesloten is in J.

(e) Toon aan dat $g : J \to I$ continu is. Hint: gebruik een karakterisering van continuïteit d.m.v. volledige originelen.

Opgave 6.11 In het vervolg noteren we, voor $p, q \in \mathbb{R}$,

$$[p, q] = \{p + t(q - p) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Hiermee wordt de interval notatie niet alleen zinvol voor $p \leq q$, maar ook voor $q < p$. Ga na dat $[p, q] = \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq x \leq q\}$ als $p \leq q$ en dat $[p, q] = \{x \in \mathbb{R} \mid q \leq x \leq p\}$ als $p \geq q$.

We beschouwen een partieel differentieerbare functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. De partiële afgeleiden naar de eerste en de tweede variabele noteren we met $D_1 f$ respectievelijk $D_2 f$. Zij $a \in \mathbb{R}^2$.

(a) Toon aan dat voor iedere $x \in \mathbb{R}^2$ een reëel getal $\alpha_1(x) \in [a_1, x_1]$ bestaat zo dat

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) = D_1 f(\alpha_1(x), x_2)\,(x_1 - a_1).$$

(b) Toon aan dat voor iedere $x \in \mathbb{R}^2$ een reëel getal $\beta_2(x) \in [a_2, x_2]$ bestaat zo dat

$$f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) = D_2 f(a_1, \beta_2(x))\,(x_2 - a_2).$$

(c) We schrijven $\alpha(x) = (\alpha_1(x), x_2)$ en $\beta(x) = (a_1, \beta_2(x))$. Bewijs dat $\lim_{x\to a} \alpha(x) = a$ en dat $\lim_{x\to a} \beta(x) = a$.

(d) Gegeven is nu een functie $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ met $c(0) = a$. Toon aan dat voor iedere $t \in \mathbb{R}$ geldt

$$f(c(t)) - f(c(0)) = D_1 f(\alpha(c(t)))\,(c_1(t) - a_1) + D_2 f(\beta(c(t)))\,(c_2(t) - a_2).$$

(d) Veronderstel nu dat c differentieerbaar is in 0 en dat $D_1 f$ en $D_2 f$ continu zijn in a. Bewijs dat

$$(f \circ c)'(0) = D_1 f(a)\, c_1'(0) + D_2 f(a)\, c_2'(0).$$

Breng het bovenstaande in verband met de in het college Infinitesimaalrekening behandelde kettingregel.

Opgave 6.12 (Variant van de regel van de l'Hôpital) In deze opgave zullen we het volgende aantonen. Laten $f, g :]\,M, \infty\,[\to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn en veronderstel dat $g'(x) \neq 0$ voor $x > M$ en dat
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty.$$
Dan geldt:
$$(*) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = y.$$
We gaan bewijzen dat (*) waar is. Veronderstel dat
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = y$$
en dat een willekeurige $\epsilon > 0$ gegeven is.

(a) Bewijs dat er een reëel getal $x_1 > M$ bestaat zo dat $g(x_1) > 0$ en zo dat voor alle $x > x_1$ geldt:
$$g(x) > 0; \quad g(x) - g(x_1) \neq 0; \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - y \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

(b) Toon aan dat we voor elke $x > x_1$ kunnen schrijven
$$\frac{f(x)}{g(x)} - y = \frac{f(x_1) - yg(x_1)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\left(\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - y\right).$$

(c) Laat zien dat er een $x_2 > x_1$ bestaat zo dat voor alle $x > x_2$ geldt
$$\left| \frac{f(x_1) - yg(x_1)}{g(x)} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \left| 1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right| \leq 1.$$

(d) Toon aan dat voor alle $x > x_2$ geldt $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - y \right| < \epsilon$. Waarom is (*) nu bewezen?

(e) Toepassing: bepaal de volgende limieten:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\log x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

Opgave 6.13 Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar en $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Doel van deze opgave is nogmaals te bewijzen dat f monotoon dalend is op $[a, b]$, ditmaal direkt uit de definitie van afgeleide, dus zonder de middelwaardestelling te gebruiken. Zij $\epsilon > 0$.

(a) Toon aan dat voor iedere $\xi \in [a, b\,[$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in [\xi, \xi + \delta\,[$ geldt:
$$f(x) \leq f(\xi) + \epsilon(x - \xi).$$

Zij V de verzameling van punten $c \in [a, b]$ zo dat voor alle $x \in [a, c]$ de volgende schatting geldt:
$$f(x) \leq f(a) + \epsilon(x - a) \qquad (*)$$

(b) Toon aan dat $s := \sup V$ bestaat.

(c) Toon aan dat voor alle $x \in [a, s[$ de schatting (*) geldt.

(d) Toon aan dat $s \in V$.

(e) Toon aan dat $s = b$.

(f) Toon aan dat $f(x) \leq f(a)$ voor alle $x \in [a, b]$.

(g) Toon aan dat f monotoon dalend is op $[a, b]$.

(h) Veronderstel nu dat $f'(x) = 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Toon aan dat f constant is op $[a, b]$.

Opgave 6.14

(a) Toon aan dat voor iedere $x \in [0, \infty[$ geldt

$$\left| \sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}) \right| \leq \frac{1}{16} x^3.$$

(b) Bepaal $p, q \in \mathbb{N}$ zo dat

$$\left| \sqrt{101} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{1\,600\,000}.$$

Opgave 6.15 We beschouwen de functie $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \log(1 + x)$.

(a) Bepaal een formule voor de n-de afgeleide $f^{(n)}$ van f, voor $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bepaal het n-de orde Taylor polynoom p_n van f rond het punt 0.

(c) Toon aan dat voor elke $x \in [0, 1]$ geldt:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

(d) Toon aan dat voor elke $x \in [0, 1]$ geldt $f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$.

(e) Toon aan dat $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Met behulp van de restterm van Lagrange is (d) niet aan te tonen voor alle $x \in]-1, 0[$. Toch geldt (d) voor dergelijke x, zoals uit de volgende onderdelen zal blijken. In het vervolg veronderstellen we steeds dat $-1 < x < 0$ en dat $n \in \mathbb{N}$.

(f) Toon aan dat er een $c \in]x, 0[$ bestaat zo dat

$$f(x) - p_n(x) = [\frac{1}{1+c} - p_n'(c)]\, x.$$

(g) Toon aan dat

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+x}.$$

(h) Toon aan dat voor alle $x \in]-1, 0[$ geldt $f(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x)$.

Opgave 6.16 In deze opgave is voor alle functies $f, g, h : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ de oorsprong 0 een inwendig punt van het domein. Zij $h : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Dan schrijven we $h = \mathcal{O}(x^k)$ indien er een open interval $I \subset \mathrm{Dom}(h)$ met $0 \in I$ en een constante $C > 0$ bestaan met de eigenschap dat voor alle $x \in I$ de afschatting $|h(x)| \leq C\,|x|^k$ geldt, en $h = o(x^k)$ indien $\lim_{x\to 0} \dfrac{h(x)}{|x|^k} = 0$.

(a) Laat zien dat voor elk $k \in \mathbb{N}_0$ geldt dat als $h = o(x^k)$ dan $h = \mathcal{O}(x^k)$, en als $h = \mathcal{O}(x^k)$ dan $h = o(x^{k-1})$.

(b) Bewijs dat $g : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ met $g = o(x^1)$ differentieerbaar in $x = 0$ is. Bereken de afgeleides $g^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, m$ onder de extra voorwaarde dat $g = o(x^m)$ en $m - 1$ keer differentieerbaar is.

(c) Zij $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ een $(n + 1)$–keer differentieerbare functie met $f = o(x^n)$ en continue $(n + 1)$ste afgeleide $f^{(n+1)}$. Toon aan dat dan zelfs $f = \mathcal{O}(x^{n+1})$ is.

Opgave 6.17 Zij $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ een veelterm. Laat zien dat

$$\lim_{x\to\infty} p(x)\,\mathrm{e}^{-x} \quad = \quad 0 \ .$$

Opgave 6.18 Deze opgave behandelt de vraag of een functie gegeven wordt door zijn Taylorreeks. We gebruiken de verkorte notatie $p_n(x)$ voor het n–de orde Taylorpolynoom van een functie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ rond het punt $a \in I$, met I een open interval.

(a) Zij $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ en $a = 0$. Gebruik Lemma 6.38 om aan te tonen dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\sin x \quad = \quad \lim_{n\to\infty} p_n(x) \ .$$

Een willekeurig vaak differentieerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet reëel analytisch in a indien er een omgeving $J \ni a$ bestaat zo dat voor elke $x \in J$ de limiet $\lim_{n\to\infty} p_n(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(x)$. Niet alle functies die willekeurig vaak differentieerbaar zijn, zijn reëel analytisch. Zij $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \ .$$

(b) Gebruik inductie om te bewijzen dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ er een polynoom $r_n(y)$ bestaat zo dat voor alle $x \neq 0$

$$g^{(n)}(x) \quad = \quad r_n(1/x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

(waarin $y = 1/x$ een voor de hand liggende substitutie is). Laat zien dat

$$\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0 \quad \text{voor alle } \ n \in \mathbb{N}.$$

(c) Gebruik inductie om te bewijzen dat $g(x)$ willekeurig vaak differentieerbaar is in $x = 0$ en dat $g^{(n)}(0) = 0$. *Hint:* Gebruik de definitie

$$g^{(n+1)}(0) \quad = \quad \lim_{x \to 0} \frac{g^{(n)}(x) \; - \; g^{(n)}(0)}{x \; - \; 0} \quad ,$$

substitueer $y = \frac{1}{x}$ en gebruik herhaaldelijk de regel van l'Hôpital uit Opgave 6.12.

(d) Toon aan dat g niet reëel analytisch is in 0.

7 Integratie

Opgave 7.1 Definieer $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ door $f(x) = x$. Geef een verdeling V van $[0,2]$ zo dat

$$\frac{3}{2} \leq \underline{S}(f, V) \quad \text{en} \quad \overline{S}(f, V) \leq \frac{5}{2}.$$

Opgave 7.2 We beschouwen de functie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{als} \quad x \neq 0; \\ 1, & \text{als} \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) Kies zelf een verdeling van $[-1,1]$ en bereken de bijbehorende onder- en bovensom van f.

(b) Zij $A := \{\underline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}([-1,1])\}$. Bepaal $\sup A$.

(c) Geef een verdeling V van $[-1,1]$ zo dat $\overline{S}(f, V) < 1/100$.

(d) Zij $B := \{\overline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}([-1,1])\}$. Bepaal $\inf B$.

(e) Is de functie f Riemann-integreerbaar over $[-1,1]$? Motiveer uw antwoord.

Opgave 7.3 Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. We beschouwen een begrensde functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die een primitieve heeft, d.w.z., er bestaat een differentieerbare funktie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ met $F' = f$.

Zij $V = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ een verdeling van $[a,b]$.

(a) Toon aan dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ geldt:

$$\inf_{I_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq F(x_j) - F(x_{j-1}) \leq \sup_{I_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

(b) Toon aan dat $\underline{S}(f, V) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{S}(f, V)$.

(c) Toon aan dat

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

(d) Bewijs: als bovendien gegeven is dat f Riemann-integreerbaar is, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Opgave 7.4 Gegeven zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en een monotoon stijgende functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(a) Zij $V = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ een verdeling van $[a,b]$. Toon aan dat

$$\underline{S}(f, V) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}), \qquad \overline{S}(f, V) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}).$$

(b) Schrijf $\epsilon = \max\{x_j - x_{j-1} \mid 1 \leq j \leq n\}$. Toon aan dat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) \leq \epsilon(f(b) - f(a)).$$

(c) Toon aan dat

$$\underline{S}(f, V) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{S}(f, V) + \epsilon(f(b) - f(a)).$$

(d) Toon aan dat f Riemann integreerbaar is op $[a, b]$.

Opgave 7.5 Gegeven zijn $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. We beschouwen een continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ met $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$.

(a) Toon aan dat $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
(b) Bewijs: als f niet overal gelijk is aan nul, dan bestaat er een $p > 0$ en een tweetal punten $c, d \in [a, b]$ met $c < d$ zo dat $f(x) \geq p$ voor alle $x \in [c, d]$.
(c) Bewijs: als f niet overal gelijk is aan nul, dan bestaat er een verdeling V van $[a, b]$ zo dat $\underline{S}(f, V) > 0$.
(d) Bewijs:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Opgave 7.6 We beschouwen de functie $f : I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x = \frac{1}{n} \quad \text{met} \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) Toon aan dat voor iedere verdeling V van I geldt $\underline{S}(f, V) = 0$.
(b) Toon aan dat voor iedere $\epsilon > 0$ een verdeling V van I bestaat met $\overline{S}(f, V) < \epsilon$.
(c) Toon aan dat f Riemann-integreerbaar is over I en bepaal zijn integraal.

Opgave 7.7 We beschouwen de functie $f : I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{als} \quad x \in I \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat voor iedere verdeling V van I geldt $\underline{S}(f, V) = 0$.
(b) Toon aan dat

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1.$$

(c) Is de functie f Riemann-integreerbaar over I? Motiveer uw antwoord.

Opgave 7.8 (Middelwaardestelling) Gegeven is een continue functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Bewijs dat er een $c \in [a,b]$ bestaat zo dat

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)\,(b-a).$$

Hint: beschouw een primitieve F van f.

Opgave 7.9 De functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is Riemann-integreerbaar. We beschouwen de functie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

(a) Waarom is F goed gedefinieerd?

(b) Toon aan dat er een constante $M > 0$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in [a,b]$ met $x \le y$ geldt:

$$-M(y-x) \le F(y) - F(x) \le M(y-x).$$

(c) Toon aan dat F continu is.

(d) Toon aan dat er $c \in [a,b]$ bestaat zo dat

$$\int_a^c f(t)\, dt = \int_c^b f(t)\, dt.$$

Opgave 7.10 We beschouwen een functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ met $0 \le f(x) \le 1$ voor alle $x \in [0,1]$. Van de functie f is bovendien gegeven dat voor iedere $p > 0$ de verzameling

$$A_p := \{x \in [0,1] \mid f(x) > p\}$$

eindig is.

(a) Toon aan dat $\underline{\int_0^1} f(x)\, dx \ge 0$.

In het vervolg veronderstellen we dat $p > 0$ willekeurig is en dat $V = \{x_j \mid 0 \le j \le n\}$ een verdeling van $[0,1]$ is.

(b) Toon aan dat voor ten hoogste $2|A_p|$ indices j geldt dat $\sup_{I_j} f > p$.

(c) Toon aan dat: $\overline{S}(f, V) \le 2m|A_p| + p$, met $m = \max_{1 \le j \le n} l(I_j)$.

(d) Toon aan dat de functie f Riemann integreerbaar is en dat $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

(e) We beschouwen de functie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = 0$ als $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ of $x = 0$ en door

$$g(x) = \frac{1}{q} \quad \text{als} \quad x = \frac{p}{q}$$

met p, q positief geheel en onderling ondeelbaar. Bewijs dat g Riemann integreerbaar is en dat $\int_0^1 g(x)\, dx = 0$.

(f) **Uitsmijter voor de liefhebber:** Laat zien dat de functie g continu is in ieder punt van de verzameling $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, en bovendien in het punt 0. Toon ook aan dat de functie g discontinu is in ieder punt van $]\,0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Opgave 7.11 Zij $I := [a,b]$ een gesloten en begrensd interval ($a,b \in \mathbb{R},\ a < b$), verder $f : I \to \mathbb{R}$ een monotone functie (d.w.z. f is monotoon stijgend of monotoon dalend). Bewijs dat f over I Riemann-integreerbaar is of geef een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat dit niet zo hoeft te zijn.

Opgave 7.12 Zij $C([0,1])$ de reële lineaire ruimte van continue functies $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. We definiëren door

$$\|f\| \ := \ \int_0^1 |f(x)|\ dx$$

een afbeelding $\|\cdot\| : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ die ook de integraalnorm wordt genoemd.

(a) Verifieer dat $\|\cdot\|$ inderdaad alle eigenschappen van een norm heeft, d.w.z.,

(1) $\|f\| \geq 0$ voor alle $f \in C[0,1]$;

(2) $\|f\| = 0$ dan en slechts dan als f de nulfunctie is;

(3) $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ voor alle $f \in C[0,1]$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$;

(4) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ voor alle $f, g \in C[0,1]$.

(b) Zoals elke norm op een lineaire ruimte maakt de integraalnorm van $C([0,1])$ d.m.v. $d(f,g) := \|f - g\|$ een metrische ruimte. Bereken de hierdoor gedefinieerde afstand tussen de functies $\sin 2\pi x$ en $\cos 2\pi x$, en geef een interpretatie van dit getal. Hint: maak een schets.

(c) Ga na dat de functies $(f_n)_{n\geq 2}$ gedefinieerd door

$$f_n(x) \ := \ \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{als} \quad x > \dfrac{1}{n}, \\[2ex] \sqrt{n} & \text{als} \quad x \leq \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

een Cauchy-rij in $C([0,1])$ vormen.

(d) Laat zien dat er geen functie $g \in C([0,1])$ bestaat waarvoor geldt dat $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$ en concludeer dat $C([0,1])$ voorzien van de norm $\|\cdot\|$ niet volledig is.