Leeswijzer

Analyse B-1

E.P. van den Ban

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Voorjaar 1994

1 Funkties van meer variabelen

1.1 Partiële afgeleiden

Bestudeer Hoofdstuk 12 tot Opmerking 12.1 van het werkboek bij Analyse A (in het vervolg afgekort tot WBA) alsmede de hieronder gegeven toelichting.

Toelichting bij WBA, blz. 49: In het Analyse B diktaat wordt niet gewerkt met de standaardomgevingen $V(a;\varepsilon)$, $(a \in \mathbf{R}^n,\ \varepsilon > 0)$, maar (impliciet) met *bolomgevingen*:

$$B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x-a\| < \varepsilon\}.$$

Hierbij is de notatie

$$\|x-a\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j|^2\right)^{1/2}$$

voor de Euclidische afstand van x tot a gebruikt: $B(a;\varepsilon)$ is dus 'het inwendige' van een bolletje met middelpunt a en straal ε. Vergelijk ook de notatie in Analyse A, Definitie 1.4.3.

In de definities en stellingen in Hoofdstuk 12 van het WBA kan men steeds met bolomgevingen i.p.v. met standaardomgevingen werken, zonder daarbij de inhoud van de definities en stellingen te veranderen. Dit komt omdat iedere bolomgeving een standaardomgeving bevat, en omgekeerd.

Opgave: Ga na dat voor $a \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$ geldt:

$$V(a;\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \subset B(a;\varepsilon) \subset V(a;\varepsilon) \subset B(a;\sqrt{n}\,\varepsilon).$$

Illustreer deze inclusies met een plaatje voor $n = 2$.

Toelichting bij WBA, blz. 50: Hier worden partiële afgeleiden gedefinieerd van funkties $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ en later wordt die definitie uitgebreid naar funkties $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. De eis dat $\mathrm{Dom}(f) = \mathbf{R}^n$ legt te grote beperkingen op; ook funkties die op geschikte deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ gedefinieerd zijn willen we partieel kunnen differentiëren. Merk op dat de definitie van partiële differentieerbaarheid zonder problemen doorgaat voor funkties gedefinieerd op standaardomgevingen.

Definitie 1.1 Een deelverzameling $U \subset \mathbf{R}^n$ heet *open* als er voor iedere $a \in U$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat $V(a;\varepsilon) \subset U$.

In de bovenstaande definitie kan $V(a;\varepsilon)$ door $B(a;\varepsilon)$ vervangen worden, zonder daarmee het begrip 'open verzameling' te veranderen. Is de funktie f gedefinieerd op een open verzameling $U \subset \mathbf{R}^n$, a een punt van U en $1 \le j \le n$, dan is de funktie

$$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots a_n)$$

gedefinieerd op een interval van de vorm $]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[$, zodat men over differentieerbaarheid in $t = a_j$ kan spreken. Hieraan ziet men dat de definitie van partiële differentieerbaarheid uitgebreid kan worden naar funkties gedefinieerd op open verzamelingen.

Toelichting bij WBA, Stelling 12.2 en formule (12.8): In het vervolg zal het handig zijn de volgende terminologie te gebruiken. Laat $U \subset \mathbf{R}^n$ een open deel zijn, en $f : U \to \mathbf{R}$ een funktie. We zeggen dat f een C^1–funktie op U is als f continu op U is en als bovendien alle partiële afgeleiden $\partial f/\partial x_j$ bestaan en continu zijn op U. We zeggen dat f een C^2–funktie op U is als f C^1 is en bovendien alle tweede orde partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

bestaan en continu zijn op U. Met inductie definiëren we algemener voor $k \geq 2$: f is een C^k–funktie op U als f een C^{k-1}–funktie is en als bovendien alle k–de orde partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} \tag{1}$$

bestaan en continu zijn op U. De verzameling van alle C^k–funkties $U \to \mathbf{R}$ noteren we met $C^k(U)$. Merk op dat deze verzameling met de gebruikelijke scalar vermenigvuldiging en de gebruikelijke puntsgewijze optelling van funkties een reële lineaire ruimte is. Het is gebruikelijk de notatie $C(U) = C^0(U)$ te gebruiken voor de ruimte van continue funkties $f : U \to \mathbf{R}$. Tenslotte gebruikt men de notatie $C^\infty(U)$ voor de ruimte van continue funkties $f : U \to \mathbf{R}$ waarvan alle partiële afgeleiden bestaan en continu zijn op U. Dus:

$$C^\infty(U) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(U),$$

terwijl voor alle $k \geq 0$ geldt: $C^k(U) \supset C^{k+1}(U)$.

Uit Stelling 12.2 volgt direkt: is $U \subset \mathbf{R}^2$ open en $f \in C^2(U)$, dan is

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

op U. Is algemener $U \subset \mathbf{R}^n$ open en $f \in C^2(U)$, dan geldt formule (12.8) op U. Dit is een direkt *gevolg* van Stelling 12.2 omdat bij partiële differentiatie naar de variabelen x_i en x_j de overige variabelen als constanten behandeld worden. Door formule (12.8) herhaald toe te passen zien we tenslotte: is $f \in C^k(U)$, dan is (1) onafhankelijk van de volgorde waarin de partiële differentiaties toegepast worden. Iedere k-de orde partiële afgeleide is daarom te herschrijven als

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

met $\alpha_j \geq 0$ en $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$. Voor het geval van twee variabelen ($n = 2$) is dit geformuleerd onder Voorbeeld 12.3 van het WBA.

Toelichting bij WBA, Stelling 12.4: Een punt a dat voldoet aan de vergelijkingen (12.7) heet ook wel een *kritiek punt* of een *stationair punt* van f. Ga na dat de volgende generalisatie van Stelling 12.4 naar open domeinen geldt (zie ook de opmerking in het WBA betreffende verzamelingen begrensd door een rand):

Stelling 1.2 *Zij $U \subset \mathbf{R}^n$ open en $f : U \to \mathbf{R}$ een partieel differentieerbare funktie. Neemt f zijn maximum aan in het punt $a \in U$, dan is a een stationair punt van f.*

Uit Analyse A weet u dat het verdwijnen van de afgeleide van een funktie van één variable geen maximum of minimum garandeert, er kan bijvoorbeeld ook sprake zijn van een buigpunt. Bij funkties van meer variabelen doet zich een nieuw verschijnsel voor: er kan sprake zijn van een zogenaamd zadelpunt.

Voorbeeld 1.3 We beschouwen de funktie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, gedefinieerd door $f(x, y) = y^2 - x^2$. Men gaat gemakkelijk na dat $(0, 0)$ het enige kritieke punt van f is. De funktie $x \mapsto f(x, 0) = -x^2$ heeft een strikt maximum in 0, terwijl $y \mapsto f(0, y) = y^2$ een strikt minimum in 0 heeft. De funktie f heeft dus noch een maximum, noch een minimum in 0. Men kan de funktie f visualiseren m.b.v. zijn grafiek, d.w.z. de verzameling $\operatorname{graf} f$ van punten $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ die voldoen aan $z = f(x, y)$. De doorsnijding van deze grafiek met het vlak $y = c$ is een 'bergparabool' met top in het punt $(0, c, c^2)$. Deze toppen liggen op een 'dalparabool' in het (y, z)–vlak. De grafiek heeft dus de vorm van een zadel: zie Figuur 1.

Figuur 1: een zadelpunt

Een andere manier om een funktie $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}$ te visualiseren is door studie van zijn niveauverzamelingen, d.w.z. de deelverzamelingen $N_c \subset \mathrm{Dom}(f)$ (met $c \in \mathbf{R}$) gedefinieerd door:

$$N_c = f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) = c\}$$

Passen we dit toe op het bovenstaande voorbeeld $f(x, y) = y^2 - x^2$ dan zien we dat de *niveaulijn* N_c gegeven wordt door de vergelijking $y^2 - x^2 = c$. Voor $c = 0$ is dit de vereniging van de lijnen $y = \pm x$. Voor $c > 0$ is N_c een hyperbool in het gebied $|x| < |y|$ (het gearceerde deel in Figuur 2), en voor $c < 0$ is N_c een hyperbool in het gebied $|x| > |y|$. In het bijzonder ziet men dat f strikt groter dan nul is op de open verzameling $|x| < |y|$, en strikt kleiner dan nul op de open verzameling $|x| > |y|$. Hieraan ziet men wederom dat f geen maximum of minimum aanneemt in het kritieke punt $(0, 0)$. Merk op dat de niveaulijn N_c verkregen wordt door de snijfiguur van $\operatorname{graf} f$ en het vlak $z = c$ loodrecht te projecteren op het (x, y)–vlak. Gebruik dit inzicht om de bovenstaande plaatjes met elkaar te vergelijken.

Figuur 2: niveaulijnen

1.2 Lokale maxima, minima

Laat $U \subset \mathbf{R}^n$ een open verzameling zijn, en $f : U \to \mathbf{R}$ een funktie. We zeggen dat f in een gegeven punt $a \in U$ een lokaal maximum (minimum) heeft als er een bolomgeving B van a in U bestaat zo dat de beperking $f|_B$ een maximum (resp. minimum) in a heeft (zie ook Definitie B.7.12.1).

We zeggen dat f een extremum in a heeft als f een lokaal maximum of een lokaal minimum in a heeft.

Het is duidelijk dat Stelling 1.2 geldig blijft als men het woord 'maximum' door het woord 'extremum' vervangt (op een voldoend kleine bolomgeving wordt het extremum namelijk een maximum of een minimum).

Toelichting bij Voorbeeld B.7.12.6: Bestudeer Voorbeeld 7.12.6 uit het Analyse B diktaat. Daarin wordt voor de funktie $f(x,y) = (x^2-y^2)(x^2+y^2-2)$ eerst de niveaulijn $N_0 = f^{-1}(\{0\})$ bepaald. Daarna wordt het tekenverloop van f geanalyseerd. Aan dit tekenverloop ziet men direkt dat f in 5 van de gevonden 9 stationaire punten geen extremum (dwz. lokaal maximum of minimum) heeft. In de overgebleven stationaire punten moet f extrema hebben. In het diktaat wordt dit tamelijk summier beredeneerd. Omdat de redenering zo belangrijk is lichten we hem wat uitgebreider toe voor het stationaire punt $(1,0)$. We beschouwen de gesloten verzameling D van punten $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ met $x \geq |y|$ en $x^2+y^2 \leq 2$ (in de figuur: D is de 'afsluiting' van het niet gearceerde open stuk dat $(1,0)$ bevat). De begrippen 'gesloten verzameling' en 'afsluiting' worden in het volgende hoofdstuk uitgebreider toegelicht. Ook wordt het inwendige D^{inw} van D gedefinieerd: in het huidige geval is $D^{\mathrm{inw}} = D \setminus N_0$. De verzameling $D \setminus D^{\mathrm{inw}} = D \cap N_0$ heet ook wel: de rand van D.

Omdat D een gesloten en begrensde verzameling is neemt de continue funktie f een minimum aan in een punt $a \in D$ (deze generalisatie van een bekende stelling uit Analyse A naar funkties van meer variabelen komt in het volgende hoofdstuk aan de orde). Nu is $f = 0$ op de rand van D, en strikt kleiner dan nul op het inwendige D^{inw} van D. Derhalve moet a in de open verzameling D^{inw} liggen. Omdat f partieel differentieerbaar is op D^{inw} moet a een stationair punt van f zijn. Slechts één der stationaire punten van f is in D^{inw} gelegen, namelijk het punt $(1,0)$. Hieruit blijkt dat $a = (1,0)$, dus f heeft een lokaal minimum in $(1,0)$ ter grootte $f(1,0) = -1$.

1.3 Richtingsafgeleide en gradient

Op bladzijde 58 wordt de richtingsafgeleide van f in a in de richting v genoteerd met $f'_v(a)$, terwijl in het Analyse B diktaat de notatie $\partial_v f(a)$ gebruik wordt (zie Definitie B.6.10.1). Wij zullen de laatstgenoemde notatie gebruiken. De definiërende formule uit het WBA kan herschreven worden als:

$$\partial_v f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle$$

waarin

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

de gradiënt van f is, en $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct op $\mathbf{R}^n$. Hierbij wordt stilzwijgend verondersteld dat f een partieel differentieerbare funktie is, gedefinieerd op een open deel U van $\mathbf{R}^n$ dat a bevat, terwijl de partiële afgeleiden continu in a zijn. Daarom is Stelling 12.5 (kettingregel) toepasbaar, en er volgt dat

$$\partial_v f(a) = \frac{d}{dt} f(a + tv)|_{t=0}.$$

Wegens de definitie van afgeleide als limiet van een differentiequotient kan de bovenstaande formule herschreven worden als

$$\partial_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}. \tag{2}$$

Deze formule wordt in Definitie B.6.10.1 als definiërende formule gebruikt. Dit heeft als voordeel dat er niets betreffende de partiële afgeleiden aangenomen hoeft te worden. Wij volgen hier het Analyse B diktaat, dus:

Definitie 1.4 Laat $U \subset \mathbf{R}^n$ een open verzameling zijn en $f : U \to \mathbf{R}$ een funktie. Zij $a \in U$, $v \in \mathbf{R}^n$. De funktie f heet richtingsdifferentieerbaar in a in de richting v als de limiet (2) bestaat.

Door toepassing van de kettingregel uit het WBA volgt nu:

Lemma 1.5 *Laat $f : U \to \mathbf{R}$ een partieel differentieerbare funktie zijn, gedefinieerd op een open deel U van $\mathbf{R}^n$. Als de partiële afgeleiden van f continu zijn in $a \in U$, dan is f in a richtingsdifferentieerbaar in iedere richting, en er geldt:*

$$\partial_v f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle \qquad (v \in \mathbf{R}^n). \tag{3}$$

We merken op dat na Definitie 1.4 partiële differentieerbaarheid als speciaal geval van richtingsdifferentieerbaarheid opgevat kan worden. Preciezer, laat e_j de j–de standaard basisvector in $\mathbf{R}^n$ zijn. Dan is $f : U \to \mathbf{R}$ in $a \in U$ partieel differentieerbaar naar de j–de variabele dan en slechts dan als de richtingsafgeleide van f in a in de richting e_j bestaat. Er geldt dan:

$$\partial_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Controleer dit zelf aan de hand van de definities. Details kunt u vinden in §6.11 van het Analyse B diktaat.

Tenslotte kunnen we uit Lemma 1.5 de volgende meetkundige interpretatie van de gradient afleiden.

We brengen in herinnering dat:

$$\partial_v f(a) = \frac{d}{dt} f(a + tv)|_{t=0}. \tag{4}$$

Is v een eenheidsvector in $\mathbf{R}^n$, dan meet $\partial_v f(a)$ dus de groei van f langs de lijn $a + \mathbf{R}v$, per lengte eenheid, en in het punt a. Is $\operatorname{grad} f(a) = 0$, dan zien we mbv. (3) dat f vanuit a in iedere richting ('instantane') groei nul heeft (vandaar ook de naam stationair punt). Veronderstel nu dat $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. Een eenheidsvector v waarvoor (4) maximaal is kan geïnterpreteerd worden als richting van grootste groei van f vanuit het punt a. Uit (3) lezen we af dat deze richting uniek is en gegeven wordt door:

$$v = \frac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}.$$

De grootte van de groei van f in die richting wordt gegeven door

$$\partial_v f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), \frac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|} \rangle = \|\operatorname{grad} f(a)\|.$$

Samenvattend:

Is $\operatorname{grad} f(a) = 0$, *dan is de groei van* f *in* a *in iedere richting nul. Is* $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$, *dan is* $\|\operatorname{grad} f(a)\|^{-1} \operatorname{grad} f(a)$ *de richting van grootste groei van* f *in* a. *De grootte van die groei wordt gegeven door* $\|\operatorname{grad} f(a)\|$.

Een ander inzicht in de betekenis van de gradient verkrijgen we als volgt. Zij $U \subset \mathbf{R}^n$ open en $f \in C^1(U)$, en laat $N \subset U$ een niveauverzameling van f zijn.

Zij $\gamma : [t_1, t_2] \to U$ een differentieerbare kromme waarvan het beeld geheel in een niveauverzameling N van f gelegen is. Dan is $f(\gamma(t))$ constant, dus door toepassing van de kettingregel volgt

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle,$$

dus $\operatorname{grad} f(\gamma(t)) \perp \gamma'(t)$ voor alle $t \in [t_1, t_2]$. Dit suggereert dat $\operatorname{grad} f(a)$ loodrecht staat op de niveau-verzameling van f door a (dus de verzameling van x met $f(x) = f(a)$). Dat dit inderdaad het geval is zullen we in een later stadium zien (zie ook B.7.10.2).

2 Continuïteit in $\mathbf{R}^n$

2.1 Bolzano-Weierstrass

Bestudeer Analyse B, §6.1 en Eigenschap 6.2.2.2, en lees de onderstaande toelichting.

Toelichting bij Eigenschap 6.2.2.2: In de analyse op $\mathbf{R}$ hebben we steeds gebruikt gemaakt van de ordening $<$. Een van de complicaties van de analyse op $\mathbf{R}^n$ is dat daar geen ordening bestaat die zich goed gedraagt ten aanzien van de operaties 'optelling' en 'scalarvermenigvuldiging'. Toch is het mogelijk vele eigenschappen van $\mathbf{R}$ te generaliseren tot $\mathbf{R}^n$, door eerst op te merken dat ze in wezen niets met de ordening op $\mathbf{R}$ te maken hebben. Het belangrijkste voorbeeld is wel het volledigheidsaxioma van $\mathbf{R}$ (Analyse A, §6.6):

Iedere niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbf{R}$ *heeft een kleinste bovengrens (sup).*

Dit axioma is equivalent met de stelling van Bolzano-Weierstrass (Stelling A.5.3.7) (bij het in Analyse A gegeven bewijs van deze stelling werd gebruik gemaakt van het volledigheidsaxioma; laat zelf zien dat het volledigheidsaxioma op zijn beurt uit de stelling van Bolzano-Weierstrass volgt). In de stelling van Bolzano-Weierstrass komt de ordening niet voor en deze stelling is wel uit te breiden naar $\mathbf{R}^n$.

Stelling 2.1 (Bolzano-Weierstrass). *Iedere begrensde rij in* $\mathbf{R}^n$ *heeft een deelrij die convergeert naar een punt van* $\mathbf{R}^n$.

Bewijs. Het bewijs van deze stelling bestaat uit een coördinaatsgewijze reductie naar de stelling voor $\mathbf{R}$ (het geval $n = 1$) die in Analyse A bewezen is.

Zij (x_k) een begrensde rij in $\mathbf{R}^n$. Schrijf $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$. Dan geldt voor iedere $1 \leq j \leq n$ dat $|x_{kj}| \leq \|x_k\|$, dus $(x_{kj})_{k\geq 1}$ is een begrensde rij in $\mathbf{R}$. Uit de stelling van Bolzano-Weierstrass voor $\mathbf{R}$ volgt nu dat er een rij $k(1) < k(2) < \ldots$ van natuurlijke getallen bestaat, zo dat de deelrij $(x_{k(\nu)1})_{\nu\geq 1}$ van $(x_{k1})_{k\geq 1}$ convergent is met limiet $a_1 \in \mathbf{R}$. De rij $(x_{k(\nu)2})_{\nu\geq 1}$ is begrensd in $\mathbf{R}$, en heeft daarom een convergente deelrij. Door uitdunning van de rij $k(1), k(2), \ldots$ kunnen we dus voor elkaar krijgen dat ook $\lim_{\nu\to\infty} x_{k(\nu)2} = a_2$ bestaat. Door dit argument achtereenvolgens voor $j = 1, \ldots, n$ toe te passen op de verkregen rijen $(x_{k(\nu)j})_{\nu\geq 1}$ zien we dat we een stijgende rij $(k(\nu))_{\nu\geq 1}$ van indices kunnen vinden zo dat voor elke $1 \leq j \leq n$ de limiet $a_j := \lim_{\nu\to\infty} x_{k(\nu)j}$ bestaat. Met behulp van het onderstaande lemma zien we nu dat de rij $(x_{k(\nu)})_{\nu\geq 1}$ het punt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ als limiet heeft. □

Lemma 2.2 (Vgl. met Stelling B.6.4.2). *Laat* $(y_k)_{k\geq 1}$ *een rij in* $\mathbf{R}^n$ *zijn, en schrijf* $y_k = (y_{k1}, \ldots, y_{kn})$. *Dan convergeert de rij* $(y_k)_{k\geq 1}$ *dan en slechts dan als voor iedere* $1 \leq j \leq n$ *de rij* $(y_{kj})_{k\geq 1}$ *convergent is. Bovendien geldt in geval van convergentie dat:*

$$\lim_{k\to\infty} y_k = (\lim_{k\to\infty} y_{k1}, \ldots, \lim_{k\to\infty} y_{kn}).$$

Bewijs. Zij $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Dan geldt voor iedere $k \geq 1$ en elke $1 \leq j \leq n$ dat:

$$0 \leq |y_{kj} - a_j| \leq \|y_k - a\| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_{kj} - a_j|.$$

Is de rij (y_k) convergent met limiet a, dan volgt uit de eerste twee ongelijkheden dat $\lim_{k\to\infty} y_{kj} = a_j$, door toepassing van de insluitstelling. Is voor elke j de rij $(y_{kj})_{k\geq 1}$ convergent met limiet a_j, dan volgt uit de laatste twee ongelijkheden dat $\lim_{k\to\infty} \|y_k - a\| = 0$, wederom door toepassing van de insluitstelling. □

2.2 Open en gesloten verzamelingen

In Analyse A werd bewezen dat een continue funktie $f : V \to \mathbf{R}$ gedefinieerd op een gesloten en begrensd deel $V \subset \mathbf{R}$ een gesloten en begrensde verzameling als beeld heeft (Stelling A.1.12.1). Een gevolg daarvan is dat een continue funktie op een gesloten en begrensd interval zijn maximum aanneeemt (Gevolg A.1.12.2). Deze stelling werd bewezen met behulp van het volledigheidsaxioma. In plaats van het volledigheidsaxioma kan men ook de daarmee gelijkwaardige stelling van Bolzano-Weierstrass gebruiken. Een dergelijk bewijs zullen we in vervolg geven in de algemenere context van $\mathbf{R}^n$. Allereerst zullen we de nodige begrippen van open en gesloten verzamelingen de revue laten passeren; daarna komen het limiet- en continuïteitsbegrip aan de orde.

Bestudeer Analyse B, §6.2 en lees de onderstaande toelichting. De behandeling van het begrip Cauchy-rij (B.6.2.2.3,4 en B.6.2.3) stellen we uit tot het natuurlijke moment waarop dit begrip wordt toegepast in de theorie van de reeksen.

Toelichting bij B.6.2.1: De gegeven definities van open en gesloten verzamelingen kunnen geherformuleerd worden in termen van de reeds geïntroduceerde bolomgevingen

$$B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \quad \|x - a\| < \varepsilon\} \qquad (a \in \mathbf{R}^n,\ \varepsilon > 0).$$

In het vervolg is V steeds een deelverzameling van $\mathbf{R}^n$.

Een punt $a \in V$ heet *inwendig punt* van V als er een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat $B(a;\varepsilon) \subset V$. De verzameling van inwendige punten van V heet het *inwendige* van V en wordt genoteerd als V^{inw}. Merk op dat $V^{\mathrm{inw}} \subset V$. De verzameling V heet *open* als ieder punt van V inwendig is, m.a.w. als $V = V^{\mathrm{inw}}$.

Een punt $a \in \mathbf{R}^n$ heet *verdichtingspunt* van V als voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt: $V \cap B(a;\varepsilon) \neq \emptyset$. De verzameling van verdichtingspunten van V heet de *afsluiting* van V en wordt genoteerd als $\overline{V}$. Merk op dat $V \subset \overline{V}$. De verzameling V heet *gesloten* als ieder verdichtingspunt van V tot V behoort, m.a.w. als $V = \overline{V}$.

Waarschuwing: een verzameling die niet open is, hoeft beslist niet gesloten te zijn. De deelverzameling $]0,1]$ van $\mathbf{R}$ is bijvoorbeeld niet open, maar ook niet gesloten.

De begrippen open en gesloten zijn complementair in de volgende zin:

Lemma 2.3 *Een verzameling $V \subset \mathbf{R}^n$ is open dan en slechts dan als zijn complement $\mathbf{R}^n \setminus V$ gesloten is.*

Bewijs. Schrijf $W = \mathbf{R}^n \setminus V$. Laat V open zijn, en veronderstel dat $a \in V$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon) \subset V$, dus $B(a;\varepsilon) \cap W = \emptyset$. Hieruit blijkt dat a geen verdichtingspunt van W is. We concluderen dat de verdichtingspunten van W tot het complement van V moeten behoren, dus tot W. Dus W is gesloten.

Voor de omgekeerde implicatie veronderstellen we dat W gesloten is. Laat a een punt van V zijn. Dan behoort a niet tot W, dus is ook geen verdichtingspunt van W. Daarom is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon) \cap W = \emptyset$. Maar dit betekent dat $B(a;\varepsilon)$ bevat is in het complement van W, dus in V. Dus $a \in V^{\mathrm{inw}}$. Ieder punt van V is derhalve inwendig. □

Open verzamelingen gedragen zich als volgt bij het nemen van verenigingen en doorsnedes.

Lemma 2.4 *De doorsnede van eindig veel open deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ is open. De vereniging van een willekeurig stel open deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ is open.*

Bewijs. Laat $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ een willekeurige collectie van open deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ zijn. Is a een punt van hun vereniging $U = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$, dan is er een $\alpha \in \mathcal{A}$ zo dat $a \in U_\alpha$. Omdat U_α open is, bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon) \subset U_\alpha$. Dus ook $B(a;\varepsilon) \subset U$. Derhalve is U open.

Veronderstel nu dat $\mathcal{A}$ eindig is, en zij $V = \cap_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Zij $a \in V$. Voor iedere $\alpha \in \mathcal{A}$ is $a \in U_\alpha$, dus er is een $\varepsilon_\alpha > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon_a) \subset U_\alpha$. Uit de eindigheid van $\mathcal{A}$ volgt dat $\varepsilon = \min\{\varepsilon_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ bestaat en positief is. Het is evident dat $B(a;\varepsilon) \subset U_\alpha$ voor ieder α, dus $B(a;\varepsilon) \subset V$. Hieruit volgt a inwendig punt van V is. Dus V is open. □

In verband met Lemma 2.3 gedragen gesloten verzamelingen zich complementair bij het nemen van doorsnedes en verenigingen:

Lemma 2.5 *De vereniging van eindig veel gesloten deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ is gesloten. De doorsnede van een willekeurig stel gesloten deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ is gesloten.*

2.3 Continuïteit en gesloten begrensde verzamelingen

Bestudeer Definities B.6.3.2 en B.6.3.3, en lees de volgende toelichting.

Toelichting bij Definities B.6.3.2 & B.6.3.3: In termen van bolomgevingen kunnen de definities als volgt geherformuleerd worden.

Laat $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ een funktie zijn, $a \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^p$. Dan betekent $\lim_{x \to a} f(x) = b$ het volgende: bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zo dat $f(B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)) \subset B(b;\varepsilon)$.

Stel dat $a \in \mathrm{Dom}(f)$. Dan betekent de uitspraak 'f is continu in a' het volgende: voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat $f(B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)) \subset B(f(a);\varepsilon)$. Het in het diktaat bovenaan pag. 140 getekende plaatje visualiseert deze laatste inclusie.

We komen nu aan het gedrag van continue funkties op gesloten en begrensde verzamelingen. Lees §6.3 tot Gevolg 6.3.7 in het Analyse B diktaat en bestudeer de onderstaande toelichting.

Toelichting bij Stelling 6.3.6: Als voorbereiding geven we de volgende belangrijke karakterisering van gesloten en begrensde deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$.

Stelling 2.6 *Zij $V \subset \mathbf{R}^n$. Dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

(a) *de verzameling V is gesloten en begrensd;*

(b) *iedere in V gelegen rij heeft een convergente deelrij met een in V gelegen limiet.*

Bewijs. (a) $\Rightarrow$ (b): Stel dat (a) geldt, en laat $(x_k)_{k \geq 1}$ een rij in V zijn. Deze rij is begrensd, dus heeft een convergente deelrij $(x_{k(j)})_{j \geq n}$, wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass. Zij a de limiet van deze deelrij. Dan is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een N zo dat $j \geq N \Rightarrow x_{k(j)} \in B(a;\varepsilon)$, dus $B(a;\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$. Hieruit volgt dat $a \in \overline{V} = V$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Laat (b) gelden. Veronderstel dat V niet begrensd is. Dan bestaat er een rij (x_k) met $x_k \in V$ en $\|x_k\| \geq k$. Iedere deelrij van (x_k) is onbegrensd, en kan dus niet convergent zijn, tegenspraak. Derhalve is V begrensd. Laat a een verdichtingspunt van V zijn. Dan kan men voor iedere $k \geq 1$ een $x_k \in \mathbf{R}^n$ kiezen met $x_k \in B(a;1/k) \cap V$. Uit $\|x_k - a\| \leq 1/k$ volgt dat $\lim_{k \to \infty} x_k = a$. Er is een deelrij van (x_k) die een in V gelegen limiet b heeft. Die deelrij moet a als limiet hebben, dus $a = b \in V$. Ieder verdichtingspunt van V behoort dus tot V, en we concluderen dat (a) geldt. $\square$

We komen nu bij een belangrijke toepassing.

Stelling 2.7 *Laat $V \subset \mathbf{R}^n$ een gesloten en begrensde verzameling zijn, en $f : V \to \mathbf{R}^p$ een continue funktie. Dan is $f(V)$ gesloten en begrensd.*

Bewijs. Laat (y_k) een rij in $f(V)$ zijn. Dan bestaat er voor iedere y_k een $x_k \in V$ zo dat $y_k = f(x_k)$. De rij (x_k) heeft een convergente deelrij $(x_{k(j)})$ met limiet $a \in V$. Uit de continuïteit van f in a volgt dat

$$f(a) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k(j)}) = \lim_{j\to\infty} y_{k(j)}.$$

De rij (y_k) heeft dus een deelrij die convergent is met een in $f(V)$ gelegen limiet. Gebruik nu de karakterisering uit de bovenstaande stelling. □

Gevolg 2.8 *Laat $V \subset \mathbf{R}^n$ een gesloten en begrensde verzameling zijn, en $f : V \to \mathbf{R}$ een continue funktie. Dan neemt f op V een minimum en een maximum aan, dwz. er zijn $a, b \in V$ zo dat:*

$$f(a) \le f(x) \le f(b) \qquad (x \in V).$$

Bewijs. Zie het bewijs van Gevolg 1.12.2 in Analyse A. □

Een tweede belangrijke toepassing van Stelling 2.6 is de volgende generalisatie van Stelling A.1.13.1 (uniforme continuïteit van een continue funktie op een begrensde gesloten verzameling).

Stelling 2.9 *Laat V een begrensd en gesloten deel van $\mathbf{R}^n$ zijn. Dan is iedere continue funktie $f : V \to \mathbf{R}^p$ uniform continu op V.*

Bewijs. Veronderstel dat er een continue funktie $f : V \to \mathbf{R}^p$ bestaat die continu is maar niet uniform continu. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ met de volgende eigenschap: bij iedere $\delta > 0$ is er een tweetal punten $x, y \in V$ te vinden met $\|x - y\| < \delta$, maar $\|f(x) - f(y)\| \ge \varepsilon$. In het bijzonder is er bij iedere $k \ge 1$ een tweetal punten $x_k, y_k \in V$ te vinden met $\|x_k - y_k\| < 1/k$, en $\|f(x_k) - f(y_k)\| > \varepsilon$. De rij $(x_k) \in V$ bezit een convergente deelrij $(x_{k(j)})$ met $a = \lim_{j\to\infty} x_{k(j)} \in V$. De rij $(y_{k(j)})$ bezit eveneens een convergente deelrij, dus door de rij van indices $k(1) < k(2) < \ldots$ eventueel te vervangen door een deelrij kunnen we bereiken dat $a = \lim_{j\to\infty} x_{k(j)}$ en $b = \lim_{j\to\infty} y_{k(j)}$ bestaan en tot V behoren. Uit $\|x_k - y_k\| < 1/k$ volgt door limiet overgang dat $a = b$. Uit de continuïteit van f in a volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $f(B(a;\delta) \cap V) \subset B(f(a);\varepsilon/2)$. Voor j voldoende groot (zeg $j \ge N$) geldt $x_{k(j)}, y_{k(j)} \in B(a;\delta)$, dus:

$$\|f(x_{k(j)}) - f(y_{k(j)})\| \le \|f(x_{k(j)}) - f(a)\| + \|f(a) - f(y_{k(j)})\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dit is in tegenspraak met de keuzes van de x_k, y_k. □

3 Complexe getallen

3.1 Inleiding

Bestudeer §§ 2.1, 2.2 uit het Analyse B diktaat.

We benadrukken hier dat $\mathbf{C}$ gelijk is aan $\mathbf{R}^2$ voorzien van de extra structuur van complexe vermenigvuldiging. We noteren de variabele in $\mathbf{C}$ met $z = x + iy = (x, y)$. De modulus van z is gedefinieerd door: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Derhalve geldt

$$|z| = \|(x, y)\|;$$

de modulus van z is dus de Euclidische afstand van (x, y) tot de oorsprong. De driehoeksongelijkheden $|z+w| \leq |z|+|w|$ en $|z-w| \geq ||z|-|w||$ zijn daarom precies de driehoeksongelijkheden voor de Euclidische norm in $\mathbf{R}^2$.

Een rij in $\mathbf{C}$ is in het bijzonder een rij in $\mathbf{R}^2$. Een funktie f : $\mathbf{C}$ æ $\mathbf{C}$ is in het bijzonder een funktie $\mathbf{R}^2$ æ $\mathbf{R}^2$. De in Hoofdstuk 6 gegeven definities van limieten en continuïteit gelden dan ook in het bijzonder voor rijen in $\mathbf{C}$ en voor funkties $\mathbf{C}$ æ $\mathbf{C}$. Natuurlijk kunnen die definities geherformuleerd worden in termen van de voor $\mathbf{C}$ geïntroduceerde notaties. Dit is precies wat gedaan is in het diktaat in de paragrafen 2.6 en 2.7.

Bestudeer §§ B.2.6, B.2.7. Merk op dat Definitie B.2.7.1 (limiet van een funktie) een speciaal geval is van Definitie B.6.3.2. Definitie B.2.7.4 (continuïteit) is een speciaal geval van Definitie B.6.3.3.

Voor een funktie f : $\mathbf{C}$ æ $\mathbf{C}$ zullen we de componentnotatie $f = (f_1, f_2)$ gebruiken. Hierbij zijn f_1 en f_2 funkties $\mathbf{C}$ æ $\mathbf{R}$. Vaak zullen we ook de notatie $f = \mathrm{Re}\, f + i\, \mathrm{Im}\, f$ voor de splitsing in reëel en imaginair deel gebruiken. Merk op dat

$$\mathrm{Re}\, f = f_1, \qquad \mathrm{Im}\, f = f_2.$$

Stelling B.2.7.5 is nu een bijzonder geval van Gevolg B.6.4.3.

3.2 Differentiatie van funkties R æ C

Bestudeer B.2.8.1 en B.2.8.2. Algemener behandelen we hier differentiatie van funkties $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^p$ $(p \in \mathrm{N})$. Definitie B.2.8.1 is een speciaal geval van de volgende definitie:

Definitie 3.1 Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval, en $a \in I$. Een funktie $f : I \to \mathbf{R}^p$ heet differentieerbaar in a als

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

bestaat. In het geval de limiet bestaat noteren we deze met $f'(a)$. (Merk op dat $f'(a) \in \mathbf{R}^p$.)

Lemma 3.2 *Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval, en $a \in I$. Een funktie $f : I \to \mathbf{R}^p$ is differentieerbaar in a dan en slechts dan als iedere component f_j van f $(1 \leq j \leq p)$ differentieerbaar in a is. Is dat het geval, dan is:*

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_p'(a)).$$

Bewijs. Voor $t \in I \setminus \{a\}$ geldt:

$$\begin{aligned}\frac{f(t) - f(a)}{t - a} &= \frac{1}{t - a}\,(f_1(t) - f_1(a), \ldots, f_p(t) - f_p(a)) \\ &= \left(\frac{f_1(t) - f_1(a)}{t - a}, \ldots, \frac{f_p(t) - f_p(a)}{t - a}\right).\end{aligned}$$

Het resultaat volgt nu door toepassing van Stelling B.6.4.2. □

In het bijzonder volgt uit het bovenstaande resultaat Stelling B.2.8.2: *een funktie $f : I \to \mathbf{C}$ is differentieerbaar in een punt $a \in I$ dan en slechts dan als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ differentieerbaar in a zijn. Is dat het geval, dan geldt:*

$$f'(a) = (\mathrm{Re}\, f)'(a) + i\, (\mathrm{Im}\, f)'(a).$$

3.3 Poolcoördinaten

Bestudeer § B.2.4. We zullen ook de volgende imaginaire e-macht notatie gebruiken:

Definitie 3.3 Voor $t \in \mathbf{R}$ definiëren we

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

In het diktaat wordt eerst de notatie $\Theta(t)$ voor e^{it} gebruikt. De e–macht notatie wordt pas later in Definitie B.2.10.2 geïntroduceerd (maar dan algemener met een complexe exponent).

De e–macht notatie kan op dit moment reeds gemotiveerd worden door Lemma B.2.5.1, dat in de e–macht notatie luidt: *voor alle $\varphi, \psi \in \mathbf{R}$ geldt:*

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)};$$

Een tweede motivatie voor de e–macht notatie is:

Lemma 3.4 *Zij $a \in \mathbf{R}$. Voor alle $t \in \mathbf{R}$ geldt:*

$$\frac{d}{dt}e^{iat} = iae^{iat}$$

Bewijs. Uit Definitie 3.3 en Lemma 3.2 volgt:

$$\frac{d}{dt}e^{iat} = \frac{d}{dt}(\cos at, \sin at) = (-a \sin at, a \cos at) = iae^{iat}.$$

□

3.4 Worteltrekken

Bestudeer § B.2.3. Na de introductie van poolcoördinaten kan het bewijs van Stelling 2.3.1 aanzienlijk vereenvoudigd worden als volgt:

Alternatief bewijs van Stelling 2.3.1. Zij $z \in \mathbf{C}$ willekeurig. We zoeken $w \in \mathbf{C}$ met $w^2 = z$. Schrijf $z = re^{i\varphi}$, met $r = |z|$ en $\varphi \in \mathbf{R}$. Dan voldoet

$$w = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\varphi}.$$

Immers:

$$w^2 = (\sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\varphi})^2 = (\sqrt{r})^2\, e^{\frac{1}{2}i\varphi + \frac{1}{2}i\varphi} = re^{i\varphi} = z.$$

□

Het bovenstaande idee kunnen we algemener gebruiken om bij gegeven $z \in \mathbf{C}$ de oplossingen van de vergelijking

$$w^p = z \tag{5}$$

te vinden. Daarbij maken we gebruik van het volgende hulplemma:

Lemma 3.5 *Zij $s, t \in \mathbf{R}$. Dan is $e^{is} = e^{it}$ dan slechts dan als er een $k \in \mathbf{Z}$ bestaat zo dat $s = t + 2k\pi$.*

Bewijs. Gebruik de definitie van de imaginaire e–macht. □

De oplossing van (5) bepalen we nu als volgt. Schrijf weer $z = re^{i\varphi}$, met $r = |z|$ en $\varphi \in \mathbf{R}$. Een complex getal $w = \rho e^{i\psi}$ (met $\rho \geq 0$ en $\psi \in \mathbf{R}$ voldoet aan $w^p = z$ dan en slechts dan als:

$$\rho^p e^{ip\psi} = re^{i\varphi}.$$

Door voor beide leden van de bovenstaande vergelijking de moduli te beschouwen ziet men dat de vergelijking (5) gelijkwaardig is met het tweetal vergelijkingen

$$\rho^p = r \qquad \text{en} \qquad e^{ip\psi} = e^{i\varphi}.$$

Dit is wegens Lemma 3.5 weer gelijkwaardig met

$$\rho = \sqrt[p]{r} \qquad \text{en} \qquad p\psi - \varphi \in 2\pi\mathbf{Z}$$

Hieruit concluderen we dat de vergelijking (5) precies p oplossingen w heeft. Die worden gegeven door:

$$w_k = \sqrt[p]{r}\, e^{i(\frac{\varphi + 2k\pi}{p})} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Voorbeeld 3.6 De oplossingen van de vergelijking $w^4 = -2$ kunnen als volgt gevonden worden. Er geldt: $|-2| = 2$, en $\arg(-2) = \pi$, dus de oplossingen worden gegeven door $w = \sqrt[4]{2}e^{i\psi}$ met

$$\psi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

De oplossingen zijn derhalve:

$$w = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt[4]{2}}.$$

3.5 Complexwaardige integralen

Gemotiveerd door Lemma 3.2 behandelen we integreerbaarheid van vectorwaardige funkties $f : \mathbf{R}$ æ $\mathbf{R}^p$ componentsgewijs als volgt.

Definitie 3.7 Zij $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Een funktie $f : [a, b] \to \mathbf{R}^p$ heet Riemann-integreerbaar op $[a, b]$ als iedere component f_j $(1 \leq j \leq p)$ een Riemann-integreerbare funktie $[a, b] \to \mathbf{R}$ is. Is f Riemann-integreerbaar op $[a, b]$ dan definiëren we de integraal van f over het interval $[a, b]$ door

$$\int_a^b f(x)\, dx := (\int_a^b f_1(x)\, dx, \ldots, \int_a^b f_p(x)\, dx).$$

Door toepassing van het bovenstaande met $p = 2$ zien we dat een funktie $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ Riemann-integreerbaar op $[a, b]$ is als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ Riemann-integreerbaar op $[a, b]$ zijn. Bovendien geldt in geval van integreerbaarheid dat:

$$\mathrm{Re} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\, dt,$$

$$\mathrm{Im} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\, dt.$$

Na de bovenstaande definitie gaat de Hoofdstelling van de integraalrekening (Stelling A.4.4.4) door voor vectorwaardige funkties:

Stelling 3.8 *Laat $f : [a, b] \to \mathbf{R}^p$ een continue funktie zijn. Dan heeft f een primitieve op $[a, b]$ (i.e. een differentieerbare funktie $F : [a, b] \to \mathbf{R}^p$ met $F' = f$), n.l. de funktie $t \mapsto \int_a^t f(s)\, ds$. D.w.z.*

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(s)\, ds = f(t) \quad (t \in [a, b]).$$

Als $F : [a, b] \to \mathbf{R}^p$ een willekeurige primitieve van f op $[a, b]$ is dan geldt:

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Bewijs. Het bewijs bestaat uit toepassing van Stelling A.4.4.4 op de componenten van f.
□

Voorbeeld 3.9 Zij $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Uit Lemma 3.4 volgt dat de funktie $t \mapsto (ia)^{-1}e^{iat}$ een primitieve is van $t \mapsto e^{iat}$. Met Stelling 3.8 vinden we derhalve dat:

$$\int_p^q e^{iat}\, dt = \frac{e^{iaq} - e^{iap}}{ia}.$$

Uiteraard kan deze formule ook bewezen worden door onbinding van de integraal in reëel en imaginair deel. Ga na dat dit omslachtiger is.

Iets lastiger te bewijzen is de generalisatie van de driehoeksongelijkheid. We beginnen met een tweetal lemmas.

Lemma 3.10 *Zij $f : [a, b] \to \mathbf{R}^p$ een Riemann-integreerbare funktie. Dan is ook de funktie $\|f\| : [a, b] \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \|f(t)\|$ Riemann-integreerbaar.*

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ is willekeurig. Dan is het wegens Stelling A.4.3.1 voldoende aan te tonen dat er een verdeling V van het interval $[a, b]$ bestaat zo dat

$$\overline{S}(\|f\|, V) < \underline{S}(\|f\|, V) + \varepsilon.$$

Per definitie is iedere component f_j van f integreerbaar, dus er bestaat voor iedere $1 \leq j \leq p$ een verdeling V_j van $[a, b]$ zo dat $\overline{S}(f_j, V_j) < \underline{S}(f_j, V_j) + \varepsilon/p$. We zullen laten zien dat de vereiste schatting geldt voor de gemeenschappelijke verfijning V van de V_j, $1 \leq j \leq p$.

Zij $D \subset [a, b]$ een gesloten en begrensd interval. Dan geldt voor alle $s, t \in D$ dat

$$\|f(s)\| \leq \|f(t)\| + \|f(s) - f(t)\| \leq \|f(t)\| + \sum_{j=1}^{p} |f_j(s) - f_j(t)|. \tag{6}$$

Voor alle $s, t \in D$ geldt: $f_j(s) - f_j(t) \leq \sup_D f_j - \inf_D f_j$ en ook $f_j(t) - f_j(s) \leq \sup_D f_j - \inf_D f_j$. Derhalve geldt voor alle $s, t \in D$ dat $|f_j(s) - f_j(t)| \leq \sup_D f_j - \inf_D f_j$. Combineren we dit met (6), dan zien we dat:

$$\|f(s)\| \leq \|f(t)\| + \sum_{j=1}^{p}(\sup_D f_j - \inf_D f_j).$$

Hieruit volgt dat voor alle $s \in D$ geldt:

$$\|f(s)\| \le \inf_D \|f\| + \sum_{j=1}^{p} (\sup_D f_j - \inf_D f_j)$$

en tenslotte volgt dat:

$$\sup_D \|f\| \le \inf_D \|f\| + \sum_{j=1}^{p} (\sup_D f_j - \inf_D f_j).$$

Passen we het bovenstaande toe op de intervallen D van de verdeling V, dan vinden we dat voor de onder- en bovensom van $\|f\|$ t.a.v. V geldt:

$$\overline{S}(\|f\|, V) \le \underline{S}(\|f\|, V) + \sum_{j=1}^{p} (\overline{S}(f_j, V) - \underline{S}(f_j, V)) < \underline{S}(\|f\|, V) + \varepsilon.$$

$\square$

Lemma 3.11 *Laat $f : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ een Riemann-integreerbare funktie zijn en $A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ een lineaire afbeelding. Dan is $A \circ f : t \mapsto A(f(t))$, $[a,b] \to \mathbf{R}^p$ een Riemann-integreerbare funktie, en er geldt:*

$$A[\int_a^b f(t)\ dt] = \int_a^b A[f(t)]\ dt. \tag{7}$$

Bewijs. Zij (A_{ij}) de matrix van A t.o.v. de standaard basis van $\mathbf{R}^p$. Is $v \in \mathbf{R}^p$, dan wordt de j–de component van Av gegeven door: $(Av)_j = \sum_{i=1}^{p} A_{ij} v_i$. Passen we dit toe met $v = \int_a^b f(t)\ dt$, dan zien we dat de j–de component van het linkerlid van (7) gegeven wordt door:

$$\left(A[\int_a^b f(t)\ dt]\right)_j = \sum_{i=1}^{p} A_{ij} \int_a^b f_i(t)\ dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{p} A_{ij} f_i(t)\right)\ dt = \int_a^b (A[f(t)])_j\ dt.$$

De laatste uitdrukking is precies de j–de component van het rechterlid van (7). $\square$

Stelling 3.12 *Laat $f : [a,b] \to \mathbf{R}^p$ een Riemann-integreerbare funktie zijn. Dan is de funktie $\|f\| : [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:*

$$\|\int_a^b f(t)\ dt\| \le \int_a^b \|f(t)\|\ dt.$$

Bewijs. Er is een orthogonale lineaire afbeelding $A : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ die de vector $v = \int_a^b f(t)\ dt$ afbeeldt op een veelvoud ce_1 van de eerste standaard basis vector van $\mathbf{R}^p$, met $c \ge 0$. Uit de orthogonaliteit van A volgt: $c = \|ce_1\| = \|Av\| = \|v\|$. Derhalve geldt:

$$\begin{aligned} \|v\| = c &= (Av)_1 = (A \int_a^b f(t)\ dt)_1 = (\int_a^b A[f(t)]\ dt)_1 \\ &= \int_a^b (A[f(t)])_1\ dt \le \int_a^b \|A[f(t)]\|\ dt = \int_a^b \|f(t)\|\ dt. \end{aligned}$$

In het bovenstaande is bij de vierde gelijkheid Lemma 3.11 gebruikt. De vijfde gelijkheid geldt per definitie, en bij de ongelijkheid is gebruikt dat voor iedere vector $w \in \mathbf{R}^p$ geldt: $w_1 \le \|w\|$. $\square$

Opmerking 3.13 Toepassing van Stelling 3.12 met $p = 2$ geeft de derde eigenschap van B.2.8.6: voor een Riemann-integreerbare funktie $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ geldt dat:

$$|\int_a^b f(t)\, dt| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

In het Analyse B diktaat wordt vergeten de Riemann-integreerbaarheid van $|f| : t \mapsto |f(t)|$ op $[a, b]$ aan te tonen. Dat het bewijs hiervan niet triviaal is blijkt uit het boven gegeven bewijs van Lemma 3.10. Merk op dat in het geval van complexwaardige funkties het hierboven gegeven bewijs van Stelling 3.12 overeenkomt met het in het Analyse B diktaat gegeven bewijs. De hierboven ingevoerde lineaire afbeelding A correspondeert met de afbeelding $z \mapsto \lambda z$, met λ als in het bewijs van B.2.8.6.

Bestudeer blz. 37 van het Analyse B diktaat.

3.6 De Cauchy-Riemann vergelijkingen

Bestudeer § 2.9 uit het Analyse B diktaat. In aanvulling hierop behandelen we de zogenaamde *Cauchy-Riemann vergelijkingen.* Laat $U \subset \mathbf{C}$ een open deelverzameling zijn, $f : U \to \mathbf{C}$ een funktie.

Lemma 3.14 *Laat de funktie f complex differentieerbaar zijn in een punt $a \in U$. Dan is f partieel differentieerbaar in a en er geldt:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) \tag{8}$$

Uit de complex differentieerbaarheid van f in a volgt:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a). \end{aligned}$$

Anderzijds is de complexe afgeleide gelijk aan:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)}{ih} \\ &= \frac{1}{i}\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbf{R}}} \frac{f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)}{h} \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a). \end{aligned}$$

□

Opmerking 3.15 Zij $f = f_1 + if_2$ de ontbinding van f in reëel en imaginair deel. Dan volgt uit Lemma 3.2 dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x}(a) \quad \text{en} \quad \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) - i\,\frac{\partial f_1}{\partial y}(a).$$

Door in (8) de reële en imaginaire delen aan elkaar gelijk te stellen verkrijgt men derhalve het met (8) equivalente tweetal vergelijkingen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(a), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(a). \tag{9}$$

Deze vergelijkingen staan bekend als de Cauchy-Riemann vergelijkingen.

Opmerking 3.16 De vergelijking (8) heeft de volgende meetkundige betekenis.

Beschouw de krommen $\mathbf{c} : t \mapsto f(a+t)$ en $\mathbf{d} : t \mapsto f(a+it)$. Hun raakvectoren in $f(a)$ worden gegeven door:

$$\mathbf{c}'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a), \quad \mathbf{d}'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Uit (8) volgt nu dat

$$\mathbf{d}'(0) = i\,\mathbf{c}'(0).$$

De raakvector $\mathbf{d}'(0)$ is derhalve het beeld van de raakvector $\mathbf{c}'(0)$ onder de rotatie over de hoek $\frac{\pi}{2}$. In het bijzonder hebben de gegeven raakvectoren gelijke lengte en staan ze loodrecht op elkaar. Hieruit concluderen we dat de f-beelden van de lijnen $x = a_1$ en $y = a_2$ elkaar in $f(a)$ loodrecht snijden. Dit komt goed tot uiting in het plaatje op blz. 42 van het Analyse B diktaat, dat illustreert dat de exponentiële afbeelding $\exp : z \mapsto e^z$ de lijnen $x =$ constant afbeeldt op cirkels met de oorsprong als centrum, en de lijnen $y =$ constant op halflijnen vanuit de oorsprong.

Bestudeer §§ B.2.11, B.2.12, B.2.13 en B.2.14.

4 De formule van Taylor

4.1 Inleiding

Bestudeer § B.1.1, B.1.2, B.1.3. De hieronder volgende tekst dient als vervanging van de paragrafen § B.1.4 t/m B.1.10 uit het Analyse B diktaat. Die paragrafen hoeft u dus niet te bestuderen.

4.2 De formule van Taylor

Bij Analyse A hebt u reeds kennis gemaakt met de formule van Taylor. We brengen de daar behandelde stelling nog eens in herinnering.

Stelling 4.1 (Formule van Taylor) *Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval, $a \in I$, en zij $f : I \to \mathbf{R}$ een $n+1$ keer differentieerbare funktie ($n \geq 0$). Dan is er bij iedere $x \in I$ met $x \neq a$ een punt $\xi = \xi(x)$ tussen a en x zo dat:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j \; + \; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{10}$$

Opmerking 4.2 Het woord 'tussen' in de bovenstaande stelling moet zo opgevat worden dat $\xi \neq a$ en $\xi \neq x$. In het vervolg zal het gemakkelijk zijn de notatie $I_{a,x}$ voor het open interval met eindpunten a en x te gebruiken. Dus:

$$I_{a,x} = \begin{cases}]a, x[& \text{als} \quad a < x; \\ ]x, a[& \text{als} \quad x < a. \end{cases}$$

Voor het punt $\xi = \xi(x)$ in de bovenstaande stelling geldt dus $\xi \in I_{a,x}$.

Als $x = a$, dan geldt de bovenstaande formule voor iedere $\xi \in I$, dus in het bijzonder voor $\xi = a$. We spreken af dat $I_{a,a} = \{a\}$. Stelling 4.1 wordt dan: voor iedere $x \in I$ is er een $\xi \in I_{x,a}$ zo dat (10) geldt; het geval $x = a$ hoeven we dus niet meer uit te sluiten.

Gemotiveerd door de bovenstaande stelling geven we de volgende definitie.

Definitie 4.3 (Taylorontwikkeling) Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval, $a \in I$ en $f : I \to \mathbf{R}$ een n keer differentieerbare funktie. De veelterm $P_{f,a,n} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, gedefinieerd door

$$P_{f,a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

heet het *Taylorpolynoom van de orde n van f in a*. De funktie $R_{f,a,n} : I \to \mathbf{R}$, gedefinieerd door

$$R_{f,a,n}(x) = f(x) - P_{f,a,n}(x),$$

heet de *restterm van de orde n van de Taylorontwikkeling van f in a*, of kort: *n-de restterm.* (Als uit de context duidelijk is over welke f en a het gaat, schrijven we eenvoudig: P_n en R_n.)

Voorbeeld 4.4 We beschouwen de funktie $f(x) = (1-x)^{-1}$ voor $x < 1$. Dan is $f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$ en algemeen:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Het n-de orde Taylorpolynoom van f rond 0 wordt dus gegeven door:

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Merk op dat $xP_n(x) - P_n(x) = x^{n+1} - 1$. Derhalve geldt

$$P_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

en voor de n-de restterm vinden we:

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - P_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Met behulp van Definitie 4.3 kan Stelling 4.1 als volgt geformuleerd worden:

Gevolg 4.5 *Als $f : I \to \mathbf{R}$ een $n+1$ keer differentieerbare funktie is en $a \in I$, dan is er bij iedere $x \in I$ een $\xi \in I_{a,x}$ zo dat*

$$R_{f,a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{11}$$

Opmerking 4.6 De bovenstaande formule staat bekend als de formule van Lagrange voor de restterm. Er zijn ook andere formules voor de restterm. Die zullen we in het vervolg echter niet nodig hebben. Daarom laten we de behandeling ervan achterwege. De nieuwsgierige lezer wordt verwezen naar het Analyse B diktaat.

Opmerking 4.7 Een veel voorkomend geval is $a = 0$. De formule van Taylor wordt dan:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x),$$

met $R_n(x) = (n+1)!^{-1} f^{(n+1)}(\xi)\, x^{n+1}$, $\xi \in I_{0,x}$. Dit resultaat heet wel de *formule van Maclaurin.*

Het volgende lemma beschrijft het n-de orde Taylorpolynoom van een n-de graads veelterm:

Lemma 4.8 *Zij $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ een veelterm van graad $\leq n$, en zij $a \in \mathbf{R}$. Dan is*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Bewijs: Met volledige inductie naar de graad bewijst men dat iedere veelterm p te schrijven is in de vorm

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k,$$

waarbij de b_k zekere constanten zijn en $n = \text{graad}(p)$. (Als $p(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$, dan is $p(x) = c_n(x-a)^n + q(x)$, waarbij $\text{graad}(q) \leq n-1$; pas nu inductie toe.) Door k keer te differentiëren en vervolgens $x = a$ in te vullen ziet men in dat $b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$. □

Gevolg 4.9

(a) *Een veelterm van graad $\leq n$ wordt eenduidig bepaald door de waarden van zijn nulde t/m n-de afgeleide in één punt $a \in \mathbf{R}$.*

Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval, $a \in I$ en $f : I \to \mathbf{R}$ een n keer differentieerbare funktie. Dan geldt:

(b) *$P_{f,a,n}$ is de unieke veelterm die in a dezelfde nulde t/m n-de afgeleide heeft als f.*

(c) *$R_{f,a,n}$ is de nulfunktie dan en slechts dan als f een veelterm van graad $\leq n$ is.*

Voorbeeld 4.10

(a) Zij $f(x) = x^3$ en $a = 1$.
$f(1) = 1$; $f'(1) = 3$; $f''(1) = 6$; $f^{(3)}(1) = 6$; $f^{(k)}(1) = 0$ $(k \geq 4)$.
We vinden dus voor het polynoom f de volgende Taylorpolynomen in $a = 1$.
$P_0(x) = 1$.
$P_1(x) = 1 + 3(x - a) = -2 + 3x$,
$P_2(x) = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 = 1 - 3x + 3x^2$,
$P_3(x) = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3 = x^3$.
Zie ook de figuur op blz. 9 van het Analyse B diktaat.

(b) Zij $f(x) = \sin x$, en $a = 0$.
$f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$.
Dus $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R(x)$, waarbij $R = R_{\sin,0,6}$.

4.3 Schattingen voor de restterm

Het grote belang van de formule van Lagrange voor de restterm is dat hij ons dikwijls in staat stelt de restterm te schatten. Zij $I \subset \mathbf{R}$ weer een interval, $a \in I$, en $f : I \to \mathbf{R}$ een $n + 1$ keer differentieerbare funktie. Veronderstel dat $f^{(n+1)}$ begrensd is op het interval I : dan bestaat er dus een $M > 0$ zo dat $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ voor alle $x \in I$. Zij $\xi = \xi(x)$ als in Gevolg 4.5. Dan geldt $\xi \in I_{a,x} \subset I$, dus kunnen we de restterm schatten door

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}$$

In het bijzonder geldt dan dus dat

$$R_n(x) = \mathcal{O}((x - a)^{n+1}) \qquad (x \to a); \tag{12}$$

m.a.w. R_n is in de buurt van a een orde kleiner dan iedere term van het Taylorpolynoom P_n. In deze zin is het Taylorpolynoom een goede benadering voor f in de buurt van a.

Is $f \in C^{n+1}(I)$, dan is $f^{(n+1)}$ continu, dus zeker begrensd op ieder gesloten en begrensd deelinterval van I dat a bevat. Derhalve geldt (12). Met de restterm van Lagrange vinden we preciezer:

Stelling 4.11 *Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval, $a \in I$ en $f \in C^{n+1}(I)$. Dan geldt voor alle $x \in I$:*

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in I_{a,x}} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Opmerking 4.12 Voor de liefhebber merken we nog op dat de schatting (12) de volgende zwakkere schatting impliceert:

$$R_n(x) = o((x-a)^n) \quad (x \to a). \tag{13}$$

We zullen hieronder laten zien dat deze schatting ook nog geldt onder de zwakkere voorwaarde $f \in C^n(I)$. Als $x \to a$, dan geldt zeker $\xi(x) \to a$, en omdat $f^{(n)}$ continu is in a, volgt hieruit:

$$f^{(n)}(\xi(x)) = f^{(n)}(a) + o(1) \qquad (x \to a).$$

Met de restterm van Lagrange leiden we hieruit af dat:

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \qquad (x \to a).$$

Uit de definities van het Taylorpolynoom en de restterm volgt dat

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \tag{14}$$

(Hier komt geen stelling aan te pas.) Combineren we dit met de bovenstaande uitdrukking voor R_{n-1}, dan zien we dat (13) volgt.

Voorbeeld 4.13 We beschouwen de funktie $f(x) = \sin x$ op het interval $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. De in Voorbeeld 4.10 (b) gevonden zesde orde resterm R van de Taylorontwikkeling in 0 kan geschat worden door:

$$|R(x)| \leq \frac{|x|^7}{7!} \max_{\xi \in I} |-\cos\xi| \leq \frac{1}{5040}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \leq 4.10^{-5}.$$

Derhalve geldt voor $|x| \leq \frac{\pi}{4}$:

$$|\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}| \leq 4.10^{-5}.$$

In de volgende paragraaf zullen de boven behandelde schattingen concreet gemaakt worden voor de Taylorontwikkelingen van enkele bekende funkties.

4.4 Enkele belangrijke Taylorontwikkelingen

In de volgende stelling geven we de Taylorontwikkelingen in 0 van enkele belangrijke funkties.

Stelling 4.14 *Zij $n \in \mathbf{N}$. Dan geldt:*

$$
\begin{array}{rlr}
e^x & = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{\exp,n}(x) & (x \in \mathbf{R}) \\
\cos x & = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{\cos,2n+1}(x) & (x \in \mathbf{R}) \\
\sin x & = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{\sin,2n}(x) & (x \in \mathbf{R}) \\
\log(1+x) & = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{\log,n}(x) & (x > -1) \\
\operatorname{arctg} x & = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{\operatorname{arctg},2n}(x) & (x \in \mathbf{R}).
\end{array}
$$

Bewijs: Van de eerste vier funkties kennen we de afgeleiden, en uit hun waarden in 0 volgen de Taylorontwikkelingen. Tenslotte, als $f(x) = \operatorname{arctg} x$, dan is

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2},$$

dus $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$. De hogere afgeleiden van f zijn echter niet eenvoudig te bepalen. Met een truc lukt het echter wèl, $f^{(n)}(0)$ te bepalen voor alle n. Voor $n \geq 1$ is namelijk $((1+x^2)f'(x))^{(n)} = 0$. Voor $n \geq 1$ berekenen we deze afgeleide met behulp van de formule van Leibniz (formule (1.1.4) in het Analyse B diktaat):

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Dus $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0)$, ofwel:

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} = -\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-2)!} \quad (n \geq 2).$$

Hieruit volgt dat $f^{(2n)}(0) = 0$ en $\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$, waarmee de Taylorontwikkeling voor arctg x gevonden is. $\square$

Voor de vijf funkties uit Stelling 4.14 bepalen we nu met behulp van Gevolg 4.5 formules voor de resttermen. Bij exp, cos, sin en log geven we de restterm van Lagrange; voor log en arctg geven we een integraalformule voor de restterm.

Stelling 4.15 (formules voor de resttermen).

$$\begin{array}{rll}
e^x & = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} & (x \in \mathbf{R}) \\
\cos x & = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\cos\xi & (x \in \mathbf{R}) \\
\sin x & = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\cos\xi & (x \in \mathbf{R}) \\
\log(1+x) & = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} & (x > -1) \\
\log(1+x) & = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt & (x > -1) \\
\text{arctg } x & = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1} + (-1)^n\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt & (x \in \mathbf{R})
\end{array}$$

Hierin is n een willekeurig niet-negatief geheel getal. Voorts is $\xi = \xi_{n,x}$ een geschikt gekozen reëel getal tussen 0 en x.

Bewijs: De eerste vier formules volgen direct uit Gevolg 4.5. De laatste twee formules vinden we met behulp van de formule voor de som van een eindige meetkundige reeks. Uit Voorbeeld 4.4 volgt, voor $t > -1$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + \frac{(-t)^n}{1+t}. \tag{15}$$

Door integreren van de bovenstaande vergelijking vinden we, voor $x > -1$:

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + (-1)^n\frac{t^n}{1+t}\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Uit (15) volgt ook dat

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^{2k} + (-1)^n\frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

Door integratie van de bovenstaande vergelijking vinden we

$$\begin{aligned}
\text{arctg } x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^n\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt. \qquad (17)
\end{aligned}$$

De somgedeelten van (16) en (17) stemmen overeen met de uit Stelling 4.14 reeds bekende Taylorpolynomen. Dus zijn de resttermen juist de integralen uit de genoemde formules. □

Voorbeeld 4.16 Met Stelling 4.11 en Stelling 4.14, of ook direct met Stelling 4.15, vinden we:

$$|e^x - \sum_{k=0}^n \tfrac{x^k}{k!}| \le \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x \qquad (x > 0)$$

$$|e^x - \sum_{k=0}^n \tfrac{x^k}{k!}| \le \tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (x < 0)$$

$$|\cos x - \sum_{k=0}^n \tfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}| \le \tfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$|\sin x - \sum_{k=0}^n \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}| \le \tfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$|\log(1+x) - \sum_{k=1}^n \tfrac{(-1)^{k-1}}{k}x^k| \le \begin{cases} \tfrac{x^{n+1}}{n+1} & (x > 0) \\ \tfrac{1}{n+1}(\tfrac{|x|}{1+x})^{n+1} & (-1 < x < 0). \end{cases}$$

Dus bijvoorbeeld:

$$|(\cos 1) - \frac{13}{24}| \le \frac{1}{720} = 0,001389\ldots$$

$$|(\cos 2) - (-\frac{19}{45})| \le \frac{2}{315} = 0,006349\ldots$$

Controle met de calculator bevestigt deze resultaten. Als waarden voor de linkerleden vinden we $0,001364\ldots$ resp. $0,006075\ldots$.

Voorbeeld 4.17 De resttermen voor $\log(1+x)$ en $\operatorname{arctg} x$ kunnen we schatten met de integraalformules uit Stelling 4.15. Eerst de logaritme. Als $x > 0$ dan is

$$|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt| \le \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

We vinden dus dezelfde schatting als in Voorbeeld 4.16. Als $-1 < x < 0$ dan is

$$|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt| \le \frac{1}{1+x}| \int_0^x t^n dt| = \frac{1}{n+1}\frac{|x|^{n+1}}{1+x}.$$

Hier vinden we een betere schatting dan in Voorbeeld 4.16.
Voor de arctangens vinden we:

$$|(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt| \le |\int_0^x t^{2n} dt| = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

4.5 Limietgedrag van resttermen

Zij I een interval in $\mathbf{R}$. Voor een funktie $f \in C^\infty(I)$ kan de Taylorontwikkeling in een inwendig punt $a \in I$ tot willekeurig grote n worden voortgezet: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ($n \ge 0$ willekeurig; de indices f en a laten we weg). Als nu voor zekere $x \in I$ geldt: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, dan is voor die x :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

We formuleren dit belangrijke resultaat als stelling, waarbij we de in A.5.5 ingevoerde notatie voor reeksen gebruiken, een notatie waarop we in Hoofdstuk 3 van het Analyse B diktaat uitvoerig zullen terugkomen.

Stelling 4.18 *Zij I een interval in $\mathbf{R}$ en zij $f \in C^\infty(I)$. Zij a een inwendig punt van I en laat $R_n(x)$ $(n \geq 0, x \in I)$ de restterm van de n-de orde Taylorontwikkeling van f in a zijn. Dan geldt*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

voor alle $x \in I$ waarvoor geldt: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

We onderzoeken nu het limietgedrag van de resttermen van enkele bekende funkties. Hierbij is het volgende lemma van belang.

Lemma 4.19 *Voor elke $x \in \mathbf{R}$ geldt: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.*

Bewijs: Kies $x \in \mathbf{R}$ vast en neem $N \in \mathbf{N}$ zo dat $N \geq 2|x|$. Voor $k \geq N$ is $\frac{|x|}{k} \leq \frac{1}{2}$. Daarom is voor $n \geq N$

$$|\frac{x^n}{n!}| = \frac{|x|^N}{N!} \frac{|x|^{n-N}}{(N+1)\ldots n} \leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{|2x|^N}{N!} \frac{1}{2^n}.$$

Omdat $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, volgt het lemma nu uit de insluitingsstelling (Stelling A.1.5.14). □

We kunnen nu bewijzen:

Stelling 4.20

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} && (x \in \mathbf{R}) \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} && (x \in \mathbf{R}) \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && (x \in \mathbf{R}) \\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} && (-1 < x \leq 1) \\
\operatorname{arctg} x &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} && (-1 \leq x \leq 1)
\end{aligned}$$

Bewijs: Met behulp van Lemma 4.19 volgen de eerste drie formules uit de eerste vier schattingen van Voorbeeld 4.16. De vierde formule volgt voor $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ eveneens uit dat voorbeeld. De scherpere schatting uit Voorbeeld 4.17 levert de vierde formule voor $-1 < x \leq 1$ en de vijfde voor $-1 \leq x \leq 1$. □

Opmerking 4.21

(a) Uit de stelling volgen onder meer de interessante formules:

$$\begin{aligned}\log 2 &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \dots \\ \tfrac{\pi}{4} &= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots\end{aligned}$$

De formule voor log 2 volgt ook uit Voorbeeld 4.16.

(b) Voor $x > 0$ geldt voor de restterm van $\log(1+x)$ ook de volgende schatting:

$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \geq \frac{1}{1+x} \int_0^x t^n dt = \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Hieruit volgt dat voor $x > 1$ geldt: $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \infty$. Voor numerieke approximatie is de Taylorformule in 0 voor $\log(1+x)$ dus onbruikbaar als $x > 1$.

(c) Evenzo ziet men in dat voor de restterm van arctg geldt:

$$|R_n(x)| \geq \frac{1}{1+x^2} \left| \int_0^x t^{2n} dt \right| = \frac{1}{2n+1} \frac{|x|^{2n+1}}{1+x^2},$$

dus

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \infty \text{ als } |x| > 1.$$

4.6 De Taylorontwikkeling voor machten

Zij $\alpha \in \mathbf{R}$ vast gekozen. We onderzoeken de funktie f, gedefinieerd door $f(x) = (1+x)^\alpha$ voor $x > -1$. Voor de afgeleiden vinden we:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} = n! \tbinom{\alpha}{n} (1+x)^{\alpha-n}.$$

Hierbij is

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

en $\binom{\alpha}{0} = 1$ (vergelijk met A.2.9.1). De getallen $\binom{\alpha}{n}$ heten *gegeneraliseerde binomiaalcoëfficiënten.* Merk op dat $\binom{\alpha}{n} = 0$ als α een niet-negatief geheel getal is en $n > \alpha$. Omdat

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n} \quad (n \geq 0),$$

vinden we voor de Taylorontwikkeling van f in het punt 0 het volgende:

Stelling 4.22 *Zij $\alpha \in \mathbf{R}$. Dan geldt voor iedere $x > -1$ dat:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)$$

waarbij

$$R_n(x) = \tbinom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

voor zekere $\xi \in I_{0,x}$.

Met behulp van de restterm van Lagrange kan men inzien dat $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ als $-\frac{1}{2} < x < 1$. Voor details verwijzen we naar Opgave 27 op blz 23,24 van het Analyse B diktaat. Met behulp van de theorie der machtreeksen zullen we in een later stadium aantonen dat de limiet van de restterm ook nul is voor $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$. Dus:

Stelling 4.23 *Zij $\alpha \in \mathbf{R}$. Dan geldt:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad (-1 < x < 1).$$

Merk nog op dat we voor $\alpha \in \mathbf{N}$ het binomium van Newton (formule (2.14) in A.2.9.1) hebben teruggevonden. Ook $\alpha = -1$ geeft een bekende formule.

Voorbeeld 4.24 Voor $x > -1$ gelden de volgende formules. Hierbij is $\xi \in I_{0,x}$ een geschikt te kiezen getal, afhankelijk van x.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 \frac{1}{(1+\xi)^{7/2}}.$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 \frac{1}{(1+\xi)^{11/3}}.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{(1+\xi)^5}.$$

Bij de laatste formule kunnen we ξ eenvoudig in x uitdrukken. Want ξ is zo dat $(1+\xi)^5 = 1+x$ (waarom?). Dus $\xi = (1+x)^{1/5} - 1$.

4.7 Extrema

Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval en zij $f : I \to \mathbf{R}$ differentieerbaar. In A.2.4 hebben we gezien: de enige punten waar f een extremum kan hebben zijn de randpunten van I (als die er zijn) en de kritieke punten van f (dat zijn de punten $a \in I$ met $f'(a) = 0$ (zie Definitie A.2.4.6)). Maar uit $f'(a) = 0$ volgt niet noodzakelijk dat f in a een extremum heeft (voorbeeld: $f(x) = x^3$, $a = 0$). Uitsluitsel hierover kan men soms krijgen door het tekenverloop van f' in de buurt van a te bestuderen (zie Stelling A.2.4.14). We zullen nu zien dat ook het onderzoek van hogere afgeleiden van f in het punt a uitsluitsel kan geven.

Stelling 4.25 *Zij $I \subset \mathbf{R}$ een interval en $a \in I$. Zij $n \geq 2$. Als $f \in C^n(I)$ en $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, dan is*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Bewijs: Volgens Opmerking 4.12 is

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(|x-a|^n) \quad (x \to a).$$

Hieruit volgt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o(1) \quad (x \to a),$$

waaruit het gestelde volgt. $\square$

Gevolg 4.26 *Zij a een inwendig punt van een interval I. Laat $f \in C^n(I)$ voldoen aan:*

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{en} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Dan geldt:

(a) *Als n even is, dan heeft f in a een extremum, en wel:*

   (1) *een lokaal maximum als $f^{(n)}(a) < 0$;*

   (2) *een lokaal minimum als $f^{(n)}(a) > 0$.*

(b) *Als n oneven is, dan heeft f in a geen extremum.*

Bewijs: Zij $f^{(n)}(a) > 0$. Uit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} > 0$$

volgt dat er een omgeving U van a bestaat zo dat

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} > 0 \qquad (x \in U,\ x \neq a).$$

Als n even is, is $(x-a)^n > 0$ voor alle $x \neq a$, en dus is dan $f(x) - f(a) > 0$ voor alle $x \in U, x \neq a$; dus f heeft dan in a een lokaal minimum.

Als n oneven is, dan is $(x-a)^n < 0$ voor $x < a$ en $(x-a)^n > 0$ voor $x > a$, dus $f(x) - f(a) < 0$ voor $x \in U$, $x < a$ en $f(x) - f(a) > 0$ voor $x \in U, x > a$; dus f heeft dan in a geen extremum.

Een analoge redenering is van toepassing in het geval dat $f^{(n)}(a) < 0$. □

Voorbeeld 4.27

(a) $f(x) = x^n$, $a = 0$. Nu is $f^{(k)}(0) = 0$ $(k < n)$, terwijl $f^{(n)}(0) = n!$. Dus f heeft in 0 een lokaal minimum als n even is, en geen extremum als n oneven is. Een welbekend resultaat!

(b) Voor veel kritieke punten a zal reeds $f''(a) \neq 0$. Het teken van $f''(a)$ geeft dan uitsluitsel:
$f''(a) > 0 \Rightarrow$ lokaal minimum.
$f''(a) < 0 \Rightarrow$ lokaal maximum.

(c) $f(x) = \sin x$. Dan is $f'(x) = \cos x$. Kritieke punten zijn $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. $f''(x) = -\sin x$, dus $f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^{k-1}$. Dus f heeft een lokaal minimum in de punten $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ en een lokaal maximum in de punten $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

5 Reeksen in C

Bestudeer § B.3.1. Het convergentiecriterium van Cauchy voor rijen geldt algemener voor rijen in $\mathbf{R}^n$, zie B.6.2.2, Eigenschappen 3,4.

Bestudeer §§ B.3.2 t/m B.3.8. De paragrafen B.3.9 en B.3.10 behoren niet tot de Analyse B–1 stof.

Bestudeer §§ B.3.11, B.3.12.

Bestudeer § B.3.13 t/m 3.13.4. Op het college bespreken we slechts de volgende zwakkere versies van het wortelkenmerk en het qotiëntenkenmerk. Deze versies zijn in de praktijk meestal voldoende:

Stelling 5.1 (Wortelkenmerk). *Zij gegeven een reeks $\sum_{n\geq 1} a_n$ van complexe getallen waarvoor*

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

bestaat. Dan geldt:

(a) *als $L < 1$ dan is de reeks absoluut convergent;*

(b) *als $L > 1$ dan is de reeks divergent.*

Bewijs: (a): Kies een $r \in \mathbf{R}$ met $L < r < 1$. Uit de hypothese volgt dat er een $N \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat voor alle $n \geq N$ geldt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq r$, dus $|a_n| \leq r^n$. Omdat de meetkundige reeks $\sum_{n\geq 1} r^n$ convergent is volgt door toepassing van het majorantiekenmerk dat de reeks $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ convergent is.

(b): Uit de hypothese volgt dat voor voldoend grote $n \in \mathbf{N}$ geldt dat $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, dus $|a_n| \geq 1$. Er geldt dus niet $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dus de reeks $\sum_{n\geq 1} a_n$ is divergent. $\square$

Stelling 5.2 (Quotiëntenkenmerk). *Zij $\sum_{n\geq 1} a_n$ een reeks complex getallen met $a_n \neq 0$ $(n \geq 1)$ waarvoor*

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

bestaat. Dan geldt:

(a) *als $L < 1$ dan is de reeks absoluut convergent;*

(b) *als $L > 1$ dan is de reeks divergent.*

Bewijs: (a): Kies een $r \in \mathbf{R}$ met $L < r < 1$. Uit de hypothese volgt dat er een $N \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat voor alle $n \geq N$ geldt: $|a_{n+1}/a_n| \leq r$, dus $|a_{n+1}| \leq r|a_n|$. Door herhaald toepassen zien we dat voor alle $k \geq 0$ geldt:

$$|a_{N+k}| \leq |a_N|\, r^k = C r^{N+k},$$

met $C = |a_N| r^{-N}$. Omdat de meetkundige reeks $\sum_{n\geq 1} r^n$ convergent is volgt door toepassing van het majorantiekenmerk dat de reeks $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ convergent is.

(b): Uit de hypothese volgt dat er een $N \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$, dus $|a_{n+1}| \geq a_n$. Door herhaald toepassen volgt hieruit dat $|a_n| \geq |a_N|$ voor alle $n \geq N$. Er geldt dus niet $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dus de reeks $\sum_{n\geq 1} a_n$ is divergent. $\square$

Bestudeer § B.3.14 Een zeer belangrijke toepassing van het integraalkenmerk wordt genoemd in Voorbeeld B.3.14.3. De daar beschouwde reeks wordt in de praktijk vaak gebruikt in combinatie met het majorantie- of het limietkenmerk. We formuleren daarom in een apart lemma:

Lemma 5.3 *Zij $s \in \mathbf{R}$. De reeks*

$$\sum_{n \geq 1} n^s$$

is convergent voor $n > 1$ en divergent voor $n \leq 1$.

De paragrafen B.3.15 en B.3.16 behoren niet tot de Analyse B–1 stof, met uitzondering van het criterium van Leibniz voor alternerende reeksen, dat we hieronder apart behandelen.

Lemma 5.4 (Kenmerk van Leibniz). *Zij a_n een rij van niet-negatieve reële getallen met $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbf{N}$, en met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dan is de reeks*

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$$

convergent.

Bewijs: We schrijven

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

voor de n-de partiële som van de reeks. Voor alle $m \in \mathbf{N}$ geldt:

$$s_{2m+2} = s_{2m} + (a_{2m+2} - a_{2m+1}) \leq s_{2m},$$

dus de rij $(s_{2m})_{m\geq 0}$ is monotoon dalend. Op soortgelijke wijze ziet men dat de rij $(s_{2m+1})_{m\geq 0}$ monotoon stijgend is. Verder geldt voor alle $m \geq 0$ dat

$$s_1 \leq s_{2m+1} = s_{2m} - a_{2m+1} \leq s_{2m}.$$

Hieraan zien we dat de rij $(s_{2m})_{m\geq 0}$ naar onder begrensd is en wegens zijn monotonie dus convergent. Zij

$$s = \lim_{m\to\infty} s_{2m}.$$

We zullen aantonen dat dit ook de limiet van de rij $(s_n)_{n\geq 0}$ is. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Dan is er een $N_1 \in \mathbf{N}$ zo dat voor $n \geq N_1$ geldt: $|a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Voorts is er een N_2 zo dat voor even n met $n \geq N_2$ geldt: $|s_n - s| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Zij $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dan geldt voor even $n \geq N$ dat $|s_n - s| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Voor oneven $n \geq N$ geldt dat:

$$|s_n - s| = |s_{n+1} - a_{n+1} - s| \leq |s_{n+1} - s| + |a_{n+1}| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Voor alle $n \geq N$ geldt dus $|s_n - s| < \varepsilon$. □

Voorbeeld 5.5 Met behulp van het kenmerk van Leibniz ziet men nog eens dat de alternerende harmonische reeks

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

convergent is.

6 Reeksen van funkties

Het huidige hoofdstuk dient als vervanging van Hoofdstuk 4 uit het Analyse B diktaat. U hoeft dat hoofdstuk dus niet te bestuderen.

6.1 Puntsgewijze en uniforme convergentie

Zij V een niet-lege deelverzameling van $\mathbf{C}$ (dit mag dus ook een deel van $\mathbf{R}$ zijn). Laat funkties $f_n : V \to \mathbf{C}$ ($n \geq 1$) gegeven zijn. Elk eindig aantal funkties kan men optellen. (Ter herinnering: als f en g op V gedefinieerd zijn, dan definieert men de som $f + g$ puntsgewijs: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.) Analoog aan B.3.2.1 noemen we nu de uitdrukking $\sum_{n \geq 1} f_n$ een *reeks van funkties* op V. De funkties f_n zijn de termen van de reeks.

Definitie 6.1 De reeks $\sum_{n\geq 1} f_n$ heet *puntsgewijs convergent op* V, met somfunktie $F : V \to \mathbf{C}$, als voor iedere $x \in V$ de reeks $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ (van complexe getallen) convergeert met som $F(x)$.

Voorbeeld 6.2 De in Voorbeeld 4.16 behandelde reeksen zijn voorbeelden van puntsgewijs convergente reeksen.

Veronderstel nu dat de reeks $\sum_{n\geq 1} f_n$ puntsgewijs convergeert op V. Zij $x \in V$ vast. Dan volgt uit de definitie van convergentie van een reeks in $\mathbf{C}$ dat voor elke $p \geq 1$ geldt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \lim_{q\to\infty} \sum_{n=1}^{q} f_n(x) \\
&= \lim_{q\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} f_n(x) + \sum_{n=p+1}^{q} f_n(x) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{p} f_n(x) + \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)
\end{aligned}$$

Passen we nogmaals de definitie van convergentie van een reeks toe dan zien we dat:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{p} f_n(x) \right) = 0.$$

Dit betekent dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $N = N_x \geq 1$ bestaat zo dat

$$p \geq N \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon.$$

In het algemeen is de genoemde N_x afhankelijk van x (en ε). Is bij iedere ε een van x onafhankelijke N te vinden dan noemen we de reeks uniform convergent.

Definitie 6.3 De reeks $\sum_{n\geq 1} f_n$ heet *uniform convergent op* V, met somfunktie $F : V \to \mathbf{C}$, als de reeks puntsgewijs convergent op V is met somfunktie F en er bovendien voor elke $\varepsilon > 0$

een $N \geq 1$ te vinden is zo dat:

$$p \geq N \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon \quad \text{voor alle} \quad x \in V. \tag{18}$$

De termen van een uniform convergente reeks worden uniform klein:

Lemma 6.4 *Laat de reeks $\sum_{n \geq 1} f_n$ uniform convergent op V zijn. Dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbf{N}$ zo dat voor alle $p \geq N$ en alle $x \in V$ geldt: $|f_p(x)| < \varepsilon$.*

Bewijs: Dit volgt door de schatting:

$$|f_p(x)| = |\sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)| \leq |\sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)| + |\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)|$$

te combineren met de bovenstaande definitie. □

Het belang van uniforme convergentie is vooral gelegen in de volgende stelling:

Stelling 6.5 *Laat de reeks $\sum_{n \geq 1} f_n$ uniform convergent zijn op V met somfunktie $F : V \to \mathbf{C}$. Is iedere f_n $(n \geq 1)$ continu in een gegeven punt $a \in V$ dan is ook f continu in a.*

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $N \geq 1$ zo dat voor alle $x \in V$ geldt:

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

De funktie $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ is als eindige som van continue funkties continu in a. Derhalve bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor $x \in V$ met $|x - a| < \delta$ geldt: $|F_N(x) - F_N(a)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Voor elke $x \in V$ met $|x - a| < \delta$ geldt derhalve:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(a)| &= |F_N(x) - F_N(a) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(a)| \\ &\leq |F_N(x) - F_N(a)| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(a)| \\ &< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 6.6

(a) Zij $f_n(z) = z^n$ $(z \in \mathbf{C}, n \geq 0)$. De reeks $\sum_{n \geq 0} f_n$ is de meetkundige reeks (zie Voorbeeld B.3.6.1). Op $V = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ is deze reeks *puntsgewijs* convergent, met somfunktie

$z \mapsto \frac{1}{1-z}$. Op $V_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}$, waarbij $0 < r < 1$, is de reeks *uniform* convergent. Want voor $|z| \leq r$ is

$$|\sum_{n=p+1}^{\infty} z^n| = |z^{p+1}||1 + z + z^2 + \cdots| = |\frac{z^{p+1}}{1-z}| \leq \frac{r^{p+1}}{1-r}.$$

(bedenk dat $|1-z| \geq 1 - |z| \geq 1 - r$). Nu is $\lim_{p\to\infty} \frac{r^{p+1}}{1-r} = 0$, dus voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $N \in \mathbf{N}$ zo dat voor $p \geq N$ geldt:

$$\frac{r^{p+1}}{1-r} < \varepsilon.$$

Dit levert de gewenste schatting voor uniforme convergentie op V_r.

Op V is de reeks niet uniform convergent, want voor iedere $p \geq 1$ geldt:

$$\lim_{r\uparrow 1} |\sum_{n=p+1}^{\infty} r^n| = \lim_{r\uparrow 1} \frac{r^{p+1}}{1-r} = \infty.$$

(b) Zij $f_n(x) = (1-x)x^n$ $(0 \leq x \leq 1,\ n \geq 1)$. Dan is $\sum_{n\geq 1} f_n$ een reeks van continue funkties die op $[0,1]$ puntsgewijs convergeert. Voor $0 \leq x < 1$ is

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n = (1-x)\frac{x}{1-x} = x,$$

en voor $x = 1$ is de som 0. De somfunktie is dus niet continu. Omdat alle termen van de reeks wèl continu zijn, is de reeks op $[0,1]$ niet uniform convergent.

6.2 Convergentiekenmerk van Weierstrass

Stelling 6.7 (Convergentiekenmerk van Weierstrass). *Zij $V \subset \mathbf{C}$ en $f_n : V \to \mathbf{C}$ $(n \geq 1)$. Zij $\sum_{n\geq 1} a_n$ een convergente reeks van getallen met $a_n \geq 0$ voor alle n. Als voor alle $n \geq 1$ en voor alle $x \in V$ geldt $|f_n(x)| \leq a_n$, dan is $\sum_{n\geq 1} f_n$ uniform convergent op V.*

Bewijs: Door toepassing van het majorantiekenmerk zien we dat voor elke $x \in V$ de reeks $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ absoluut convergeert. Bovendien geldt voor elke $p \in \mathbf{N}$ en alle $x \in V$ dat:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n. \tag{19}$$

Zij nu $\varepsilon > 0$ gegeven. Uit de convergentie van $\sum a_n$ volgt het bestaan van een N zo dat voor alle $p \geq N$ het rechterlid van (19) strikt kleiner is dan ε. Hieruit volgt de gewenste schatting (18) voor alle $p \geq N$ en alle $x \in V$. $\square$

Opmerking 6.8 In feite blijkt uit schatting (19) dat de reeks $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ op V uniform convergent is. Een reeks $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ met deze eigenschap noemt men *absoluut uniform convergent*. Merk op dat uit de eerste ongelijkheid in schatting (19) ook volgt:

Een aboluut uniform convergente reeks is uniform convergent.

Voorbeeld 6.9

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ is uniform convergent op $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$, want voor alle z met $|z| \leq 1$ is $|\frac{z^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$, en $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ is convergent.

(b) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ is uniform convergent op $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}$ voor alle $r > 0$, want $|\frac{z^n}{n!}| \leq \frac{r^n}{n!}$ als $|z| \leq r$, en $\sum_{n\geq 0} \frac{r^n}{n!}$ is convergent (zie Voorbeeld B.3.12.4.3 (en B.3.13.4.3)).

7 Machtreeksen

Bestudeer §§ B.5.1, 5.2.

7.1 Formule voor de convergentiestraal

Deze paragraaf dient als vervanging van §5.3 in het Analyse B diktaat. In het vervolg beschouwen we steeds de complexe machtreeks $\sum_{n\geq 0} a_n(z-\alpha)^n$ rond $\alpha \in \mathbf{C}$. Wegens de theorie in § B.5.2 heeft deze machtreeks een convergentiestraal $R \in [0, \infty]$.

Op het college zullen wij de volgende zwakkere versie van Stelling B.5.3.1 behandelen, in verband met het feit dat de Stellingen 5.1 en 5.2 zwakker zijn dan de overeenkomstige stellingen B.3.13.1 en B.3.13.2 uit het diktaat.

Stelling 7.1

(a) *Als* $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *bestaat (als element van* $[0, \infty]$*) dan geldt:* $R = 1/\lambda$.

(b) *Als* $\lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *bestaat (als element van* $[0, \infty]$*) dan geldt:* $R = 1/\lambda$.

(Hierbij bedoelen we steeds dat $R = \infty$ *als* $\lambda = 0$ *en* $R = 0$ *als* $\lambda = \infty$*).*

Bewijs: (a): Fixeer $z \in \mathbf{C}$. Dan volgt uit het gegeven dat

$$L_z = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lambda |z|.$$

bestaat. Met Stelling 5.1 volgt: is $|z| < \lambda^{-1}$, dan is $L_z < 1$, dus de reeks convergeert. Is $|z| > \lambda^{-1}$, dan is $L_z > 1$, dus de reeks divergeert. Hieruit concluderen we dat $R = \lambda^{-1}$.

Het bewijs van (b) is geheel analoog. □

Bestudeer nu de voorbeelden B.5.3.3.

Opmerking 7.2 Stelling 5.3.1 uit het Analyse B diktaat heeft als voordeel dat hij *altijd* een formule voor de convergentiestraal verschaft. Maar de bovenstaande stelling is in de praktijk meestal voldoende.

Bestudeer §§ B.5.4, 5.5, 5.6. § B.5.7 behoort niet tot de Analyse B-1 stof.

Bestudeer §§ B.5.8, 5.9. § B.5.10 behoort niet tot de Analyse B-1 stof.

7.2 De machtfunktie

In deze paragraaf beschouwen we als toepassing van de theorie van de machtreeksen nog eens de funktie

$$f(z) = (1+z)^\alpha.$$

Hierbij is α een willekeurige complexe constante. Als $|z| < 1$, dan is $\mathrm{Re}(1+z) > 0$, dus $z \mapsto \log(1+z)$ is een complex differentieerbare funktie op de open cirkelschijf $|z| < 1$. Per definitie geldt:

$$f(z) = e^{\alpha \log(1+z)},$$

dus f is wegens de kettingregel complex differentieerbaar op $|z| < 1$ met complexe afgeleide:

$$f'(z) = \alpha \frac{f(z)}{1+z}. \tag{20}$$

Ons doel is nu de funktie f voor te stellen door een machtreeks. Als dat mogelijk is moet wegens Gevolg B.5.6.2 de machtreeks van Taylorgedaante zijn; d.w.z. de n-de coëfficiënt moet gelijk zijn aan:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

(Reken dit na.) Hierdoor gemotiveerd definiëren we ook voor complexe α de (complexe) binomiaalcoëfficiënten

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

In verband met het hierboven besprokene vermoeden we dat f gegeven wordt door de machtreeks $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}z^n$. Deze machtreeks gaan we daarom nader onderzoeken.

Lemma 7.3 *De machtreeks $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}z^n$ heeft convergentiestraal* 1.

Bewijs: Er geldt:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha/n-1}{1+\frac{1}{n}}\right| = 1.$$

Gebruik nu Stelling 7.1. □

We beschouwen nu op de schijf $|z| < 1$ de machtreeksfunktie

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n.$$

We zullen laten zien dat g op de open eenheidsschijf voldoet aan dezelfde differentiaalvergelijking (20) als f. Daarbij hebben we het volgende lemma nodig:

Lemma 7.4 *Voor alle $n \in \mathbf{N}$ geldt:*

$$n\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha}{n}.$$

Bewijs: Doe zelf. □

Term voor term differentiëren binnen de convergentiecirkel levert

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} z^{n-1} \qquad (|z| < 1).$$

Hieruit volgt dat (voor $|z| < 1$):

$$\begin{aligned}
(1+z)\, g'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} z^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} z^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} z^{n} \\
&= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{n} z^{n} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^{n} = \alpha\, g(z).
\end{aligned}$$

Dus inderdaad voldoet g aan dezelfde differentiaalvergelijking als f. We kunnen nu bewijzen:

Stelling 7.5 *Voor alle $z \in \mathbf{C}$ met $|z| < 1$ geldt:*

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^{n}.$$

Bewijs: Uit het voorgaande volgt dat voor $z \in \mathbf{C}$ met $|z| < 1$ geldt:

$$\frac{d}{dz}(1+z)^{-\alpha} g(z) = -\alpha(1+z)^{-\alpha-1} g(z) + (1+z)^{-\alpha}\, g'(z) = 0.$$

Derhalve is de funktie $z \mapsto (1+z)^{-\alpha} g(z)$ constant op de open eenheidsschijf. Merk op dat $g(0) = 1$. Invullen van $z = 0$ levert dus dat de funktie constant gelijk 1 is. Hieruit volgt dat $g(z) = (1+z)^{\alpha}$. □

Opmerking 7.6 Merk op dat uit het bovenstaande de juistheid van Stelling 4.23 volgt.

8 Differentiëren van funkties van meer veranderlijken

Dit hoofdstuk van de leeswijzer dient ter vervanging van Hoofdstuk 7 van het Analyse B diktaat.

8.1 Kettingregels en Jacobimatrix

We formuleren nog eens de eerder behandelde kettingregel voor differentiëren van een funktie $\mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}$ langs een kromme in $\mathbf{R}^n$, $(n \geq 1)$.

Lemma 8.1 (Differentiatie langs een kromme). *Laat $I \subset \mathbf{R}$ een open interval zijn, en V een open deel van $\mathbf{R}^n$. Zij $c : I \to V$ een differentieerbare kromme en $g : V \to \mathbf{R}$ een C^1-funktie. Dan is $g \circ c$ een differentieerbare funktie $I \to \mathbf{R}$ en voor iedere $t_0 \in I$ geldt:*

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(t_0) = \langle \operatorname{grad} g(c(t_0)), c'(t_0) \rangle. \tag{21}$$

Noteren we de variabelen in $\mathbf{R}^n$ met $y_1, \ldots, y_n$, dan kunnen we formule (21) herschrijven als:

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(c(t_0)) \frac{dc_k}{dt}(t_0). \tag{22}$$

Louter en alleen door gebruik te maken van de definitie van partiële differentieerbaarheid is de bovenstaande kettingregel uit te breiden tot de samenstelling van g met een funktie $f : \mathbf{R}^m$ æ $\mathbf{R}^n$. Preciezer, zij $g : V \to \mathbf{R}$ als boven, zij $U \subset \mathbf{R}^m$ open, en $f : U \to V$ een partieel differentieerbare funktie. We noteren de variabelen in $\mathbf{R}^m$ met $(x_1, \ldots, x_m)$ en zoeken een formule voor $\partial(g \circ f)/\partial x_j$.

Zij a een vast punt in U en $1 \leq j \leq m$ een vaste index. Er is een $\delta > 0$ zo dat $B(a, \delta) \subset U$. Zij I het open interval $]a_j - \delta, a_j + \delta[$. Als $t \in I$, dan behoort het punt

$$\xi(t) := (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_m)$$

tot U. Door

$$c(t) = f(\xi(t)) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_m)$$

wordt derhalve een kromme $I \to V$ gedefinieerd. Uit de partiële differentieerbaarheid van f op V volgt per definitie dat c differentieerbaar is, met de volgende afgeleide in $t = a_j$:

$$c'(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Met Lemma 8.1 concluderen we nu dat $(g \circ f)(\xi(t)) = g(c(t))$ differentieerbaar is in het punt $t = a_j$. Dit betekent precies dat de funktie $g \circ f$ in a partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele. Door toepassing van (22) vinden we de volgende formule voor de partiële afgeleide:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) &= \frac{d}{dt}(g \circ f)(\xi(t))|_{t=a_j} \\ &= \frac{d}{dt}(g \circ c)(a_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(c(a_j)) \frac{dc_k}{dt}(a_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a). \end{aligned} \tag{23}$$

Tenslotte is het bovenstaande uit te breiden tot de samenstelling van een funktie $f : \mathbf{R}^m$ æ $\mathbf{R}^n$ en een funktie $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$.

Stelling 8.2 (De kettingregel voor partiële afgeleiden). *Laten $U \subset \mathbf{R}^m$, $V \subset \mathbf{R}^n$ open delen zijn, en $f : U \to V$ en $g : V \to \mathbf{R}^p$ partieel differentieerbare funkties. Veronderstel bovendien dat de partiële afgeleiden van g continu zijn. Dan is de funktie $g \circ f$ partieel differentieerbaar op U. In een punt $a \in U$ wordt de partiële afgeleide naar de j-de variable $(1 \leq j \leq m)$ gegeven door:*

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{j=k}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \qquad (1 \leq i \leq p). \tag{24}$$

Bewijs: Merk op dat $(g \circ f)_i = g_i \circ f$. Formule (24) volgt daarom direkt door toepassing van formule (23) op de funkties g_i en f. □

In formule (24) herkennen we de produktformule voor matrices. Dit motiveert ons tot de volgende definitie.

Definitie 8.3 Zij $f : \mathbf{R}^m$ æ $\mathbf{R}^n$ partieel differentieerbaar in een inwendig punt a van $\mathrm{Dom}(f)$. Dan definiëren we de *Jacobimatrix* of *functionaalmatrix* $J_f(a)$ van f in a als de $n \times m$-matrix met op de plaats in de i-de rij en j-de kolom het getal $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Merk op dat in de j-de kolom van $J_f(a)$ de partiële afgeleide $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ staat (opgevat als kolomvector).

Voorbeeld 8.4 De functie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ gegeven door $f(x, y, z) = (xy^2z^3, \sin xyz)$ heeft als functionaalmatrix

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \\ yz\cos xyz & xz\cos xyz & xy\cos xyz \end{pmatrix}.$$

Na Definitie (8.3) kunnen we Stelling 8.2 als volgt op elegante wijze herformuleren.

Stelling 8.5 (De kettingregel voor Jacobi-matrices). *Met dezelfde veronderstellingen als in Stelling 8.2 geldt:*

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))\, J_f(a). \tag{26}$$

Bewijs: Met de bekende vermenigvuldigingsregel voor matrices ziet men in dat de bovenstaande formule gelijkwaardig is met (24). □

Voorbeeld 8.6 Laten $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ en $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, \sin xy), \quad g(u, v) = (uv, e^v).$$

Dan is $g \circ f(x,y) = g(x^2+y^2, \sin xy) = ((x^2+y^2)\sin xy, e^{\sin xy})$. De Jacobimatrix van de samengestelde funktie is daarom gelijk aan:

$$J_{g\circ f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\sin xy + y(x^2+y^2)\cos xy & 2y \sin xy + x(x^2+y^2)\cos xy \\ y\cos xy e^{\sin xy} & x \cos xy e^{\sin xy} \end{pmatrix}.$$

De Jacobimatrices van f en g worden gegeven door:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y\cos xy & x\cos xy \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad J_g(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix},$$

dus

$$J_g(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \sin xy & x^2+y^2 \\ 0 & e^{\sin xy} \end{pmatrix}.$$

De juistheid van de formule uit de stelling kan men nu gemakkelijk controleren door de twee matrices $J_g(f(x,y))$ en $J_f(x,y)$ te vermenigvuldigen.

Formule (26) heeft als voordeel dat zij elegant oogt, compact is, en bovendien op natuurlijke wijze de kettingregel voor funkties $\mathbf{R}$ æ $\mathbf{R}$ generaliseert. Die kettingregel vinden we overigens terug uit Stelling 8.2 voor het geval $n = m = p = 1$. In dat geval zijn de Jacobimatrices alle 1×1 matrices:

$$J_f(a) = (\, f'(a)\,), \quad J_g(f(a)) = (\, g'(f(a))\,), \quad J_{g\,\circ\,f}(a) = (\,(g\circ f)'(a)\,).$$

Het produkt van de eerste twee van deze matrices is de 1×1 matrix $(\, g'(f(a))f'(a)\,)$. Deze moet gelijk zijn aan de derde matrix. Hieruit volgt de bekende gelijkheid $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

We beschouwen Stelling 8.5 ook nog eens in het geval $m = 1$, $p = 1$, $n > 1$. Dan is f een differentieerbare kromme in $\mathbf{R}^n$, en $g \circ f$ is een funktie $\mathbf{R}$ æ $\mathbf{R}$. De Jacobimatrix van $g\circ f$ is dus 1×1 :

$$J_{g\,\circ\,f}(a) = (\,(g\circ f)'(a)\,).$$

Anderzijds is deze matrix wegens de kettingregel gelijk aan:

$$J_g(f(a))J_f(a) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) \cdots \frac{\partial g}{\partial y_n}(f(a))\right)\begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_n'(a)\end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\, f_k'(a)\right).$$

Hieruit lezen we weer de bekende kettingregel voor differentiatie langs krommen af.

8.2 Afgeleiden en lineaire benadering

Laat I een open interval in $\mathbf{R}$ zijn, en $f : I \to \mathbf{R}$ een funktie die differentieerbaar is in een punt $a \in I$. Dan is

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Definiëren we $\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ dan zien we dat

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h) \qquad \text{met} \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)/h = 0.$$

Maak zelf een plaatje waaruit de betekenis van de funktie ε blijkt.

Door de substitutie $x = a + h$ zien we dat de bovenstaande formule equivalent is met

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad (x \to a).$$

Hieruit lezen we af dat de funktie $x \mapsto f(x)$ benadert wordt door $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ met een restterm die $o(x-a)$ is als $x \to a$. Dit is een rechtvaardiging om de grafiek van de funktie $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ (een lijn) *de raaklijn* aan graf f in het punt $(a, f(a))$ te noemen.

In het onderstaande zullen we zien dat soortgelijke resultaten gelden voor funkties $\mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}$ en uiteindelijk zelfs voor funkties $\mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$.

Lemma 8.7 *Laat $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ partieel differentieerbaar zijn op een open deel U van* $\mathrm{Dom}(f)$, *en veronderstel dat de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x_j (1 \le j \le n)$ continu zijn in een punt $a \in U$. Dan bestaat er een funktie $\varepsilon : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}$, zo dat*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \mathrm{grad}\, f(a), h\rangle + \varepsilon(h) \qquad (a + h \in \mathrm{Dom}(f)), \tag{27}$$

en

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0. \tag{28}$$

Bewijs: Omdat U open is, is er een $\delta > 0$ zo dat $B(a, \delta) \subset U$. Voor $h \in B(0, \|h\|)$ definiëren we

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - \langle \mathrm{grad}\, f(a), h\rangle.$$

We gaan nu (28) bewijzen. Zij $h \in B(0, \delta)$ willekeurig. We herschrijven de toename $f(a+h) - f(a)$ als som van n toenames, waarbij steeds één der coördinaten gevarieerd wordt, terwijl de overige vast gehouden worden. Zij $e_1, \ldots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbf{R}^n$. Voor $1 \le j \le n$ definiëren we het punt $h^{(j)} \in B(0, \delta)$ door:

$$h^{(j)} = h_1 e_1 + \cdots + h_j e_j.$$

In het bijzonder is $h^{(n)} = h$. We schrijven voorts $h^{(0)} = 0$. Dan is

$$f(a+h) - f(a) = f(a + h^{(n)}) - f(a + h^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n} [f(a + h^{(j)}) - f(a + h^{(j-1)})].$$

Ons volgende doel is ieder van de termen in deze som te herschrijven.

Zij $\bar{I}_{0,h_j}$ het gesloten interval in $\mathbf{R}$ met eindpunten 0 en h_j (daarbij laten we toe dat $h_j \le 0$). We definiëren de funktie $\varphi_j : \bar{I}_{0,h_j} \to \mathbf{R}$ door

$$\varphi_j(t) = f(a + h^{(j-1)} + t e_j).$$

Merk op dat $\varphi_j(0) = f(a + h^{(j-1)})$. Verder is $h^{(j)} = h^{(j-1)} + h_j e_j$, dus $\varphi_j(h_j) = f(a + h^{(j)})$. De j-de term uit de bovenstaande som is dus gelijk aan $\varphi_j(h_j) - \varphi_j(0)$.

Uit de partiële differentieerbaarheid van f volgt direkt dat φ_j differentieerbaar is, met afgeleide:

$$\varphi_j'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h^{(j-1)} + te_j).$$

Uit de middelwaardestelling voor differentieerbare funkties van één variable volgt dat: $\varphi_j(h_j) - \varphi_j(0) = \varphi_j'(\tau_j)h_j$, met τ_j een tussen 0 en h_j gelegen reëel getal. Derhalve geldt:

$$f(a + h^{(j)}) - f(a + h^{(j-1)}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h^{(j-1)} + \tau_j e_j)h_j.$$

We concluderen dat

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h^{(j-1)} + \tau_j e_j)h_j.$$

Anderzijds is

$$\langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j,$$

en we zien dat

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h)| &= \Big|\sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{\partial f}{\partial x_j}(h^{(j-1)} + \tau_j e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\Big]\, h_j\Big| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h^{(j-1)} + \tau_j e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\Big|\, \|h\|. \end{aligned}$$

Voor iedere j geldt: $\|h^{(j-1)} + \tau_j e_j\| \leq \|h\|$ (ga na). Uit de bovenstaande schatting volgt derhalve dat

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{\|h\|} \leq \sum_{j=1}^{n} \sup_{k \in \bar{B}(a, \|h\|)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + k) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|.$$

Combineren we deze schatting met de continuïteit van de partiële afgeleiden in a, dan volgt (28). □

Formules (27) en (28) kunnen ook samengevat worden als

$$f(x) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x - a\rangle + o(\|x - a\|) \qquad (x \to a).$$

De funktie $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x - a\rangle$ is dus een benadering van f in de buurt van a. Haar grafiek V is een n-dimensionale lineaire deelvariëteit van $\mathbf{R}^{n+1}$ (zie het plaatje achter Definitie B.7.1.3). We noemen V de (geometrische) *raakruimte* aan graf f in het punt $(a, f(a))$. (In het geval $n = 1$ noemen we V de raaklijn, in het geval $n = 2$ noemen we V het raakvlak). In het college Analyse C zal uitgebreider op de definitie van raakruimte ingegaan worden.

Voorbeeld 8.8 We beschouwen de funktie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

De gradient van f in een punt (a,b) wordt gegeven door

$$\operatorname{grad} f(a,b) = \begin{pmatrix} 2a \\ -2b \end{pmatrix}.$$

De raakruimte aan graf f in het punt (a,b,a^2-b^2) is per definitie het vlak in $\mathbf{R}^3$ gegeven door:

$$z = f(a,b) + \langle \operatorname{grad} f(a,b), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = a^2 - b^2 + 2ax - 2ay.$$

In het bijzonder wordt het raakvlak in $(0,0,0)$ gegeven door $z=0$, terwijl het raakvlak in $(2,1,3)$ gegeven wordt door $z = 3 + 4x - 2y$.

Uit Lemma 8.7 kunnen we algemener een soortgelijk resultaat voor Jacobi-matrices afleiden.

Stelling 8.9 *Laat $U \subset \mathbf{R}^n$ open zijn, en $f : U \to \mathbf{R}^p$ een partieel differentieerbare funktie. Veronderstel dat alle partiële afgeleiden van f continu zijn in een punt $a \in U$. Dan bestaat er een afbeelding $\varepsilon : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, zo dat*

$$f(a+h) = f(a) + J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \varepsilon(h) \qquad (a+h \in \operatorname{Dom}(f)) \qquad \text{en} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0.$$

Bewijs: Definieer $\varepsilon : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ door $\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - J_f(a)h$. De i-de component $(1 \le i \le p)$ van de funktie ε wordt gegeven door

$$\varepsilon_i(h) = f_i(a+h) - f_i(a) - \langle \operatorname{grad} f_i(a), h \rangle$$

(ga na). Passen we Lemma 8.7 toe op de funkties f_i dan zien we dat $\varepsilon_i(h) = o(h)$ $(h \to 0)$. Voor iedere vector $b \in \mathbf{R}^p$ geldt: $\|b\| \le |b_1| + \cdots + |b_p|$. Derhalve geldt:

$$\|\varepsilon(h)\| \le \sum_{i=1}^{p} |\varepsilon_i(h)| = o(\|h\|) \qquad (h \to 0).$$

Hieruit volgt de stelling. □

8.3 Totale differentieerbaarheid

Laat $f : \mathbf{R}^n \supset U \to \mathbf{R}^p$ een funktie zijn als in Stelling 8.9, en schrijf L_a voor de lineaire afbeelding $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ met als matrix $J_f(a)$ ten aanzien van de standaardbases. Dus:

$$L_a(h) = J_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \qquad (h \in \mathbf{R}^n).$$

Dan geldt:

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|) \qquad (h \to 0).$$

De lineaire afbeelding L_a wordt *volledig gekarakteriseerd* door deze eigenschap. Immers zij $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ een lineaire afbeelding met dezelfde eigenschap. Dan geldt: $L(h) - L_a(h) = o(\|h\|)$ als $h \to 0$, ofwel:

$$\lim_{h \to 0} \frac{L(h) - L_a(h)}{\|h\|} = 0.$$

Fixeer nu $v \in \mathbf{R}^n$, $v \neq 0$. Dan geldt:

$$0 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{L_1(tv) - L_2(tv)}{\|tv\|} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{L_1(v) - L_2(v)}{\|v\|} = \frac{L_1(v) - L_2(v)}{\|v\|},$$

dus $L_a = L$.

De bovenstaande beschouwing is de motivatie voor de volgende definitie.

Definitie 8.10 (De totale afgeleide). Zij $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ een funktie en zij a een inwendig punt van $\mathrm{Dom}(f)$. Dan heet f *differentieerbaar* (of ook: *totaal differentieerbaar*) in a als er een lineaire afbeelding $L_a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ en een afbeelding $\varepsilon_a : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ bestaan zo dat geldt:

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \varepsilon_a(h) \qquad (a + h \in \mathrm{Dom}(f)) \qquad \text{en} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon_a(h)}{\|h\|} = 0.$$

De lineaire afbeelding L_a (die uniek bepaald is wegens het hierboven gegeven argument) heet de *afgeleide* of *totale afgeleide* van f in a, notatie: $L_a = Df(a)$.

Opmerking 8.11 Voor $n = 1$ is de bovenstaande definitie van differentieerbaarheid equivalent met de vroeger gegeven definitie voor een funktie $f : \mathbf{R}$ æ $\mathbf{R}^p$. Immers zij a een inwendig punt van het domein van f.

Is f in a differentieerbaar volgens de oude definitie, dan bestaat $f'(a)$. Zij $L : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de lineaire afbeelding $h \mapsto f'(a)h$ ('vermenigvuldiging met $f'(a)$'), en schrijf $\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - L(h)$. Dan is

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0,$$

dus $\varepsilon(h) = o(|h|)$ en f is in a totaal differentieerbaar met afgeleide $Df(a) = L : h \mapsto f'(a)h$.

Is omgekeerd f differentieerbaar in a volgens de nieuwe definitie, schrijf dan $\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)$. Dan is

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = h^{-1}Df(a)(h) + h^{-1}\varepsilon(h) = Df(a)(1) + h^{-1}\varepsilon(h).$$

Uit $\varepsilon(h) = o(|h|)$ volgt derhalve

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = Df(a)(1).$$

Dus f is in a differentieerbaar volgens de oude definitie en er geldt: $f'(a) = Df(a)(1)$.

Voorbeeld 8.12 We beschouwen de funktie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = xe^y$. Uit de Stelling van Taylor met rest volgt dat $e^y = 1 + y + r(y)$, met $r(y) = o(y)$ $(y \to 0)$. Dus:

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = h_1 e^{h_2} = h_1 + h_1 h_2 + h_1 r(h_2).$$

Definieer $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ door $L(h) = h_1$, en $\varepsilon : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ door $\varepsilon(h) = h_1 h_2 + h_1 r(h_2)$. Dan is de afbeelding L lineair. Uit $r(h_2) = o(h_2)$ volgt $\varepsilon(h) = \mathcal{O}(h_1 h_2)$. Uit $2h_1 h_2 \leq h_1^2 + h_2^2 = \|h\|^2$ leiden we af dat

$$\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = \|h\|^{-1}\mathcal{O}(\|h\|^2) = \mathcal{O}(\|h\|)$$

voor $h \to 0$, dus $\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\|h\|} = 0$. Volgens Definitie 8.10 is f derhalve totaal differentieerbaar in $(0,0)$ met totale afgeleide $Df(0,0) : h \mapsto h_1$.

Voorbeeld 8.13 Als $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ een *lineaire* afbeelding is, dan geldt voor alle $a \in \mathbf{R}^n$ en $h \in \mathbf{R}^n$ dat $f(a+h) = f(a) + f(h)$. Hieruit blijkt dat f in elk punt a differentieerbaar is en dat $Df(a) = f$ voor iedere a. In dit geval is de restterm 0.
Voor het geval $p = 1$ kan men zeggen dat in elk punt van de grafiek van f de raakruimte aan de grafiek samenvalt met de grafiek.

In het licht van de bovenstaande definitie volgt uit Stelling 8.9 onmiddellijk

Stelling 8.14 (Voldoende voorwaarde voor totale differentieerbaarheid). *Zij $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ een funktie, en a een inwendig punt van* Dom(f). *Als alle partiële afgeleiden van f in een omgeving van a bestaan en in a continu zijn, dan is f totaal differentieerbaar in a. De afgeleide $Df(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ is de lineaire afbeelding met matrix $J_f(a)$ ten aanzien van de standaardbases.*

Opmerking 8.15 Met de rekenregels voor differentiatie naar één variabele ziet men direkt dat de funktie f uit Voorbeeld 8.12 partieel differentieerbaar op $\mathbf{R}^2$ is. De Jacobimatrix wordt gegeven door $J_f(x,y) = (e^y \; xe^y)$. Hieraan ziet men met de gebruikelijke rekenregels dat de partiële afgeleiden van f in elk punt continu zijn. Met Stelling 8.14 concluderen we dat f in ieder punt van $\mathbf{R}^2$ totaal differentieerbaar is. In het bijzonder is dat zo in $(0,0)$. De totale afgeleide in dat punt wordt gegeven door:

$$Df(0,0) : h \mapsto J_f(0,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (1\;0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1.$$

Merk op dat de nu gebruikte methode veel gemakkelijker is dan de in Voorbeeld 8.12 gebruikte. In de praktijk wordt bijna altijd de nu gebruikte methode gevolgd om vast te stellen dat een funktie totaal differentieerbaar is, en om zijn totale afgeleide te berekenen.

Omgekeerd impliceert totale differentieerbaarheid in een punt partiële differentieerbaarheid in dat punt (maar niet noodzakelijkerwijs in een omgeving van het punt). Preciezer:

Stelling 8.16 *Veronderstel dat de funktie $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ totaal differentieerbaar is in een inwendig punt a van* Dom(f). *Dan is f in a richtingsdifferentieerbaar in iedere richting $v \in \mathbf{R}^n$. De richtingsafgeleide wordt gegeven door:*

$$\partial_v f(a) = Df(a)(v). \tag{29}$$

In het bijzonder is f partieel differentieerbaar in a. De Jacobimatrix $J_f(a)$ is de matrix van (de lineaire afbeelding) $Df(a)$ ten aanzien van de standaardbases:

$$J_f(a) = \operatorname{mat} Df(a).$$

Bewijs: Zij $v \in \mathbf{R}^n$. Dan volgt uit de totale differentieerbaarheid van f in a dat:

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \frac{1}{t}Df(a)(tv) + \frac{1}{t}\varepsilon(tv) = Df(a)(v) + \frac{1}{t}\varepsilon(tv).$$

Uit $\varepsilon(h) = o(h)$ $(h \to 0)$ volgt dat $\lim_{t\to 0} t^{-1}\varepsilon(tv) = 0$, dus het bovenstaande differentiequotiënt heeft limiet $Df(a)(v)$ als $t \to 0$. Hieruit volgen de richtingsdifferentieerbaarheid en de formule voor de richtingsafgeleide.

Zij e_j de j-de standaard basisvector in $\mathbf{R}^n$ voor $1 \leq j \leq n$. We brengen in herinnering dat de richtingsdifferentieerbaarheid van f in a in de richting e_j impliceert dat f in a partieel differentieerbaar is naar de j-de variabele, terwijl $\partial f/\partial x_j(a) = \partial_{e_j} f(a)$. Er volgt dus:

$$Df(a)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a). \tag{30}$$

De i-de component van de laatste vector (ten aanzien van de standaardbasis van $\mathbf{R}^p$) is $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Dit betekent precies dat $J_f(a)$ de matrix van $Df(a)$ is ten aanzien van de standaardbases. □

Opmerking 8.17 Voor $n = 1$ volgt uit het bovenstaande weer dat $f'(a) = \partial_1 f(a) = Df(a)(1)$.

Opmerking 8.18 Is $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ differentieerbaar in een inwendig punt a van $\mathrm{Dom}(f)$ dan volgt uit de linariteit van de totale afgeleide gecombineerd met (29) en (30) de volgende nuttige formule voor iedere $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$:

$$\partial_v f(a) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Voorbeeld 8.19 Zij $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{als } (x,y) \neq (0,0) \text{ en } f(0,0) = 0.$$

Deze f is op de hele $\mathbf{R}^2$ continu: buiten $(0,0)$ op grond van de rekenregels (Stelling B.6.5.6), en in $(0,0)$ omdat

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq |x| \leq \|(x,y)\|.$$

We berekenen de richtingsafgeleiden van f in $(0,0)$. Zij $v = (a,b) \neq (0,0)$ en zij $t \neq 0$. Men ziet direct dat

$$\frac{f(tv)-f(0)}{t} = \frac{a^3}{a^2+b^2}.$$

Dus

$$\partial_v f(0,0) = \frac{a^3}{a^2 + b^2}.$$

In het bijzonder vinden we:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(neem voor (a,b) resp. $(1,0)$ en $(0,1)$). We zien dat alle richtingsafgeleiden in $(0,0)$ bestaan, maar dat $v \mapsto \partial_v f(0,0)$ niet lineair is. Dus is f in $(0,0)$ niet totaal differentieerbaar (Stelling 8.16).
Ter controle onderzoeken we de continuïteit van $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$. Voor $(x,y) \neq (0,0)$ berekenen we:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 + y^2\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x^3 y}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

We constateren dat langs iedere rechte door de oorsprong de partiële afgeleiden een constante waarde hebben (behalve in de oorsprong):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(t,bt) &= 1 + \frac{b^2(1-b^2)}{(1+b^2)^2} = \frac{1+3b^2}{(1+b^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(t,bt) &= \frac{-2b}{(1+b^2)^2}.
\end{aligned}$$

We concluderen dat $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ beide in $(0,0)$ niet continu zijn. (Ga na dat in iedere omgeving van $(0,0)$ de funktie $\frac{\partial f}{\partial x}$ alle waarden van $[0, \frac{9}{8}]$ aanneemt en $\frac{\partial f}{\partial y}$ alle waarden van $[-\frac{3}{8}\sqrt{3}, \frac{3}{8}\sqrt{3}]$.)

8.4 Elementaire eigenschappen van de totale afgeleide

Analoog aan Stelling A.2.1.5 kunnen we bewijzen:

Stelling 8.20 *Als $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ totaal differentieerbaar is in a, dan is f continu in a.*

Bewijs: Noem $Df(a) = L$. Schrijf $f(a+h) = f(a) + L(h) + \varepsilon_a(h)$. Nu is $\lim_{h\to 0} L(h) = 0$ omdat de lineaire afbeelding L continu is (zie opmerking B.6.6.3). Verder is $\lim_{h\to 0} \varepsilon_a(h) = 0$, omdat volgens Definitie 8.10 zelfs $\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_a(h)}{\|h\|} = 0$. We concluderen dat $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, dus dat f in a continu is. □

De volgende stelling is het analogon van Stelling B.6.4.2 ('componentsgewijs differentiëren').

Stelling 8.21 *Laat een functie $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ gegeven zijn met $f = (f_1, ..., f_p)$. Dan is f totaal differentieerbaar in een inwendig punt a van Dom(f) dan en slechts dan als alle $f_i : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}$ $(1 \le i \le p)$ in a totaal differentieerbaar zijn, en in dit geval is*

$$Df(a) = (Df_1(a), \ldots, Df_p(a)). \tag{31}$$

Bewijs: '$\Rightarrow$': Veronderstel eerst dat f totaal differentieerbaar is in a, en schrijf $f(a+h) = f(a) + Df(a) + \varepsilon(h)$. Dan is $\varepsilon(h) = o(\|h\|)$ $(h \to 0)$. Nemen we de j-de component van de bovenstaande uitdrukking dan vinden we: $f_j(a+h) = f_j(a) + (Df(a)(h))_j + \varepsilon_j(h)$. Hierin is de afbeelding $h \mapsto (Df(a)(h))_j$ lineair, terwijl uit $\varepsilon(h)\| \leq \|\varepsilon(h)\|$ volgt dat $\varepsilon_j(h) = o(\|h\|)$. De funktie f_j is derhalve totaal differentieerbaar is a met afgeleide $Df_j(a) : h \mapsto (Df(a)(h))_j$.

'$\Rightarrow$': Veronderstel dat iedere f_j totaal differentieerbaar in a is, en schrijf $f_j(a+h) = f_j(a) + Df_j(a)(h) + \varepsilon_j(h)$. Definieer de lineaire afbeelding $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ door

$$Lh = (Df_1(a)(h), \ldots, Df_p(a)(h)),$$

en schrijf $\varepsilon(h) = (\varepsilon_1(h), \ldots, \varepsilon_p(h))$. Dan is $f(a+h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$. Uit $\varepsilon(h)\| \leq |ge_1(h)| + \ldots + |\varepsilon_p(h)|$ leiden we af dat $\varepsilon(h) = o(\|h\|)$. Derhalve is f totaal differentieerbaar in a nmet afgeleide $Df(a) = L$. Hieruit volgt (31).

$\square$

Stelling 8.22 *Als $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ en $g : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ in het punt $a \in \mathbf{R}^n$ totaal differentieerbaar zijn, dan is ook $f+g$ in a totaal differentieerbaar en*

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

Verder is voor alle $\lambda \in \mathbf{R}$ de funktie λf in a totaal differentieerbaar en

$$D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a).$$

Bewijs: We merken allereerst op: als a inwendig punt is van $\mathrm{Dom}(f)$ en van $\mathrm{Dom}(g)$, dan ook van $\mathrm{Dom}(f+g)$ (ga na).
Uit het gegeven volgt dat er afbeeldingen $\varepsilon_a : \mathrm{R}^n$ æ R^p en $\eta_a : \mathrm{R}^n$ æ R^p bestaan zo dat

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)(h) + \varepsilon_a(h), \\ g(a+h) &= g(a) + Dg(a)(h) + \eta_a(h), \end{aligned}$$

$$\text{met } \lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_a(h)}{\|h\|} = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\eta_a(h)}{\|h\|} = 0.$$

Dus

$$(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + (Df(a) + Dg(a))(h) + \varepsilon_a(h) + \eta_a(h)$$

en

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon_a(h) + \eta_a(h)}{\|h\|} = 0.$$

Hieruit volgt dat $f+g$ in a totaal differentieerbaar is met afgeleide $Df(a) + Dg(a)$, en er geldt dus $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$.
Voor λf gaat het bewijs analoog. $\square$

8.5 De kettingregel opnieuw bezien

In deze paragraaf zal de waarde van Definitie 8.10 blijken uit een natuurlijk bewijs van de kettingregel voor de totale afgeleide. In dat bewijs zullen we het volgende lemma nodig hebben.

Lemma 8.23 *Zij $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ een lineaire afbeelding. Dan is er een constante $C > 0$ zo dat voor alle $x \in \mathbf{R}^n$ geldt:*
$$\|Lx\| \leq C\|x\|.$$

Bewijs: Zij $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, dan is $L(x) = x_1L(e_1) + \ldots + x_nL(e_n)$, dus

$$\|L(x)\| \leq |x_1|\|L(e_1)\| + \ldots + |x_n|\|L(e_n)\| \leq C\|x\|,$$

waarbij $C = \sum_{i=1}^{n} \|L(e_i)\|$. □

Stelling 8.24 (De kettingregel). *Zij f : $\mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ en g : $\mathbf{R}^p$ æ $\mathbf{R}^q$. Als f totaal differentieerbaar is in $a \in \mathbf{R}^n$ en g totaal differentieerbaar in $f(a) \in \mathbf{R}^p$, dan is $g \circ f$ totaal differentieerbaar in a en voor de afgeleide van $g \circ f$ in a geldt:*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a). \tag{32}$$

Bewijs: Omdat a inwendig punt is van $\mathrm{Dom}(f)$, $f(a)$ inwendig punt is van $\mathrm{Dom}(g)$ en voorts f continu is in a (Stelling 8.20) is a inwendig punt van $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ (ga na).
Noem $Df(a) = L$ en $Dg(f(a)) = M$. Er bestaan functies φ : R^n æ R^p resp. ψ : R^p æ R^q zo dat voor alle $h \in \mathrm{R}^n$ resp. $k \in \mathrm{R}^p$ geldt

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varphi(h), \quad \text{met} \quad \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0,$$

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + M(k) + \|k\|\psi(k), \quad \text{met} \quad \lim_{k\to 0} \psi(k) = 0.$$

Noem $L(h) + \|h\|\varphi(h) = k(h)$. Dan is $f(a+h) = f(a) + k(h)$. Dus

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g(f(a) + k(h)) \\
&= g(f(a)) + M(k(h)) + \|k(h)\|\psi(k(h)) \\
&= g(f(a)) + M(L(h)) + \|h\|M(\varphi(h)) + \|k(h)\|\psi(k(h)) \\
&= (g \circ f)(a) + (M \circ L)(h) + \|h\|\chi(h),
\end{aligned}$$

met

$$\chi(h) = M(\varphi(h)) + \frac{\|k(h)\|}{\|h\|}\psi(k(h)).$$

Om te bewijzen dat $D(g \circ f)(a) = M \circ L$, hoeven we slechts aan te tonen dat $\lim_{h\to 0} \chi(h) = 0$. Nu is $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ en M is continu (zie B.6.6.3), dus

$$\lim_{h\to 0} M(\varphi(h)) = 0 \tag{33}$$

(zie B.6.3.5). Verder is

$$\|k(h)\| = \|L(h) + \|h\|\varphi(h)\| \leq \|L(h)\| + \|h\|\|\varphi(h)\| \leq \|h\|(C + \|\varphi(h)\|)$$

voor zekere $C > 0$ (zie Lemma 8.23), dus is

$$\frac{\|k(h)\|}{\|h\|} \leq C + \|\varphi(h)\| \leq C + 1 \tag{34}$$

voor h klein genoeg (want $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$). Tenslotte is $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$ en $\lim_{k\to 0}\psi(k) = 0$, dus

$$\lim_{h\to 0}\psi(k(h)) = 0 \tag{35}$$

(zie weer (B.6.3.5)). Uit (33), (34) en (35) volgt dat $\lim_{h\to 0}\chi(h) = 0$. □

Uit Stelling 8.24 kunnen we op natuurlijke wijze een iets andere versie van de eerder bewezen kettingregel voor Jacobi-matrices (Stelling 8.5) verkrijgen.

Stelling 8.25 *Zij $f : \mathbf{R}^n$ æ $\mathbf{R}^p$ en $g : \mathbf{R}^p$ æ $\mathbf{R}^q$, f totaal differentieerbaar in a, g totaal differentieerbaar in $f(a)$. Dan geldt voor de Jacobimatrices:*

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a). \tag{36}$$

Bewijs: In het algemeen geldt voor lineaire afbeeldingen $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ en $B : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, dat de matrix van de samenstelling $B \circ A$ gelijk is aan het produkt van de matrices van A en B, dwz. $\mathrm{mat(B \circ A) = mat(B)mat(A)}$. Passen we dit principe toe op de vergelijking (32) dan volgt (36). □

Door (36) uit te schrijven in componenten zien we dat (24) geldig is onder de voorwaarden van Stelling 8.25. Evenzo is (24) al geldig zodra c differentieerbaar is en g totaal differentieerbaar in ieder beeldpunt van c.

Aldus zien we dat de theorie van Paragraaf 8.1 ontwikkeld had kunnen worden door te starten met Definitie 8.10. Dit is het gezichtspunt van het Analyse B diktaat.

Einde van de cursus Analyse B-1