Voorwoord

Getaltheorie voor beginners is een boek waarin ik mij richt tot een ieder die geen of weinig kennis van de getaltheorie heeft, maar er wel graag kennis mee wil maken. Als ingangsviveau heb ik getracht mij te richten tot een denkbeeldig publiek van eerstejaars studenten, leraren VWO en misschien zelfs een gemotiveerde VWO-leerling.

Getaltheorie gaat, zoals de benaming reeds zegt, over getallen en wel de gehele getallen. Hieronder verstaan we de natuurlijke getallen $1, 2, 3, 4, \ldots$ samen met het getal 0 en de negatieve gehele getallen $-1, -2, -3, \ldots$. Natuurlijk spelen gehele getallen een belangrijke rol in ons dagelijks leven. We staan er mee op, tijden op de wekker worden immers met getallen aangegeven, en we gaan ermee naar bed. Transacties in een winkel, opbellen van een vriend, de AEX-index, de postcode-loterij, overal zien we gehele getallen om ons heen. Hiermee hebben we echter nog geen getaltheorie.

Naast hun dagelijks nut hebben getallen ook nog een mystieke kant. Of men het wil of niet, bijna iedereen wordt door dit mysterieuze aspect van de getallen beïnvloed. Denk maar aan het ongeluksgetal 13 of het geluksgetal 7. Diegenen die niet bijgelovig zijn zullen misschien wel de bijzondere betekenis van een zilveren of gouden bruiloft ervaren. Ook aan het aanbreken van het jaar 2000 wordt een bijzondere betekenis gehecht die eigenlijk in geen verhouding staat tot het feit dat 2000 een doodgewoon getal is.

Maar ook met getallensymboliek hebben we nog geen getaltheorie. Het is echter wel het begin. Mensen kunnen door getallen gebiologeerd raken. Door de eeuwen heen is er altijd een kleine groep mensen geweest die zag dat getallen aan bepaalde wetten voldoen die het opmerken waard zijn. Op deze wijze is langzaam de getaltheorie ontstaan. En ze wordt nog steeds beoefend door mensen die gefascineerd kunnen raken door getallen en hun opmerkelijke eigenschappen. Ik denk dat kinderen deze attractie al voelen. Een prachtig voorbeeld is het boek van H.M.Enzensberger, de *Telduivel* (Bezige Bij Uitgaven), dat gaat over een driftig mannetje dat veel van getallen weet en gedurende twaalf nachten in de droom van een klein jongetje verschijnt. De spelletjes die ze daarin met getallen spelen brengen de hoofdpersoon, en ook de lezers, in de ban van de getallen. Mijn dochter van negen heeft het in korte tijd uitgelezen en ik denk dat talloze andere kinderen hetzelfde gedaan hebben. Op mijn vraag of ze nu alles begrepen had

antwoordde ze dat ze het een leuk boek vond, maar lang niet alles had begrepen. Desondanks had het spel met de getallen een onmiskenbare aantrekking op haar en ik denk, op vele andere kinderen. Mijn dochter en ik hebben in ieder geval nog 'prima' getallen gezeefd en het aantal lijnen, punten en vlakken in allerlei patronen geteld.
Als eenvoudig voorbeeld van de elegantie die van getallen uitgaat wil ik de opmerkelijke gelijkheid

$$(1+2+3+\cdots+100)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3$$

noemen. Het geldt zelfs algemener. Voor elke keuze van n geldt namelijk de gelijkheid

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

Zelf ben ik al jaren op de hoogte van dit makkelijk te bewijzen feit, maar toch vind ik het nog steeds een verrassing dat zoiets waar kan zijn. Het is met deze instelling, de verwondering en het plezier met getallen, dat ik dit boek geschreven heb. Mijn stille hoop is dat dit boek ook anderen met een zelfde belangstelling op weg zal helpen in de wereld van de getaltheorie.
Hoewel dit boek in eerste instantie gericht is aan beginners en liefhebbers, is het toch een echt wiskundeboek. Dat betekent bijvoorbeeld dat we de beweringen die we doen ook zoveel mogelijk met argumenten zullen ondersteunen, ofwel bewijzen. Het volgen van bewijzen zal zeker voor de prille beginners niet altijd even eenvoudig zijn. Het vereist enige vertrouwdheid met het opzetten van een wiskundig logische redenatie. Ik heb zeker in het begin van het boek getracht bewijzen tot op kleine details uit te werken. In latere hoofdstukken zal op sommige punten de moeilijkheidsgraad enigszins steil oplopen. Voor diegenen voor wie dat te steil is, zullen hopelijk de resultaten nog aansprekend zijn.
Bij de keuze van onderwerpen heb ik er in de eerste plaats naar gestreefd de minimale basis van een elementaire getaltheoriecursus te behandelen, zoals die ook in talloze andere boeken behandeld wordt. Deze bestaat grofweg uit de Hoofdstukken 3, 4, 5, 6, 7. De leidraad hierin heb ik getracht te motiveren door uit te gaan van het probleem van de perfecte getallen en hun eigenschappen. Vandaar is het een kleine stap naar de Mersenne-getallen. Deze getallen bevatten op hun beurt weer voldoende motivatie voor het begrip multiplicatieve orde in de congruentierekening. De overige hoofdstukken kunnen in vrij willekeurige volgorde gelezen worden, er bestaat geen grote onderlinge afhankelijkheid. Deze hoofdstukken bevatten een selectie van zaken die een elementaire behandeling toelaten. De onderwerpen zijn deels klassiek, zoals de kettingbreuken, vergelijking van Pell, en deels het gevolg van ontwikkelingen van de laatste twintig jaar, zoals het *abc*-vermoeden, ontbinding in priemfactoren en cryptografie. Er zijn ook onderwerpen waaraan ik helaas niet ben toegekomen. De voornaamste slachtoffers zijn een hoofdstuk over π en een hoofdstuk over recurrente rijen (bijv.

Fibonacci-getallen). Ook ontbreken in dit boek oefeningen en opgaven. Hopelijk blijft er nog genoeg interessants over.
Dan nog een woord over computers. Zeker in de getaltheorie is de computer een grote rol gaan spelen. Voor experimenten met getallen is de computer een prachtig instrument waar al veel waardevols uit is gekomen. Zonder daarbij overigens de rol van de wiskundige over te nemen. De wiskundige beslist uiteindelijk wat er berekend gaat worden en zorgt ook voor de interpretaties en verklaringen van dingen die gevonden worden.
Veel van de getallenvoorbeelden in dit boek zijn te ingewikkeld om met de hand uit te voeren. Reden hiervoor is dat ik wil laten zien dat onze theorie niet alleen over flauwe voorbeelden gaat. De lezer die toch de berekeningen wil controleren, of nog beter, zelf wil experimenteren, wordt aangeraden de benodigde software op te halen of aan te schaffen. Het bekendste programma op getaltheoriegebied is PARI, het werkpaard voor veel getaltheoretici. Het is geschreven door een groep wiskundigen uit Bordeaux en bevat talloze functies op getaltheoriegebied. Bovendien is het gratis en op te halen via internet. Voor het gemak van de lezer heb ik dit programma op mijn homepage gezet, `http://www.math.uu.nl/people/beukers`, doorklikken naar het item 'Getaltheorie voor Beginners'. Een tweede veelgebruikt pakket is UBASIC, geschreven en onderhouden door de Japanse wiskundige Kida. Het is een dialect van het oude vertrouwde BASIC met als verschil dat UBASIC getallen tot zo'n 2600 cijfers aankan. Dit shareware programma kan worden opgehaald bij bovengenoemd adres. Tenslotte zijn er ook nog de commerciële pakketten. Het programma DERIVE, dat ook een getaltheoriemodule bevat, is op veel scholen aanwezig. Helaas heb ik zelf geen ervaring met dit programma. Dan zijn er nog de multi-purpose computeralgebra pakketten MAPLE en MATHEMATICA waarin een enorme hoeveelheid wiskundige kennis verstopt zit op talloze gebieden. En daaronder ook veel getaltheorie. Ze zijn echter vrij duur. Er zijn trouwens ook goedkopere (en afgeslankte) studenten edities.
Tenslotte, er zijn talloze boeken op het gebied van de elementaire getaltheorie verschenen. In de referenties aan het eind van dit boek staan een paar titels, waarvan het ingangsniveau vergelijkbaar of iets hoger is met dat van dit boek, apart aangegeven. Het merendeel van de boeken is echter in het Engels. Door dit boek in het Nederlands te schrijven hoop ik te bereiken dat dit werk voor een breed Nederlands publiek een goed bereikbare toegang geeft tot de wonderlijke wereld van de getaltheorie.

Utrecht, 20 november 1998

In deze *tweede druk* zijn een groot aantal kleinere en grotere fouten gecorrigeerd. Met veel dank aan Peter van Dulst voor de assistentie hierbij.

Utrecht, 10 december 1999

Inhoudsopgave