The limits of reason

If arithmetic is consistent then it is incomplete

Studium Generale Utrecht, 6 april 2005

Wiskunde

- One of the finest creations of the human mind is mathematics, for not only is it the apotheosis of rational thought, but is also the spine that renders scientific speculation sufficiently to confront experience.

Wiskunde

- One of the finest creations of the human mind is mathematics, for not only is it the apotheosis of rational thought, but is also the spine that renders scientific speculation sufficiently to confront experience.
- L'avancement et la perfection des mathématiques sont intimement liés à la prospérité de l'État.

Wiskunde

Wiskunde is ...

een voortdurende worsteling met het begrip oneindig

Oneindige reeksen

Newton en Leibniz ontdekten al dat oneindige reeksen essentieel zijn.

Oneindige reeksen

Voorbeelden:

Oneindige reeksen

Voorbeelden:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

Oneindige reeksen

Voorbeelden:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Oneindige reeksen

Voorbeelden:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^4} - \cdots$$

Oneindige reeksen

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots$$

Oneindige reeksen

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots$$

We veranderen de sommatievolgorde:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \cdots$$

Oneindige reeksen

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots$$

We veranderen de sommatievolgorde:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \cdots$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \cdots$$

Oneindige reeksen

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots$$

We veranderen de sommatievolgorde:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \cdots$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots$$

Oneindige reeksen

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots$$

We veranderen de sommatievolgorde:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \cdots$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right).$$

Oneindige reeksen

Nog een variatie:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}$$
$$+\frac{1}{5} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \frac{1}{7} - \cdots$$

Oneindige reeksen

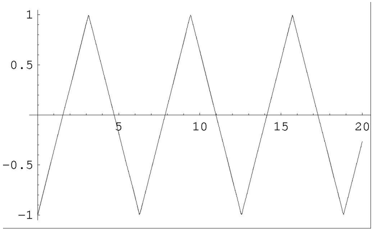
Nog een variatie:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}$$
$$+\frac{1}{5} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \frac{1}{7} - \cdots = 0$$

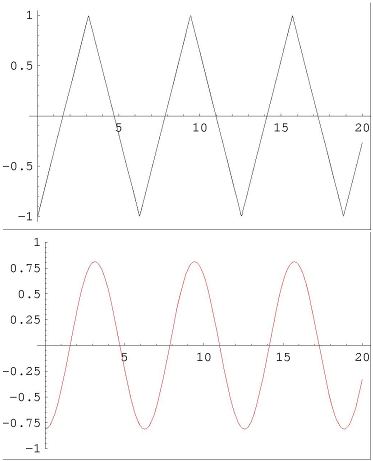
Fouriertheorie

Joseph Fourier (1768-1830) in *Théorie analytique de la chaleur*: Elke periodieke functie is (oneindige) som van sinussen en cosinussen.

Voorbeeld van een Fouriersom

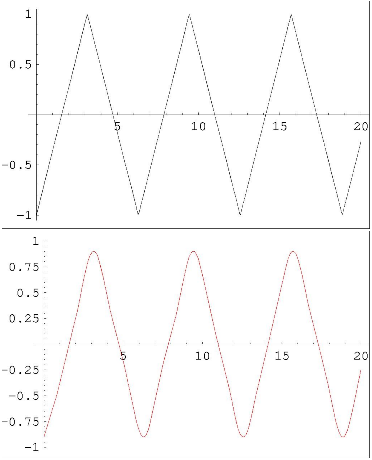


Voorbeeld van een Fouriersom



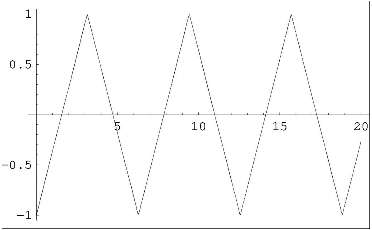
$$-\frac{8}{\pi^2} \cos x$$

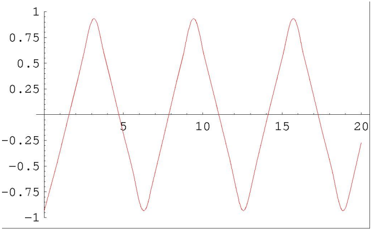
Voorbeeld van een Fouriersom



$$-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9}\right)$$

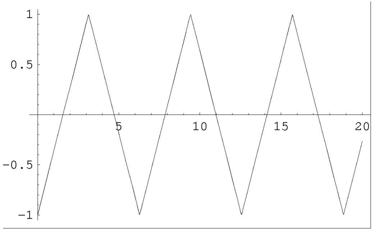
Voorbeeld van een Fouriersom





$$-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25}\right)$$

Voorbeeld van een Fouriersom



$$-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \frac{\cos 7x}{49} + \cdots\right)$$

Een exotische Fourier som

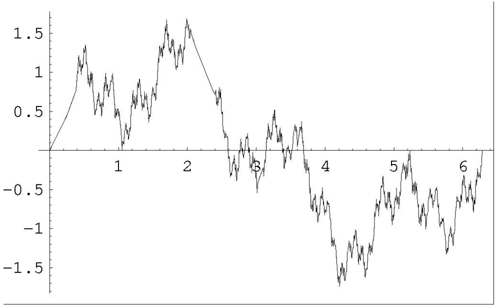
Weierstrass legde rond 1872 een heel bijzondere Fourier reeks voor:

$$\sin x + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 4^2 x}{2^2} + \frac{\sin 4^3 x}{2^3} + \cdots$$

Een exotische Fourier som

Weierstrass legde rond 1872 een heel bijzondere Fourier reeks voor:

$$\sin x + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 4^2 x}{2^2} + \frac{\sin 4^3 x}{2^3} + \cdots$$



Een exotische Fourier som

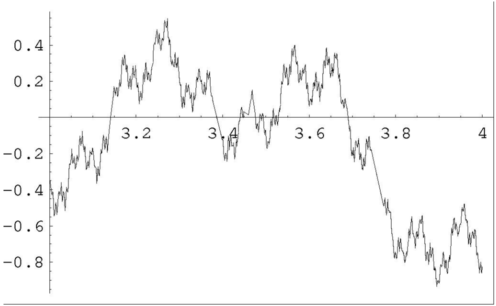
Weierstrass legde rond 1872 een heel bijzondere Fourier reeks voor:

$$\sin x + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 4^2 x}{2^2} + \frac{\sin 4^3 x}{2^3} + \cdots$$

Een exotische Fourier som

Weierstrass legde rond 1872 een heel bijzondere Fourier reeks voor:

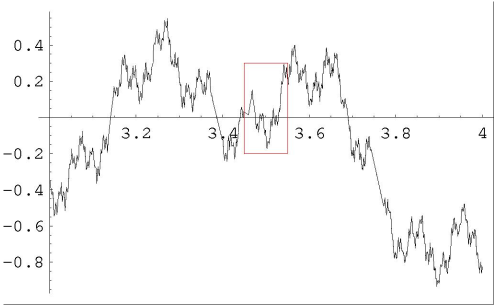
$$\sin x + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 4^2 x}{2^2} + \frac{\sin 4^3 x}{2^3} + \cdots$$



Een exotische Fourier som

Weierstrass legde rond 1872 een heel bijzondere Fourier reeks voor:

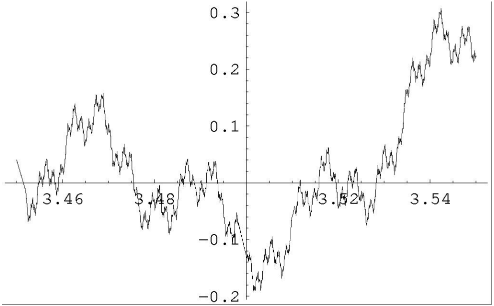
$$\sin x + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 4^2 x}{2^2} + \frac{\sin 4^3 x}{2^3} + \cdots$$



Een exotische Fourier som

Weierstrass legde rond 1872 een heel bijzondere Fourier reeks voor:

$$\sin x + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 4^2 x}{2^2} + \frac{\sin 4^3 x}{2^3} + \cdots$$



Herbezinning

- Wat is continuïteit?

Herbezinning

- Wat is continuïteit?
- Wat is een limiet?

Herbezinning

- Wat is continuïteit?
- Wat is een limiet?
- Wat is een reëel getal?

Herbezinning

- Wat is continuïteit?
- Wat is een limiet?
- Wat is een reëel getal?
- Wat is een getal?

Herbezinning

- Wat is continuïteit?
- Wat is een limiet?
- Wat is een reëel getal?
- Wat is een getal?

Continuiteit en limiet werden rond 1830-50 geformuleerd door Cauchy en Weierstrass. De eerste axioma's van de reële getallen werden door R.Dedekind geformuleerd in 1879, de axioma's van de gehele getallen in 1889 door G.Peano.

Verzamelingen

Georg Cantor (1845-1918): Oneindige verzamelingen bestaan en we moeten ermee zien om te gaan.

Verzamelingen

Georg Cantor (1845-1918): Oneindige verzamelingen bestaan en we moeten ermee zien om te gaan.

Potentieel oneindige: We kunnen nooit een oneindige verzameling aanschouwen, maar we kunnen wel willekeurig grote verzamelingen bekijken.
Actueel oneindige: Oneindige verzamelingen bestaan als één geheel en we kunnen er gewoon mee werken.

Gelijkmachtigheid

We noemen twee verzamelingen gelijkmachtig als er 1-1-verband tussen hun elementen kan worden aangegeven.

Gelijkmachtigheid

We noemen twee verzamelingen gelijkmachtig als er 1-1-verband tussen hun elementen kan worden aangegeven.
De gehele getallen zijn gelijkmachtig met de even getallen als volgt:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 2 \times 1 = 2 \\ 2 & \leftrightarrow & 2 \times 2 = 4 \\ 3 & \leftrightarrow & 2 \times 3 = 6 \\ 4 & \leftrightarrow & 2 \times 4 = 8 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Oneindige verzamelingen kunnen gelijkmachtig zijn met een deelverzameling.

Verzamelingen getallen

Beschouw:

1. De positieve gehele getallen
2. De positieve breuken
3. De positieve reële getallen

Zijn deze verzamelingen gelijkmachtig?

(Over)aftelbaarheid

De breuken zijn *aftelbaar*:

$$\frac{1}{1}$$

(Over)aftelbaarheid

De breuken zijn *aftelbaar*:

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{1}$$

(Over)aftelbaarheid

De breuken zijn *aftelbaar*:

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{3}{1}$$

(Over)aftelbaarheid

De breuken zijn *aftelbaar*:

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{3}{1}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{4}{1}$$

(Over)aftelbaarheid

De breuken zijn *aftelbaar*:

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{3}{1}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{4}{1}$$

etcetera

(Over)aftelbaarheid

De reële getallen zijn niet aftelbaar

(Over)aftelbaarheid

De reëele getallen zijn niet aftelbaar

$$
\begin{aligned}
&0.1245387521887365 24\ldots\\
&0.645344527300921007\ldots\\
&0.243488399437748849\ldots\\
&0.876736641232098538\ldots\\
&0.563502209126123731\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

(Over)aftelbaarheid

De reële getallen zijn niet aftelbaar

$$0.\textcolor{red}{1}24538752188736524\ldots$$

Nieuw getal: $0.\textcolor{red}{2}$

(Over)aftelbaarheid

De reële getallen zijn niet aftelbaar

$$0.\textcolor{red}{1}2453875218873652 4\ldots$$

$$0.6\textcolor{red}{4}534452730092100 7\ldots$$

Nieuw getal: $0.\textcolor{red}{25}$

(Over)aftelbaarheid

De reële getallen zijn niet aftelbaar

$$0.\mathbf{1}2453875218873652 4\ldots$$
$$0.6\mathbf{4}534452730092100 7\ldots$$
$$0.24\mathbf{3}4883994377488 49\ldots$$

Nieuw getal: 0.254

(Over)aftelbaarheid

De reëele getallen zijn niet aftelbaar

$$0.\mathbf{1}2453875218873652 4\ldots$$
$$0.6\mathbf{4}534452730092100 7\ldots$$
$$0.24\mathbf{3}48839943774884 9\ldots$$
$$0.876\mathbf{7}3664123209853 8\ldots$$

Nieuw getal: 0.2548

(Over)aftelbaarheid

De reële getallen zijn niet aftelbaar

$$0.\textcolor{red}{1}2453875218873652 4\ldots$$
$$0.6\textcolor{red}{4}534452730092100 7\ldots$$
$$0.24\textcolor{red}{3}488399437748849\ldots$$
$$0.876\textcolor{red}{7}366412320985 38\ldots$$
$$0.5635\textcolor{red}{0}220912612373 1\ldots$$
$$\ldots$$

Nieuw getal: $0.\textcolor{red}{25481}\ldots$

Lijn en vlak

De reële getallen tussen 0 en 1 zijn gelijkmachtig met de punten in het eenheidsvierkant als volgt.

Lijn en vlak

De reëele getallen tussen 0 en 1 zijn gelijkmachtig met de punten in het eenheidsvierkant als volgt.

$$0.\ 4\ 2\ 3\ 6\ 3\ 0\ 9\ 1\ 2\ 3\ 7\ 3\ 6\ 5\ 1\ 2\ldots$$

Lijn en vlak

De reële getallen tussen 0 en 1 zijn gelijkmachtig met de punten in het eenheidsvierkant als volgt.

$$0.\ 4\ 2\ 3\ 6\ 3\ 0\ 9\ 1\ 2\ 3\ 7\ 3\ 6\ 5\ 1\ 2\ldots$$

$$0.\ \color{red}{4}\ \color{blue}{2}\ \color{red}{3}\ \color{blue}{6}\ \color{red}{3}\ \color{blue}{0}\ \color{red}{9}\ \color{blue}{1}\ \color{red}{2}\ \color{blue}{3}\ \color{red}{7}\ \color{blue}{3}\ \color{red}{6}\ \color{blue}{5}\ \color{red}{1}\ \color{blue}{2}\ldots$$

Lijn en vlak

De reële getallen tussen 0 en 1 zijn gelijkmachtig met de punten in het eenheidsvierkant als volgt.

$$0.\ 4\ 2\ 3\ 6\ 3\ 0\ 9\ 1\ 2\ 3\ 7\ 3\ 6\ 5\ 1\ 2\ldots$$

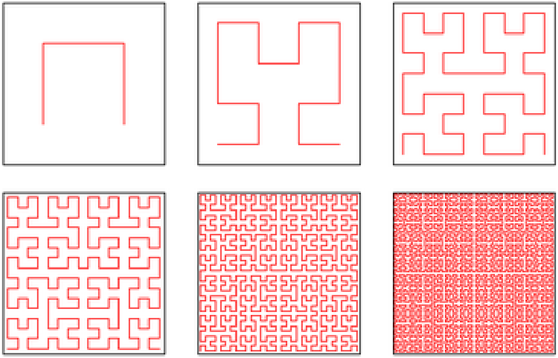
$$0.\ {\color{red}4}\ {\color{blue}2}\ {\color{red}3}\ {\color{blue}6}\ {\color{red}3}\ {\color{blue}0}\ {\color{red}9}\ {\color{blue}1}\ {\color{red}2}\ {\color{blue}3}\ {\color{red}7}\ {\color{blue}3}\ {\color{red}6}\ {\color{blue}5}\ {\color{red}1}\ {\color{blue}2}\ldots$$

$$\updownarrow$$

$$(0.\ {\color{red}4\ 3\ 3\ 9\ 2\ 7\ 6\ 1}\ldots,\ 0.\ {\color{blue}2\ 6\ 0\ 1\ 3\ 3\ 5\ 2}\ldots)$$

Vlakvullende krommen

De toekenning *getal→punt in vierkant* kan zelfs continu gekozen worden. We krijgen een *vlakvullende kromme*. Voorbeeld, de kromme van Hilbert.



Axioma's van Peano

In *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (1889) legt Giuseppe Peano (1858-1932) de axioma's van de natuurlijke (=positief gehele) getallen vast.

Axioma's van Peano

In *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (1889) legt Giuseppe Peano (1858-1932) de axioma's van de natuurlijke (=positief gehele) getallen vast.

De natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ vormen de verzameling waarin ieder element a een opvolger a^+ heeft met de volgende eigenschappen:

1. Er is een element dat van geen enkel natuurlijk getal de opvolger is. We noemen dit 1.
2. Als $a^+ = b^+$ dan geldt ook $a = b$.
3. (Principe van volledige inductie) Een verzameling natuurlijke getallen met de eigenschap dat ze 1 bevat en dat ze naast elk element ook zijn opvolger bevat is automatisch $\mathbb{N}$ zelf.

De rekenkunde

Nu we de axioma's hebben kunnen we verdere begrippen *definiëren*. Bijvoorbeeld optelling en vermenigvuldiging.
Optelling: aan elk paar natuurlijke getallen a, b kennen we een getal $a + b$ $(= b + a)$ toe zó dat

1. Voor elke a geldt $a + 1 = a^+$
2. Voor alle a, b geldt $a + b^+ = (a + b)^+$.

Vermenigvuldiging: aan elk paar natuurlijke getallen a, b kennen we een getal $a \cdot b$ $(=b \cdot a)$ toe zó dat

1. Voor elke a geldt $a \cdot 1 = a$
2. Voor alle a, b geldt $a \cdot b^+ = a \cdot b + a$

De rekenkunde

We kunnen nu eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging afleiden, zoals de associatieve eigenschap.
Kies a, b. Te bewijzen: voor elk natuurlijk getal c geldt
$a + (b + c) = (a + b) + c$.

De rekenkunde

We kunnen nu eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging afleiden, zoals de associatieve eigenschap.
Kies a, b. Te bewijzen: voor elk natuurlijk getal c geldt $a + (b + c) = (a + b) + c$.
Bewijs: We gebruiken volledige inductie.

$$a + (b + 1) = a + b^+ = (a + b)^+ = (a + b) + 1.$$

De rekenkunde

We kunnen nu eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging afleiden, zoals de associatieve eigenschap.

Kies a, b. Te bewijzen: voor elk natuurlijk getal c geldt $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Bewijs: We gebruiken volledige inductie.

$$a + (b + 1) = a + b^+ = (a + b)^+ = (a + b) + 1.$$

Stel dat we een getal c hebben die aan onze bewering voldoet (inductie hypothese). Dan voldoet c^+ er ook aan (inductiestap). Immers,

$$a + (b + c^+) = a + (b + c)^+ = (a + (b + c))^+$$
$$= ((a + b) + c)^+ = (a + b) + c^+$$

Getaltheorie

We kunnen verdergaan met het invoeren van begrippen. Zoals *deelbaarheid* en *priemgetal*.

- Definitie: Een getal $\neq 1$ dat alleen zichzelf en 1 als deler heeft, heet een priemgetal.

Getaltheorie

We kunnen verdergaan met het invoeren van begrippen. Zoals *deelbaarheid* en *priemgetal*.

- Definitie: Een getal $\neq 1$ dat alleen zichzelf en 1 als deler heeft, heet een priemgetal.
- Stelling: Elk natuurlijk getal is, op volgorde van factoren na, op precies één manier te schrijven als product van priemgetallen.

Getaltheorie

We kunnen verdergaan met het invoeren van begrippen. Zoals *deelbaarheid* en *priemgetal*.

- Definitie: Een getal $\neq 1$ dat alleen zichzelf en 1 als deler heeft, heet een priemgetal.
- Stelling: Elk natuurlijk getal is, op volgorde van factoren na, op precies één manier te schrijven als product van priemgetallen.
- Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.

Getaltheorie

We kunnen verdergaan met het invoeren van begrippen. Zoals *deelbaarheid* en *priemgetal*.

- Definitie: Een getal $\neq 1$ dat alleen zichzelf en 1 als deler heeft, heet een priemgetal.
- Stelling: Elk natuurlijk getal is, op volgorde van factoren na, op precies één manier te schrijven als product van priemgetallen.
- Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.
- Vraag: Zijn er oneindig veel priemtweelingen (zoals $11, 13$, $17, 19$, $41, 43$, $71, 73$ etc) ?

Getaltheorie

We kunnen verdergaan met het invoeren van begrippen. Zoals *deelbaarheid* en *priemgetal*.

- Definitie: Een getal $\neq 1$ dat alleen zichzelf en 1 als deler heeft, heet een priemgetal.
- Stelling: Elk natuurlijk getal is, op volgorde van factoren na, op precies één manier te schrijven als product van priemgetallen.
- Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.
- Vraag: Zijn er oneindig veel priemtweelingen (zoals $11, 13$, $17, 19$, $41, 43$, $71, 73$ etc) ?
- Vraag (Goldbach vermoeden): Is elk even getal > 4 te schrijven als som van twee priemgetallen?

Getaltheorie

We kunnen verdergaan met het invoeren van begrippen. Zoals *deelbaarheid* en *priemgetal*.

- Definitie: Een getal $\neq 1$ dat alleen zichzelf en 1 als deler heeft, heet een priemgetal.
- Stelling: Elk natuurlijk getal is, op volgorde van factoren na, op precies één manier te schrijven als product van priemgetallen.
- Stelling: Er zijn oneindig veel priemgetallen.
- Vraag: Zijn er oneindig veel priemtweelingen (zoals $11, 13$, $17, 19$, $41, 43$, $71, 73$ etc) ?
- Vraag (Goldbach vermoeden): Is elk even getal > 4 te schrijven als som van twee priemgetallen?
- Vraag: Zijn de Peano axioma's consistent?

Bijna Goldbach

Chen, Jing-run (1966): Elk even getal > 4 is te schrijven als som van een priemgetal en een getal dat uit hoog-uit twee priemfactoren bestaat.

Bijna Goldbach

Chen, Jing-run (1966): Elk even getal > 4 is te schrijven als som van een priemgetal en een getal dat uit hoog-uit twee priemfactoren bestaat.

Ivan Vinogradov (1939): Elk voldoende groot oneven getal is te schrijven als som van drie priemgetallen.

Hilbert problemen

In 1900, tijdens het Internationale Mathematisch Congres in Parijs, formuleerde David Hilbert (1862-1943) 23 wiskundige problemen die de 20e eeuwse wiskunde zouden kunnen bezighouden. We citeren twee van deze problemen.

Hilbert problemen

In 1900, tijdens het Internationale Mathematisch Congres in Parijs, formuleerde David Hilbert (1862-1943) 23 wiskundige problemen die de 20e eeuwse wiskunde zouden kunnen bezighouden. We citeren twee van deze problemen.

1. Bewijs de Continuum Hypothese. Dat wil zeggen, elke deelverzameling van de reële getallen is ofwel aftelbaar, ofwel gelijkmachtig met de reële getallen zelf.

Hilbert problemen

In 1900, tijdens het Internationale Mathematisch Congres in Parijs, formuleerde David Hilbert (1862-1943) 23 wiskundige problemen die de 20e eeuwse wiskunde zouden kunnen bezighouden. We citeren twee van deze problemen.

1. Bewijs de Continuum Hypothese. Dat wil zeggen, elke deelverzameling van de reële getallen is ofwel aftelbaar, ofwel gelijkmachtig met de reële getallen zelf.

2. Bewijs dat de rekenkunde consistent is.

Hilbert's motto

Uit *Naturerkennen und Logik*, 1930.
Für den Mathematiker gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. Einst sagte der Philosoph Comte - in der Absicht, ein gewiss unlösbares Problem zu nennen-, dass es der Wissenschaft nie gelingen würde das Geheimniss der chemischen Zusammensetzung der Himmelskörper zu ergründen. Wenige Jahre später wurde durch die Spectralanalyse von Kirchhoff und Bunsen dieses Problem gelöst, [...]
Der wahre Grund, warum es Comte nicht gelang, ein unlösbares Problem zu finden, besteht meiner Meinung nach darin, dass es ein unlösbares Problem überhaupt nicht gibt. Statt des törichten Ignorabimus heisse im Gegenteil unsere Losung:
Wir müssen wissen, Wir werden wissen.

Gödel onvolledigheid

Rond 1930 toonde Kurt Gödel (1906-1978) de volgende twee spectaculaire stellingen aan.

Gödel onvolledigheid

Rond 1930 toonde Kurt Gödel (1906-1978) de volgende twee spectaculaire stellingen aan.

1. Binnen ieder consistent wiskundig systeem dat de Peano axioma's omvat zijn er uitspraken die binnen dit systeem noch bewijsbaar noch weerlegbaar zijn.

Gödel onvolledigheid

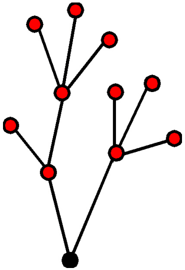
Rond 1930 toonde Kurt Gödel (1906-1978) de volgende twee spectaculaire stellingen aan.

1. Binnen ieder consistent wiskundig systeem dat de Peano axioma's omvat zijn er uitspraken die binnen dit systeem noch bewijsbaar noch weerlegbaar zijn.
2. Van een consistent wiskundig systeem dat de Peano axioma's omvat is de consistentie binnen dit systeem niet aan te tonen.

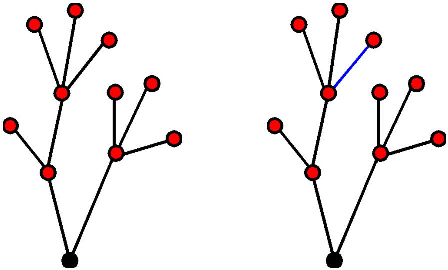
Continuum hypothese

Paul Cohen (1934-...) bewees in 1963 dat, uitgaande van de axioma's van de verzamelingenleer en de consistentie daarvan, de Continuum Hypothese noch bewezen, noch weerlegd kan worden.

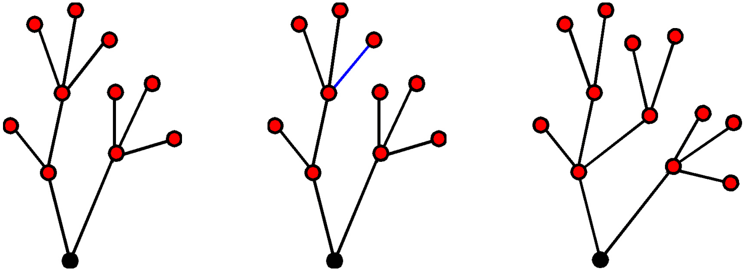
De hydra



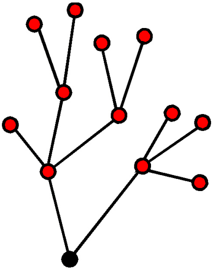
De hydra



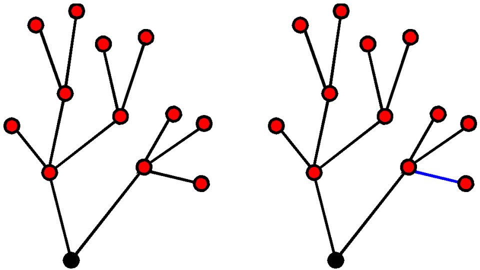
De hydra



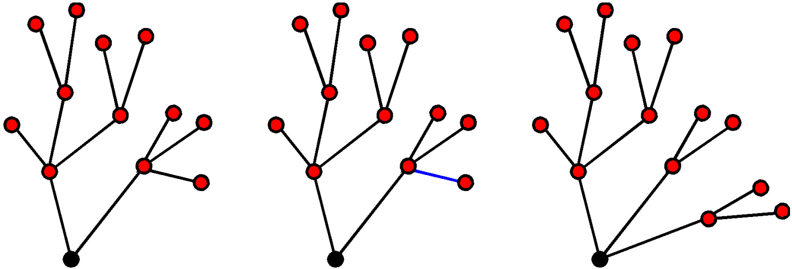
De hydra



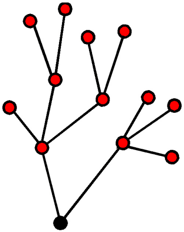
De hydra



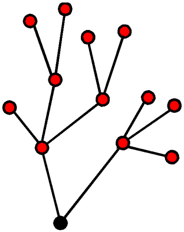
De hydra



De hydra

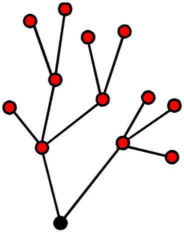


De hydra



Deze hydra sterft pas na
463168356949264781694283940034751631413
079938662562256157830336031652535337246
slagen.

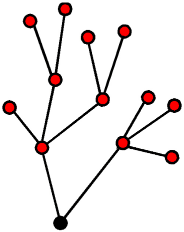
De hydra



Deze hydra sterft pas na
4631683569492647816942839400347516314130799386625622561578303360316525353372 46
slagen.

Stelling: Elke hydra sterft uiteindelijk.

De hydra



Deze hydra sterft pas na
463168356949264781694283940034751631413
079938662562256157830336031652535337246
slagen.

Stelling: Elke hydra sterft uiteindelijk.

Stelling (Paris-Kirby, 1982). De vorige stelling is niet bewijsbaar binnen de Peano arithmetiek.