1^{e} deeltentamen Statistiek

18 april 2012

- *Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.*
- *Het gebruik van het boek van J.A. Rice, aantekeningen, handouts en zakrekenmachines is toegestaan.*
- *U mag in ieder onderdeel de conclusies van voorgaande onderdelen gebruiken, ook als u die (nog) niet bewezen hebt.*
- *Motiveer steeds uw antwoord door duidelijk aan te geven welke argumenten en welke resultaten u gebruikt om een bepaalde conclusie te trekken.*
- *U heeft 3 uur de tijd voor het tentamen.*
- *Veel succes!*

Opgave 1 Zij X_1, X_2, …, X_n onafhankelijke, identiek verdeelde stochasten met kansdichtheidsfunctie: $f(x|\theta) = \frac{\Gamma(2\theta)}{(\Gamma(\theta))^2} x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1}$ voor $0 < x < 1$ met $\theta > -1$.
U mag gebruiken dat voor $\alpha > -1$ en $\beta > -1$ geldt dat $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$.

a) Bepaal de momentschatter T_M van θ.

b) Bepaal een voldoende statistiek voor θ.

c) Bepaal een minimaal voldoende statistiek voor θ (mag dezelfde zijn als in onderdeel c)) en bewijs dat deze voldoende is.

Opgave 2

b) Stel de vergelijking op waaraan de meest waarschijnlijke schatter (maximum likelihood estimator) van θ moet voldoen. (Afgeleides van de Γ-functie kunt u laten staan.)

e) Bereken de Fisher informatie in één waarneming.

f) Bepaal een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ van niveau α.

Opgave 1

Nota bene: bij deze opgave bouwen de deelopgaven minder op elkaar voort dan meestal het geval is bij tentamenopgaven.
De functie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ is gedefinieerd door

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2 \quad , \quad f_2(x, y) = 2xy$$

ofwel

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

De functie $\gamma : [0, \pi] \to \mathbf{R}^2$ is gedefinieerd door

$$\gamma(t) = (\cos\ t, \sin\ t)$$

a) Bereken *met behulp van de kettingregel* de afgeleide van de compositie $f \circ \gamma$ (dus van $t \mapsto f(\gamma(t))$).

b) Bereken de lijnintegraal over de kromme γ van de differentiaalvorm

$$\omega = f_1(x, y)\ \mathrm{d}x + f_2(x, y)\ \mathrm{d}y$$

c) Is ω gesloten?

Door te schrijven

$$z = x + \mathrm{i}y \quad , \quad f(z) = f_1(x, y) + \mathrm{i} f_2(x, y)$$

vatten we f op als afbeelding van $\mathbf{C}$ naar $\mathbf{C}$. Door te schrijven $\gamma(t) = \cos t + \mathrm{i} \sin t$ vatten we ook γ op als $\mathbf{C}$ waardig.

d) Is f complex differentieerbaar in ieder punt van $\mathbf{C}$?

e) Bereken nu de complexe lijnintegraal van f over γ.

Zie ommezijde!

Opgave 2

Definieer $f : \mathbf{C}\backslash\{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\} \to \mathbf{C}$ door

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

en definieer voor $\epsilon > 0$ de gesloten gladde kromme $\gamma_\epsilon : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ door

$$\gamma_\epsilon(t) = -\mathrm{i} + \epsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

a) Toon aan dat

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, \mathrm{d}z = -\pi$$

b) Bepaal $\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, \mathrm{d}z$ voor $0 < \epsilon \leq 1$. Vermeld expliciet van welke eigenschappen van γ_ϵ en f gebruik gemaakt wordt in deze redenering.

c) Aan welke voorwaarden moet een gesloten keten van C^1 krommen α voldoen opdat geldt

$$\int_\alpha f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\, \mathrm{d}z$$

(Illustreer je antwoord met een schets en geef daarin ook aan in welke richting α doorlopen wordt.)

d) Zij $\delta_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ voor $-\pi \leq t \leq 0$. Toon aan dat

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\delta_r} f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

e) Bewijs via een handige keuze van een één-parameter familie van gesloten ketens van C^1 krommen α_r, en het nemen van de limiet $r \to \infty$, dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \pi.$$

Tip: geef een schets van α_r voor een representatieve r.

Zie volgend blad!!

Opgave 3

a) Bepaal de Fourier-reeks van $(\sin x)^4$.
Hint: $\sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$

b) Hoe kun je de Fourier coëfficiënten van

$$4(\sin x)^3 \cos x$$

uit die van $(\sin x)^4$ bepalen?

c) Formuleer de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen.

d) Bereken

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin x)^6 (\cos x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

e) Zij E een lineaire ruimte over $\mathbf{C}$ en zij $< \cdot, \cdot >$ een Hermite's inproduct op E. Zij K een indexverzameling en zij ϵ_k, $k \in K$, een orthonormaal stelsel in E.
Formuleer de ongelijkheid van Bessel. Onder welke extra voorwaarde op het stelsel $\{\epsilon_k\}_{k \in K}$ is deze ongelijkheid in feite een gelijkheid?

Einde.