Tentamen Statistiek

26 januari 2004, 14.00-17.00 uur

Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Het gebruik van het boek van J.A. Rice, aantekeningen, handouts en zakrekenmachines is toegestaan.

1. (a) Zij $(X,Y)^T \sim N(\mu,\Sigma)$ met $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Laat $Z_1,\ldots,Z_5$ een steekproef zijn uit de verdeling van stochast $Z = X - Y$. Bereken $E\bar{Z}_5$, $\mathrm{Var}(\bar{Z}_5)$, $\mathrm{Cov}(Z, X+Y)$, ES_z^2, $\mathrm{Var}\big(\sqrt{2}S_z^2\big)$ en $P\big(\bar{Z}_5 \le S_z\frac{0.569}{\sqrt{5}} + 2\big)$. Bepaal de verdeling van $(Z, X+Y)^T$.

   (b) Zij $X_1,\ldots,X_n$ een steekproef uit een verdeling waarvoor geldt $EX = \mu$ en $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, en laat $Y_1,\ldots,Y_n$ een daarvan onafhankelijke steekproef zijn uit een verdeling waarvoor geldt $EY = \mu$ en $\mathrm{Var}(Y) = \alpha\sigma^2$. Men wenst μ te schatten. Definieer $\bar{X} = \sum_{k=1}^n X_k/n$ en $\bar{Y} = \sum_{k=1}^n Y_k/n$. Onderzoek of de schatters $T_1 = (\bar{X}+\bar{Y})/2$ en $T_2 = (\alpha\bar{X}+\bar{Y})/(1+\alpha)$ zuivere schatters van μ zijn. Bereken de verwachte kwadratische fouten van beide schatters. Welke van deze twee schatters verdient de voorkeur?

2. (a) Zij $X_1,\ldots,X_n$ een steekproef uit de geometrische verdeling met parameter $\theta \in (0,1)$: $P_\theta(X_1 = x) = \theta(1-\theta)^{x-1}$ voor $x = 1,2,\ldots$. Bepaal de momentenschatter en de meest aannemelijke schatter voor θ. Bereken de Fisher informatie in één waarneming. Bepaal een benaderend betrouwbaarheidsinterval voor θ van niveau α. Bepaal een voldoende statistiek voor θ. Is deze statistiek volledig? (Je mag gebruik maken van gelijkheid $\mathrm{Var}(X_1) = (1-\theta)/\theta^2$).

   (b) Zij $X_1,\ldots,X_n$ een steekproef uit de verdeling met kansdichtheid $f_\theta(x) = \theta x^{-2} I\{x > \theta\}$, waarbij $\theta > 0$ een onbekende parameter is. Bepaal de momentenschatter en de meest aannemelijke schatter voor θ (indien deze bestaan). Zijn deze schatters zuiver? Bepaal een voldoende statistiek voor θ. Bepaal een UMVZ schatter voor θ.

3. (a) Zij $X_1,\ldots,X_n$ een steekproef uit de geometrische verdeling met parameter $\theta \in (0,1)$ als in opgave 2(a). Bepaal de a-posteriori verdeling en de Bayes schatter voor θ ten opzichte van de a-priori kansdichtheid $\pi(\theta) = 6\theta(1-\theta)I\{0 < \theta < 1\}$. Behoort de a-posteriori verdeling tot een standaard familie van verdelingen? Zo ja, welke en met welke parameters? (Je mag gebruik maken van gelijkheden $B(k,m) = \int_0^1 u^{k-1}(1-u)^{m-1}du = \Gamma(k)\Gamma(m)/\Gamma(k+m)$, $\Gamma(k) = (k-1)!$, $k,m \in \mathbb{N}$).

   (b) Het aantal klanten in een winkel op donderdag is normaal verdeeld met verwachting $\mu_0 = 220$ en standaardafwijking $\sigma = 10$. Door te adverteren in het plaatselijke advertentieblad dat op woensdag verschijnt hoopt de winkelier het aantal klanten te doen toenemen. De aantallen klanten op 4 donderdagen (na het verschijnen van advertenties) zijn 235, 210, 228, 244. Neem de onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$. Formuleer een kansmodel en beschrijf het toetsingsprobleem. Ga door middel van een geschikte toets na of het aantal klanten inderdaad is toegenomen. Bepaal de overschrijdingskans bij deze toets. Welke conclusies had de winkelier kunnen trekken als de onbetrouwbaarheidsdrempel gelijk was aan $\alpha = 0.01$? Bereken het onderscheidend vermogen in punt $\mu = 250$.