Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{T}_{\!B}\mathcal{C}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB361 werd in 2009-2010 gegeven door Dr. E. N. Belitser.

Statistiek (WISB361)
21 januari 2010

Het gebruik van het boek van Rice, aantekeningen, handouts en een zakrekenmachine is toegestaan. Motiveer je antwoorden. Je mag gebruiken dat $P(T \leq 1.638) = 0.9)$ als $T \sim t_3$.
De puntenverdeling is: 1 - 30, 2 - 15, 3 - 30, 4 - 25

Opgave 1

Zij $(Y, N) \sim N(\mu, \Sigma)$ met $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 5/4 \\ 5/4 & 1 \end{pmatrix}$. Laat X_1, X_2, X_3 een steekproef zijn uit de verdeling van stochast $X = Z - 2Y$ en Y_1, Y_2 een daarvan onafhankelijke steekproef uit de verdeling van stochast Y. Noteer verder $\bar{X} = \frac{1}{3}(x_1 + X_2 + X_3)$, $\bar{Y} = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)$, $S_x^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(X_i - \bar{X})^2$ en $S_y^2 = (Y_1 - \bar{Y})^2 + (Y_2 + \bar{Y})^2$.

a) Bereken $E\bar{X}$, $\mathrm{Var}(\bar{X})$, $E(1000S_Y^2 + \frac{5}{2}S_X^2)$ en $\mathrm{Var}(S_X^2 - 3S_Y^2)$.

b) Bepaal t zodanig dat $P\left(\frac{|\bar{Y}|}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}} \leq \frac{t}{\sqrt{6}}\right) = 0.8$.

c) Bepaal de verdeling van de stochastische vector$(X, Z)^T$. Zijn X, Z onafhankelijk? Bepaal de kansdichtheid van $(X, Z)^T$ als deze bestaat.

d) Bezit de verdeling van $(X, Y, Z)^T$ een kansdichtheid?

Opgave 2

Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een verdeling met kansmassafunctie $p_\theta(k) = P_\theta(X_1 = k) = \frac{e^{-\theta^2}\theta^{2k}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, met onbekende parameter $\theta > 0$. Zij $\hat{\theta}$ de meest aannemelijke schatter voor θ. Bepaal benaderende betrouwbaarheidsintervallen voor θ en $1/\theta$ van niveau $1 - \alpha$.

Opgave 3

Bij de laatste verkiezing haalde partij A 20% van de stemmen. Bij een opiniepeiling zeggen 300 van de 1600 ondervraagden op partij A te willen stemmen. Volgens de opiniepeiler is het aantal aanhangers aantoonbaar veranderd. Zij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$.

a) Formuleer een kansmodel en beschrijf het toetsingsprobleem

b) Ga door middel van een geschikte toets na of de opiniepeiler gelijk heeft.

c) Bepaal de overschrijdingskans (p-value) bij deze toets. Welke conclusies had men kunnen trekken als de onbetrouwbaarheidsdrempel gelijk was aan $\alpha = 0.01$?

d) Bereken het onderscheidend vermogen in punt $p = 0.5$.

Opgave 4

Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit de $N(\mu, \sigma^2)$, met $\sigma = 10$. Men wil de nulhypothese $H_0 : \mu = 150$ toetsen tegen $H_1 : \mu < 150$. Waargenomen is $\bar{x}_9 = 146$. Toets met onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$ of H_O wordt verworpen. Voor welke waarden van onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt de nulhypothese niet verworpen? Bij welke steekproefomvang n zou het resultaat $\bar{x}_n = 146$ (met $\alpha = 0.05$) leiden tot het verwerpen van de nulhypothese?