21 januari 2010

Opgave 2 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i)$
$l(\theta) = \log(L(\theta)) = -n\theta^2 + 2\log\theta \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \log(x_i!)$
$\frac{d}{d\theta} l(\hat{\theta}) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}$
$I(\theta) = -\mathbb{E}(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p_\theta(k)) = 4.$
Een 100%$(1-\alpha)$ betrouwbaarheidsinterval voor θ wordt gegeven door: $\hat{\theta} \pm z(\alpha/2)\frac{1}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}}$.
Omdat de functie $h(\theta) = \frac{1}{\theta}$ strikt monotoom dalend is, wordt een 100%$(1-\alpha)$ betrouwbaarheidsinterval voor $\frac{1}{\theta}$ gegeven door: $(\frac{1}{\hat{\theta}+z(\alpha/2)\frac{1}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}}}, \frac{1}{\hat{\theta}-z(\alpha/2)\frac{1}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}}})$. (Alternatief, definieer $\lambda = \frac{1}{\theta}$ en merk op $p_\lambda(k) = \frac{e^{-\frac{1}{\lambda^2}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2k}}{k!}$ en bepaal de Fisher informatie $I(\lambda)$ en bereken een 100%$(1-\alpha)$ betrouwbaarheidsinterval voor λ.

Opgave 3

a De kans dat een kiezer op partij A stemt is Bernoulli verdeeld met parameter p. Alle kiezers zijn i.i.d.
$H_0 : p = 0.2$
$H_A : p \neq 0.2.$

b . $\hat{p} = \frac{3}{16}$.
$s^2_{\hat{p}} = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1} = 1/10496$
95% CI: $\hat{p} \pm 1.96 s_{\hat{p}}$.
Het 95% CI voor p bevat 0.2, dus het aantal aanhangers is niet aantoonbaar veranderd.

c Bepaal voor welke waarde van x geldt: $\hat{p} + x s_{\hat{p}}$=0.2. Dit geeft: $x = 1.28$. Volgens de tabel van de cumulatieve standaard normale verdeling, komt dit overeen met een p-waarde van 2(1-0.8997).

d Als is werkelijkheid 50% van de kiezers op partij A stemt, dan geldt:
$P(H_0 verworpen | H_A waar) = P(\hat{p} \notin (\hat{p} - 1.96 s_{\hat{p}}, \hat{p} + 1.96 s_{\hat{p}}))$. Gebruik de normale benadering. De power van de test is praktisch 1.

21 januari 2010

Opgave 1

i $\mathbb{E}(X_1) = \sqrt{\theta}$. Momentschatter van $\sqrt{\theta}$ is dus $T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i := \bar{x}$.
Definieer $\lambda = \sqrt{\theta}$. $l(\lambda) = \log\lambda \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i$
$\frac{d}{d\lambda} l(\hat{\lambda}) = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x} \Rightarrow \widehat{\sqrt{\theta}} = \bar{x} \Rightarrow T_1 = T_2$.
$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(\bar{x}) = \sqrt{\theta}$, dus T_1 is een zuivere schatter.
$\mathbb{E}(T_2 - \sqrt{\theta})^2 = \mathbb{E}(T_2^2) - \theta$.
$\mathbb{E}(T_2^2) = \mathbb{E}(\frac{1}{n^2}\sum_{i,j} X_i X_j) = \frac{n^2-n}{n^2}\theta + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) =$
$(1-\frac{1}{n})\theta + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^\infty k^2\lambda^k e^{-\lambda}/k! = (1-\frac{1}{n})\theta + \frac{1}{n}(\lambda^2+\lambda) = \theta + \frac{\sqrt{\theta}}{n}$.
Dus $\mathbb{E}(T_2 - \sqrt{\theta})^2 = \frac{\sqrt{\theta}}{n}$.

ii $f(x_1, x_2, \ldots x_n|\theta) = \frac{\theta^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\sqrt{\theta}}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$.
Definieer $T = \sum_{i=1}^n x_i$, $g(t,\theta) = \theta^{\frac{t}{2}} e^{-n\sqrt{\theta}}$ en $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$. Dan geldt:
$f(x_1, x_2, \ldots x_n|\theta) = g(T(x_1, x_2, \ldots, x_n), \theta)h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en volgens de factorisatiestelling is T een voldoende statistiek.
Compleetheid niet behandeld
UMVU: uniformly minimum variance unbiased estimator. Volgens de Rao-Blackwell stelling geldt: $\mathbb{E}(\widehat{\sqrt{\theta}}|T_1$ is een UMVU schatter. $\mathbb{E}(\widehat{\sqrt{\theta}}|T_1 = T_1$. Dus T_1 is een UMVU schatter voor $\sqrt{\theta}$. Analoog voor θ^2: T_1^2 is een UMVU schatter voor θ.

iii $I(\theta) = -\mathbb{E}(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x|\theta)) = \frac{1}{4}\theta^{-3/2}$.
$I(\lambda) = -\mathbb{E}(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log f(x|\lambda)) = \frac{1}{\lambda}$.
$Var(T_1) = \frac{\sqrt{\theta}}{n} = \frac{\lambda}{n}$. Dus de ondergrens wordt aangenomen door T_1.

iv $f(2|\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{2^{x_i/2}e^{-\sqrt{2}}}{x_i!}1/2}{1/2\prod_{i=1}^{n}\frac{2^{x_i/2}e^{-\sqrt{2}}}{x_i!}+1/2\prod_{i=1}^{n}\frac{10^{x_i/2}e^{-\sqrt{10}}}{x_i!}}$. Schatter is 2 als$f(2|\mathbf{x}) > 1/2$, anders is de schatter gelijk aan 10.

Opgave 2 i