



Oefententamen 1 kansrekening 2009

1. Stel dat de simultane dichtheid van  $X$  en  $Y$  gegeven wordt door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4y}{x} & \text{als } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de marginale kansdichtheden  $f_X$  en  $f_Y$  van  $X$  en  $Y$ .  
(b) Bepaal  $E(XY)$ .  
(c) Bepaal  $P(X + Y \leq 1)$ .  
(d) Bepaal de kansdichtheid van  $Z = X^2$ .
2. Zij  $X_1, X_2, \dots$  een rij van onafhankelijke gelijk verdeelde stochasten met  $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = 1/2$ . Definieer de stochasten  $Y_i, i = 1, 2, \dots$ , door

$$Y_i = \begin{cases} X_i, & \text{als } X_i = 1, \\ X_i - 1, & \text{als } X_i = 0. \end{cases}$$

- (a) Bepaal  $P(\sum_{i=1}^{10} Y_i = 0)$ .  
(b) Bepaal  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sum_{i=1}^n Y_i < \sqrt{n})$ .  
(c) Bepaal  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sum_{i=1}^n Y_i > 0)$ .
3. Gegeven is rij  $X_1, X_2, \dots, X_n$  van onafhankelijk gelijk verdeelde stochasten uit een uniforme verdeling op het interval  $[-\theta, \theta]$ , waarbij  $\theta$  onbekend is.
- (a) Toon aan dat  $T = \frac{3}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)$  een zuivere schatter is voor  $\theta^2$ .  
(b) Laat zien dat  $\text{Var} X_i^2 = 4\theta^4/45$ .  
(c) Is  $\sqrt{T}$  een zuivere schatter voor  $\theta$ ? Zo ja, toon dit aan. Zo nee, geef aan of de bias positief of negatief is.

4. Een exploratie maatschappij doet boringen in een gebied waarbij er kans  $\theta$  is dat er olie wordt aangeboord. Stel dat er 5 boringen verricht worden totdat er eindelijk olie wordt gevonden. Op een iets andere plaats in het gebied wordt opnieuw (en onafhankelijk van de eerdere boringen) een serie boringen uitgevoerd totdat bij de 10e boring voor het eerst olie gevonden wordt. Steeds op iets andere plekken in het gebied worden er nog vier series van dit soort boringen uitgevoerd: de benodigde aantallen pogingen in deze vier series zijn 8, 7, 6, en 8.

Dus alles tezamen zijn

$$5 \quad 10 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 8$$

de aantallen pogingen in elke serie tot en met succes.

- (a) Laat zien dat de likelihood functie die bij deze steekproef van grootte 6 hoort gelijk is aan:

$$L(\theta) = \theta^6(1 - \theta)^{38}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

- (b) Wat is de maximum likelihood schatting voor  $\theta$ ?