Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

OefenTentamen kansrekening 2007

1. Veronderstel dat α de kans is dat van een tweeling beide kinderen jongens zijn, en dat β de kans is dat ze allebei meisje zijn. Veronderstel verder, dat als een tweeling uit een jongen en een meisje bestaat, de kans dat het eerst geboren kind een meisje is, $\frac{1}{2}$ is.

   (a) Wat is de kans dat de tweeling van het zelfde geslacht is?

   (b) Toon aan dat de kans dat het eerst geboren kind van een tweeling een jongen is, gelijk is aan $\frac{1+\alpha-\beta}{2}$.

   (c) Als het eerst geboren kind van een tweeling een jongen is, wat is dan de kans dat het tweede kind eveneens een jongen is?

2. Er wordt herhaaldelijk geworpen met een dobbelsteen. Laat

$$X = \text{het aantal worpen tot en met voor het eerst een 6 bovenkomt,}$$

   en

$$Y = \text{het aantal worpen tot en met voor het eerst een 5 bovenkomt.}$$

   (a) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

   (b) Bepaal $E(X+Y)$.

   (c) Bepaal $P(X=n, Y=m)$ voor alle $n, m \geq 1$.

   (d) Bepaal $E(X|Y=1)$.

3. De stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk en geometrisch verdeeld met parameter p:

$$P(X=k) = P(Y=k) = p(1-p)^{k-1}; k = 1, 2, \ldots$$

   Het minimum van X en Y geven we aan met Z, dus $Z = \min\{X, Y\}$.

   (a) Laat zien dat Z geometrisch verdeeld is met parameter $p(2-p)$.

   (b) Laat zien dat de conditionele verdeling van X gegeven $Z = k$ gegeven wordt door

$$p_{X|Z}(n|k) = \begin{cases} \frac{1}{2-p}, & n = k, \\ \frac{p}{2-p}(1-p)^{n-k}, & n > k. \end{cases}$$

(c) Bepaal $E(X|Z=k)$ de conditionele verwachting van X gegeven $Z=k$.

4. Laat $X_1, X_2, \cdots$ een rij van onafhankelijke stochasten zijn, met genererende functie $G_{X_i}(s) = \frac{1}{4}(s+s^2+s^4+s^5)$, voor $i=1,2,\cdots$. Laat N een Binomiaal verdeelde stochast zijn met parameters m en p (d.w.z. $P(N=n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$ voor $n = 0, 1, \cdots, m$). Veronderstel verder dat N onafhankelijk van $X_1, X_2, \cdots$ is. Laat $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

   (a) Laat zien dat voor $n = 0, 1, 2, \cdots m$ en alle s,

   $$E(s^Y|N=n) = \frac{1}{4^n}\left(s+s^2+s^4+s^5\right)^n.$$

   (b) Bepaal (m.b.v. onderdeel (a)) $P(Y=5|N=3)$.

   (c) Laat zien (m.b.v. (a)) dat de genererende functie van Y gegeven wordt door

   $$G_Y(s) = \left(\frac{1}{4}\left(s+s^2+s^4+s^5\right)p + 1 - p\right)^m.$$

   (d) Bepaal de verwachting $E(Y)$ en de variantie $\sigma^2(Y)$ van Y.