Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Extra opgaven hoofdstuk 8, kansrekening 2007

1. Laat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ onafhankelijke Poisson verdeelde stochasten zijn met parameter $\lambda = 1$. Laat zien dat
$$\lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq n) = 1/2.$$

2. Laat $X_1, X_2, \ldots,$ onafhankelijke gelijk verdeelde continue stochasten zijn met dichtheid
$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$
Benader $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{20} \leq 10)$ met behulp van de centrale limietstelling.

3. Zij $X_1, X_2, \ldots,$ een rij van onafhankelijke normaal verdeelde stochasten met $E(X_n) = 0$ en $E(X_n^2) = \sigma_n^2$, voor $n \geq 1$. Laat X een standaard normaal verdeelde stochast zijn.
   (a) Laat zien dat $X_n \Rightarrow X$ dan en slechts dan $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 1$.
   (b) Zij $Y_n = \frac{X_n}{\sigma_n}$, en $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$. Laat zien dat voor alle $t \in \mathbb{R}$,
   $$\lim_{n\to\infty} \phi_{\frac{S_n}{n}}(t) = 1,$$
   waarbij $\phi_{\frac{S_n}{n}}$ de karakteristieke functie van $\frac{S_n}{n}$ is.
   (c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq 0)$.

4. Laat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ onafhankelijke, identiek verdeelde stochasten zijn, met $E(X_i) = 0$ en $\sigma^2(X_i) = 1$. Zij
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{en} \quad L_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2, \qquad \text{voor } n \geq 1.$$
Laat zien dat
   (a) $\frac{L_n}{n} \Rightarrow 1$, d.w.z.,
   $$\lim_{n\to\infty} P(\frac{L_n}{n} \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1, \\ 1 & \text{als } x > 1. \end{cases}$$
   (b) $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N$, waar N standaard verdeeld is.
   (c) $\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq 0) = \frac{1}{2}$.