Uitwerkingen extra opgaven stochastiek B

Opgave 1 Stel dat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke, uniform op $(0,1)$ verdeelde stochasten zijn. Laat verder X ook een uniform verdeelde stochast op $(0,1)$ zijn, onafhankelijk van $X_1, \ldots, X_n$. Definieer Y door:

$$Y = \min_{1 \le i \le n} X_i.$$

(a) Bepaal de verdelingsfunctie van Y.
(b) Bepaal $P(Y > X)$.

Uitwerking (a) Schrijf $F_Y(y) = P(Y \le y)$. Voor $y < 0$ geldt dat $F_Y(y) = 0$ en voor $y > 1$ dat $F_Y(y) = 1$. Voor $y \in [0,1]$ vinden we dat:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\min_{1 \le i \le n} X_i \le y) = 1 - P(\min_{1 \le i \le n} X_i > y) \\ &= 1 - P(X_1 > y, \ldots, X_n > y) = 1 - (1-y)^n, \end{aligned}$$

wegens de onafhankelijkheid van de X_is.
(b) De dichtheid van Y wordt gegeven door $f_Y(y) = n(1-y)^{n-1}$, voor $x \in [0,1]$ en $f_Y(y) = 0$ anders. Omdat X en Y onafhankelijk zijn, wordt de gezamenlijke dichtheid van X en Y voor $x, y \in [0,1]$ gegeven door

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 1 \cdot n(1-y)^{n-1}$$

waarmee we berekenen dat

$$P(Y > X) = \int_0^1 \int_x^1 n(1-y)^{n-1}\, dy\, dx = \frac{1}{n+1}$$

(en dat had je al gedacht).

Opgave 2 Stel dat de gezamelijke dichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2} & \text{als } x \ge 1, y \ge 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.
(b) Laat zien dat $P(X \le Y) = \frac{1}{2}$.
(c) Bepaal de gezamelijke dichtheid van X en Y/X.
(d) Laat zien dat de dichtheid van Y/X gegeven wordt door

$$f_{Y/X}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } 0 < z < 1, \\ \frac{1}{2z^2} & \text{als } z \ge 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Uitwerking (a) Schrijf

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ als } x \geq 1.$$

Er volgt

$$f(x,y) = f(x)f(y)$$

De simultane dichtheid van X en Y is dus te schrijven als product van een functie van x en een functie van y. Daardoor zijn X en Y onafhankelijk. Doordat de twee functies hetzelfde zijn, zien wij dat X en Y gelijk verdeeld zijn.
(b) Er zijn twee manieren om dit te doen:
- X en Y hebben dezelfde verdeling en zijn onafhankelijk van elkaar. Dus volgt $P(X \leq Y) = P(Y \leq X)$ door symmetrie. X en Y zijn continu en daardoor zien we $P(X = Y) = 0$. Er volgt $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$
- We kunnen ook direct gaan rekenen, door de simultane dictheid over het gebied $\{x \leq y\}$ te integreren. Dit levert op,

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \int_{x=1}^{\infty} \int_{y=x}^{\infty} \frac{1}{x^2 y^2} \, dy \, dx \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

(c) Stel $U = X$ en $V = Y/X$. Andersom geschreven is dit $X = U$ en $Y = UV$ De Jacobian voor dit transformatie is

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = |u| = u.$$

De gezamelijke dichtheid van U en V is

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= |J| f_{X,Y}(u, uv) && (1) \\ &= u \frac{1}{u^2 (uv)^2} = \frac{1}{u^3 v^2} && (2) \end{aligned}$$

als $u \geq 1$ en $uv \geq 1$, oftwel $u \geq \min(1, 1/v)$ met $v > 0$.

(d) Om de dictheid van V te vinden moeten we U uit integreren van de gezamelijke dichtheid van U en V. We zien

$$f_V(v) = \int_{u=\min(1,1/v)}^{\infty} \frac{1}{u^3 v^2}$$

We beschouwen eerst het geval $v > 1$. Dan is

$$f_V(v) = \int_{u=1}^{\infty} \frac{1}{u^3 v^2} = \frac{1}{2v^2}.$$

De andere mogelijkheid is $0 < v < 1$. In dit geval hebben we

$$f_V(v) = \int_{u=1/v}^{\infty} \frac{1}{u^3 v^2} = \frac{1}{2}.$$

Als $v < 0$ is, geldt $f_V(v) = 0$.

Opgave 3 Stel dat Z een standaard normaal verdeelde stochast is, en laat $x \geq 0$ een vast gekozen getal zijn. Definieer de stochast X door

$$X = \begin{cases} Z & \text{als } Z > x, \\ \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Laat dan zien dat

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

(b) Laat zien dat

$$E(XZ) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + P(Z > x).$$

(c) Bepaal de verdelingsfunctie van X.

Uitwerking (a) Schrijf $X = Z\mathbf{1}_{\{Z>x\}}$. Dan

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Z\mathbf{1}_{\{Z>x\}}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z\mathbf{1}_{\{z>x\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

(b) Op dezelfde manier vinden we

$$\begin{aligned} E(XZ) &= E(ZZ\mathbf{1}_{\{Z>x\}}) \\ &= \int_{x}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} + P(Z > x). \end{aligned}$$

(c) Er geldt dat $P(X \leq y) = 0$ als $y < 0$, $P(X \leq y) = P(Z \leq x)$ als $0 \leq y < x$, en $P(X \leq y) = P(Z \leq y)$ als $y \geq x$.

Opgave 4 Laat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ onafhankelijke, gelijkverdeelde stochasten zijn, met verdelingsfunctie

$$F(x) = P(X_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1, \\ \\ 1 - x^{-\alpha} & \text{als } x \geq 1, \end{cases}$$

waar $\alpha > 0$.

Definieer for $n \geq 1$

$$M_n \;=\; \max_{1\leq i\leq n} X_i.$$

(a) Bepaal de verdelingsfunctie van M_n.

(b) Laat zien dat $n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n \Rightarrow Y$, waarbij Y een stochast is met verdelingsfunctie G gegeven door

$$G(x) \;=\; P(Y \leq x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$

Uitwerking (a) Omdat de X_i onafhankelijk en identiek verdeeld zijn, kunnen we nagaan dat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}(X_i \leq x, \text{voor alle } i = 1,\dots n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) \\ &= F(x)^n = \begin{cases} 0 & x < 1; \\ (1 - x^{-\alpha})^n & x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Aangezien $G(x)$ continu is op $\mathbb{R}$ (ga na dat inderdaad geldt $\lim_{x\downarrow} G(x) = 0$) moeten we laten zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(n^{-1/\alpha} M_n \leq x) = G(x) \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Voor $x \leq 0$ zien we onmiddellijk dat de limiet in de linkerzijde van (3) gelijk is aan 0, precies de waarde van G voor $x \leq 0$. Kies nu $x > 0$ willekeurig. Omdat $n^{1/\alpha} x > 1$ voor $n > x^{-\alpha}$ en $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = \exp(n)$ volgt dat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n \leq x) &= \mathbb{P}(M_n \leq x n^{\frac{1}{\alpha}}) \\ &= \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n}\right)^n \to \exp\{-x^{-\alpha}\} \end{aligned}$$

als $n \to \infty$.

Opgave 5 Laat $X_1, X_2, X_3, \dots$ onafhankelijke, identiek verdeelde stochasten zijn, met $E(X_i) = 0$ en $\sigma^2(X_i) = 1$. Zij

$$S_n \;=\; X_1 + \cdots + X_n \quad \text{en} \quad L_n \;=\; X_1^2 + \cdots + X_n^2, \qquad \text{voor } n \geq 1.$$

Laat zien dat

(a) $\frac{L_n}{n} \Rightarrow 1$, d.w.z.,

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{L_n}{n} \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1, \\ 1 & \text{als } x > 1. \end{cases}$$

(b) $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N$, waar N standaard normaal verdeeld is.

(c) $\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq 0) = \frac{1}{2}$.

Uitwerking (a) Merk op dat X_i^2 voor alle i onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met verwachting $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2(X_i) + \mathbb{E}[X_i]^2 = 1$. Ga na dat het gevraagde nu volgt uit de wet van de grote aantallen (Theorem 7.4.1).

(b) Merk op dat de X_i voor alle i onhankelijk en identiek verdeeld zijn met variantie 1 en verwachting 0. Het gevraagde volgt nu uit de centrale limietstelling (Theorem 7.5.1) (ga dit na).

(c) Omdat de verdelingsfunctie van een standaard-normaal verdeelde stochast continu is op de gehele rechte en een symmetrische dichtheid heeft, volgt uit (b) dat

$$\mathbb{P}(S_n \leq 0) = \mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \leq 0) \to \mathbb{P}(N \leq 0) = 1/2$$

als $n \to \infty$.