Jordan Kromme stelling

(Methode van Eilenberg)

Rein Janssen Groesbeek, Jeroen Knulst, Antonie de Potter en Lucas Smits

Juni 2019

1 Introductie

Dit is een opzichzelfstaande tekst over de Jordan kromme stelling in het vlak. De Jordan kromme stelling zegt onder meer dat een topologische embedding van de eenheidscirkel in het vlak, het vlak in precies twee componenten opdeelt. De stelling vindt onder andere een toepassing in het bewijs van de stelling van Poincaré-Bendixson.

De onderstaande tekst volgt Dieudonnés Foundations of mathmatics en maakt gebruik van de stelling van Janiszewski. In tegenstelling tot Dieudonné hebben we geprobeerd de bewijzen geometrisch inzichtelijk te maken door hier en daar de tekst te ondersteunen met afbeeldingen.

Er bestaan hoger dimensionale analogieën van de stelling. Het bewijs hiervan maakt gebruik van methoden uit de algebraïsche topologie.[1]

2 Eenvoudige bogen en eenvoudig gesloten kromme

Definitie 1. Zij $\gamma : I \to \mathbb{C}$ een pad, waarbij we voortaan noteren $I := [0,1]$. We noemen γ een *eenvoudige boog* indien γ injectief is. We noemen γ een *eenvoudige lus* dan en slechts dan als $\gamma(0) = \gamma(1)$ en $\gamma : I/(0 \sim 1) \to \mathbb{C}$ injectief. Met andere worden is een eenvoudige lus niks anders dan een inbedding $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, oftewel een homeomorfisme op het beeld van γ. Een deelverzameling van $\mathbb{C}$ noemen we een *eenvoudig gesloten kromme* indien het het beeld van een eenvoudig gesloten lus is.

Lemma 2. *Het complement van een eenvoudige boog in $\mathbb{C}$ is samenhangend.*

Bewijs. Zij $\gamma : I \to \mathbb{C}$ een eenvoudige boog. Aangezien I compact is en $\mathbb{C}$ Haussdorf is γ een homeomorfisme naar zijn beeld en dus heeft γ een continue inverse $f : \gamma(I) \to I$. Zij $a, b \in \mathbb{C} - \gamma(I)$ verschillend. Zij $s_{a,b} : \mathbb{C} - \{b\}$ de Mobius-transformatie gegeven door

$$s_{a,b}(z) := \frac{z-a}{z-b}. \tag{1}$$

[1] Deze hele voordracht is gebaseerd op Dieudonné, J. A. E (1960). Foundations of Modern Analysis, Academic Press.

Zij $g : \mathbb{C} - \{b\} \to \mathbb{S}^1$ nu de functie gedefinieerd door: $g(z) := s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$. Zij φ de restrictie van g op $\gamma(I)$. Wegens de stelling van Janiszewski (zie appendix St. 12) is het voldoende om aan te tonen dat de afbeelding φ inessentieel (appendix Def. 9) is. Merk hiertoe op dat $\varphi = \varphi \circ \gamma \circ f$. De afbeelding $\varphi \circ \gamma$ is inessentieel en dus is ook φ inessentieel. $\square$

Stelling 3 (Stelling van Jordan)**.** *Zij $\gamma : I \to \mathbb{C}$ een eenvoudige lus met $H := \gamma(I)$ een eenvoudig gesloten kromme in $\mathbb{C}$. Dan:*

a) $\mathbb{C} - H$ heeft precies twee componenten, waarvan één begrensd is en de ander onbegrensd.

b) De rand van elke component is H.

c) Indien $\gamma : I \to \mathbb{C}$ een eenvoudige lus is zodanig dat $H = \gamma(I)$, dan Ind$_\gamma(x) = \pm 1$ indien x een element van de begrensde component is en Ind$_\gamma(x) = 0$ indien x een element van de onbegrensde component is.

Bewijs. We bewijzen eerst (b). Zij A een component van $\mathbb{C} - H$. Zij $\{B_i | i \in I\}$ de verzameling van alle componenten van $\mathbb{C} - H$ zonder A. We merken op dat $A \cup H = \mathbb{C} - \bigcup B_i$ gesloten is. Aangezien A open is volgt dat de rand $\partial A \subset H$.

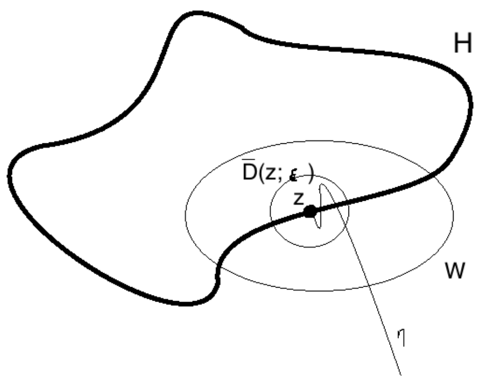
Zij $z \in H$. We zullen laten zien dat er een rijtje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ is zodanig dat $a_n \to z$ als $n \to \infty$. Zij W een willekeurige omgeving van z. Dan is er een $\epsilon > 0$ zodat $\bar{D}(z, \epsilon) \subset W$. Maar dan geldt ook dat $B_n := \bar{D}(z, \frac{\epsilon}{n}) \subset W$, voor alle $n \in \mathbb{N}$. Nu is er een $\theta \in I$ zodat $\gamma(\theta) = z$ en, aangezien γ continu is, een $\delta_n > 0$ zodanig dat $J_n = \gamma(]\theta - \delta_n, \theta + \delta_n[) \subset B_n$. Het complement L_n van J in H is compact, aangezien het het beeld is van een compacte verzameling. Nu is $L = H - J_n$ een eenvoudige kromme en dus is $\mathbb{C} - L_n$ samenhangend. Zij $w \in A$. Dan is er een pad $\eta_n : I \to \mathbb{C} - L_n$ van w naar z. Zij $t_n = \inf\{t \in I | \eta(t) \in \bar{J}\}$. Dan geldt, wegens continuiteit van η_n, dat $\eta_n(t) \in A$, voor alle $t \in [0, t_n[$. Door opnieuw een beroep te doen op de continuiteit van η_n volgt dat er een $r > 0$ zodanig dat $\eta_n(]t_n - r, t_n[) \subset B_n$. Nu kiezen we $a_n \in \eta_n(]t_n - r, t_n[)$. Nu hebben we dus een rijtje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, zoals gewenst. uit de constructie van $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ volgt nu meteen dat $a_n \to z$ als $n \to \infty$.

Hiermee is onderdeel b) van Stelling 3 bewezen. Onderdelen a) en c) bewijzen we in sectie 2.1 en sectie 2.2.

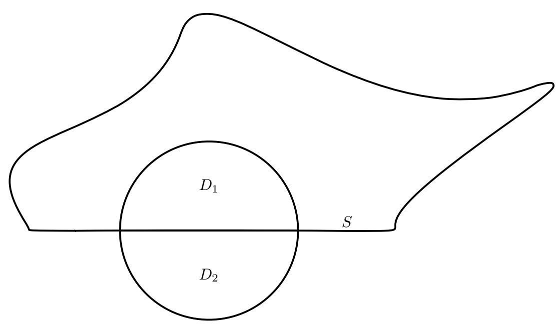
2.1 H bevat een segment

We bewijzen nu (a) en (c) onder de extra aanname dat H een lineair segment S bevat. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we, na eventuele rotaties en translaties, aannemen dat $S = [-a, a]$. Zij $\rho = d(0, H - S)$. Merk op dat $0 < \rho \leq a$. Zij $0 < r < \rho$. Dan is $D = D(0, r) \subset \mathbb{C} - (H - S)$.

Zij $D_1 = \{z \in D \mid \text{Im}(z) > 0\}$ en $D_2 = \{z \in D \mid \text{Im}(z) < 0\}$. Merk nu op dat $D \cap (\mathbb{C} - H) = D \cap (\mathbb{C} - S) = D_1 \cup D_2$. Merk op dat D_1 en D_2 beide samenhangend zijn. Anderzijds volgt uit het bewijs van deel (b) dat iedere component van $\mathbb{C} - H$ een punt in D heeft. Hieruit volgt dat $\mathbb{C} - H$ ten hoogste twee componenten heeft.



Figuur 1: Illustratie van definities van de verzamelingen in het bewijs van deel a) van de Jordan kromme stelling.



Figuur 2: definitie van de schijven

We bewijzen vervolgens dat $\mathbb{C} - H$ niet samenhangend is. We geven een bewijs uit het ongerijmde. Veronderstel dat $\mathbb{C} - H$ wel samenhangend is. Zij $x \in D_1 \subset D$ en $y \in D_2 \subset D$.

Dan $x, y \in \mathbb{C} - H$, dus omdat $\mathbb{C} - H$ samenhangend is, worden x en y niet gescheiden door H.

Aangezien D samenhangend is, geldt voor elke compacte deelverzameling $K \subset \mathbb{C}$ die $H \cup D$ bevat, dat x en y niet gescheiden worden door $K - D$.

De doorsnede $H \cap (K - D) = H -]-r, r[$ is een eenvoudig gesloten kromme waar een open segment volledig bevat in H is weggelaten, dus samenhangend.

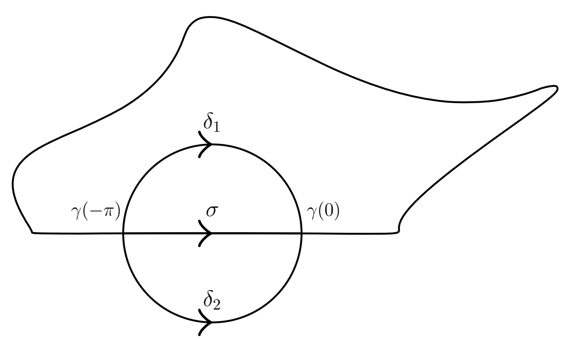
We kunnen dus de stelling van Janiszewski (stelling 12) toepassen op de compacta H en $K - D$, hieruit volgt dat x en y niet gescheiden worden door $H \cup (K - D)$, voor alle compacte deelverazmelingen $K \subset \mathbb{C}$, die $H \cup D$ bevatten. Dan worden x en y ook niet gescheiden door $H \cup (\mathbb{C} - D)$. Dit betekent dat x en y in dezelfde samenhangscomponent van $\mathbb{C} - (H \cup (\mathbb{C} - D)) = D_1 \cup D_2$ zitten, maar dit is absurd, aangezien $D_1 \cup D_2$ niet samenhangend is. We hebben dus bewezen dat $\mathbb{C} - H$

onsamenhangend is, dus heeft $\mathbb{C} - H$ ten minste 2 samenhangscomponenten. Het volgt dus dat $\mathbb{C} - H$ precies twee samenhangscomponenten heeft.

Nu aangezien H compact is, is er een gesloten schijf $\bar{D}(0; R)$ die H volledig bevat. We weten dat $\mathbb{C} - \bar{D}(0; R)$ samenhangend is en dus in een component A van $\mathbb{C} - H$ bevat is. Dus is A onbegrensd en is de andere component bevat in $\bar{D}(0; R)$ en dus begrensd.
Hiermee is het bewijs van onderdeel (a) voltooid, we bewijzen nu onderdeel (c).

We merken op dat $\mathrm{Ind}_\gamma(x)$ continu is in x op $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ en in het bijzonder op elke component. Bovendien geldt dat $\mathrm{Ind}_\gamma(x) \in \mathbb{Z}$, en dus constant is op elk component. Voor punten ver weg van γ, dus in de onbegrensde component geldt $\mathrm{Ind}_\gamma = 0$. Te bewijzen is $\mathrm{Ind}_\gamma(x_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(x_2) = \pm 1$ voor $x_1 \in D_1$ en $x_2 \in D_2$. We parametriseren γ zodanig dat $\gamma : [-\pi, \omega] \to \mathbb{C}$ voor een willekeurige $\omega > 0$ met $\gamma(-\pi) = -r$ en $\gamma(0) = r$. Wegens lemma 6 in de appendix kunnen we voor het integreren zonder verlies van algemeenheid aannemen dat γ stuksgewijs linear is. We definiëren de volgende paden:

$$\sigma, \delta_1, \delta_2 : [-\pi, 0] \to \mathbb{C}$$
$$\sigma(t) = \gamma(t)$$
$$\delta_1(t) = re^{-it}$$
$$\delta_2(t) = re^{it}$$



Figuur 3: definitie van de paden

Definieer $x_1 = i\xi \in D_1$ en $x_2 = -i\xi \in D_2$ met $0 < \xi < \frac{r}{2}$. Met de integraalformule van Cauchy berekenen we dat

$$\int_{\sigma - \delta_2} \frac{dz}{z - x_1} = 0,$$

$$\int_{\sigma} \frac{dz}{z - x_1} = \int_{\delta_2} \frac{dz}{z - x_1}.$$

Op dezelfde manier volgt

$$\int_\sigma \frac{dz}{z - x_2} = \int_{\delta_1} \frac{dz}{z - x_2}.$$

We kunnen nu de index berekenen

$$\begin{aligned}
2\pi i(\mathrm{Ind}_\gamma(x_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(x_2)) &= \int_\gamma \frac{dz}{z - x_1} - \int_\gamma \frac{dz}{z - x_2} \\
= \int_\sigma \frac{dz}{z - x_1} - \int_\sigma \frac{dz}{z - x_2} &+ \int_0^\omega \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - i\xi} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) + i\xi} dt \\
= \int_{\delta_2} \frac{dz}{z - i\xi} - \int_{\delta_1} \frac{dz}{z + i\xi} &+ \int_0^\omega \frac{2i\xi\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \xi^2} dt.
\end{aligned}$$

Nu laten we ξ naar 0 gaan. Dan

$$\lim_{\xi \to 0} \left(\int_{\delta_2} \frac{dz}{z - i\xi} - \int_{\delta_1} \frac{dz}{z + i\xi} \right) = \int_{\delta_2 - \delta_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

We majoreren de laatste integraal. Merk op dat $|\gamma(t)| \geq r$ voor $t \in [0, \omega]$ en $0 < \xi < \frac{r}{2}$. Hieruit volgt dat

$$|\gamma(t)^2 + \xi^2| = |\gamma(t)^2 - (-\xi^2)| \geq |\gamma(t)|^2 - \xi^2 \geq \frac{3}{4} r^2$$

en dus

$$\left| \frac{2i\xi\gamma'(t)}{\gamma(t)^2 + \xi^2} \right| \leq \frac{8\xi|\gamma'(t)|}{3r^2}$$

en dit gaat naar 0 als ξ naar 0 gaat. We concluderen dat $\mathrm{Ind}_\gamma(x_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(x_2) = 1$

$\square$

2.2 H bevat geen segmenten

We bekijken nu het geval dat H geen segmenten bevat. De strategie is om te reduceren naar het geval van een segment bevattende kromme door de segmentloze kromme op te delen in twee segmentbevattende gesloten krommes G_1, G_2 door een segment ertussen te trekken, om vervolgens de stelling van Janiszewski meerdere malen toe te passen. Het bewijs kan verdeeld worden in vier stappen:

1. Bewijzen dat H opgedeeld kan worden in twee enkelvoudige krommes H_1, H_2, die uitgebreid kunnen worden tot twee segmentbevattende krommes G_1, G_2.
2. Bewijzen dat $\mathbb{C} - H$ hooguit twee samenhangende componenten bevat.
3. Bewijzen dat $\mathbb{C} - H$ niet samenhangend is
4. Bewijzen dat voor het enkelvoudige gesloten pad γ met als beeld H, punten in de begrensde component een index van ± 1 hebben, en punten in de onbegrensde component index 0.

Bewijs van 1. H is homeomorf aan S^1, dus als verzameling bevat H twee punten a, b met $a \neq b$. Noem S het segment tussen a en b, dus $S := \{at+(1-t)b \in \mathbb{C} \mid t \in [0,1]\}$. Door rotatie en translatie van de kromme H kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$ zodat $S = [a, b]$. Omdat H geen segment bevat, is $S \not\subset H$ dus is er een punt $x \in S \cap (\mathbb{C} - H)$. Definieer J als de samenhangende component van x in $S \cap (\mathbb{C} - H)$, dan is J open in $S \cap (\mathbb{C} - H)$. Verder geldt $S \cap (\mathbb{C} - H) = (a, b) \cap (\mathbb{C} - H)$, want $a, b \in H$.

We bewijzen eerst dat $S \cap (\mathbb{C} - H)$ open is in $\mathbb{R}$: We herschrijven $S \cap (\mathbb{C} - H) = [a, b] \cap (\mathbb{C} - H) = (a, b) \cap (\mathbb{C} - H) = (a, b) \cap (\mathbb{R} \cap (\mathbb{C} - H))$. Hierbij is $\mathbb{R} \cap (\mathbb{C} - H)$ gelijk aan de projectie $\pi_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} - H)$ van $\mathbb{C} - H$ naar de reëele lijn, en de standaard (metrische) topologie op $\mathbb{C}$ is equivalent aan de product-topologie op $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dus de projectie is een open afbeelding. Hieruit volgt dat $\mathbb{R} \cap (\mathbb{C} - H)$ open is in $\mathbb{R}$, en dus is $(a, b) \cap (\mathbb{C} - H) = S \cap (\mathbb{C} - H)$ open in $\mathbb{R}$.

Omdat J open is in een open deelverzameling van $\mathbb{R}$, is J zelf ook open in $\mathbb{R}$. Verder is J samenhangend, dit betekent dat J is een open interval (y, z), voor $y, z \in \mathbb{R}$ met $y < z$. Er volgt dat $y, z \in \overline{J} \subset S$ en als y, z in $\mathbb{C} - H$ zouden zitten, dan zou J uitgebreid kunnen worden met $y, z \in S \cap (\mathbb{C} - H)$ wat in tegenspraak is met de maximaliteit van een samenhangscomponent. Dus moet gelden dat $y, z \in H$, waarbij het mogelijk is dat $y = a$ of $z = b$.

Zij $f : S^1 \to H$ een homeomorfisme tussen H en S^1. We hebben $y \neq z$ dus $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(z)$, dus we kunnen schrijven $f^{-1}(y) = \exp(ic)$, $f^{-1}(z) = \exp(id)$ voor bepaalde $c < d < c + 2\pi$. Definieer $g : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto \exp(it)$. Definieer nu $\gamma_1 : [c, c + 2\pi] \to \mathbb{C}$ als

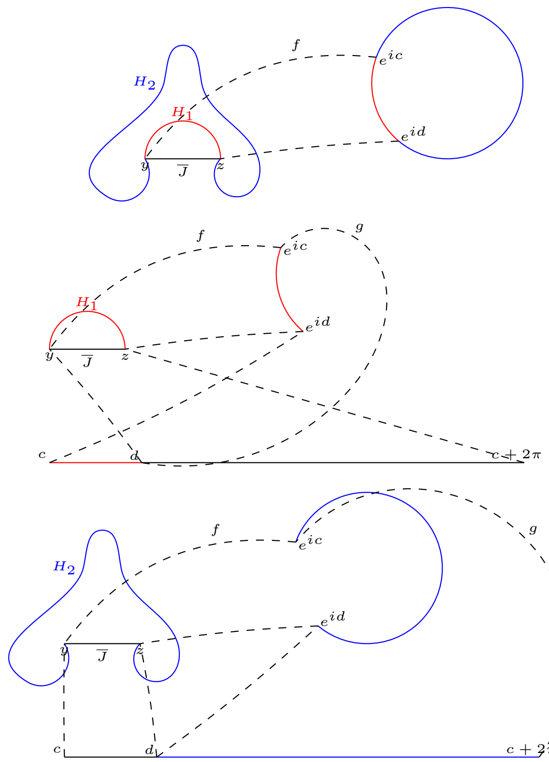
$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (f \circ g)(t) & t \in [c, d] \\ \frac{c+2\pi-t}{c+2\pi-d} z + \frac{t-d}{c+2\pi-d} y & t \in [d, c + 2\pi] \end{cases} \tag{2}$$

We controleren dat γ_1 op d goed is gedefinieerd: $f(g(d)) = z = \frac{c+2\pi-d}{c+2\pi-d} z + 0$, dus γ_1 is ook continu op d. Verder is γ_1 continu op $(c, d) \cup (d, c + 2\pi)$ dus γ_1 is continu op $(c, c + 2\pi)$. Daarnaast is γ_1 injectief op $(c, c + 2\pi)$ door enkelvoudigheid van H. En $\gamma_1(c) = f(g(c)) = y = 0 + \frac{c+2\pi-d}{c+2\pi-d} y = \gamma_1(c + 2\pi)$ dus γ_1 is ook continu op c en $c + 2\pi$ dus γ_1 is een enkelvoudige gesloten kromme. Op dezelfde manier is de afbeelding $\gamma_2 : [c, c + 2\pi] \to \mathbb{C}$ gedefineerd als

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \frac{d-t}{d-c} y + \frac{t-c}{d-c} z & t \in [c, d] \\ (f \circ g)(t) & t \in [d, c + 2\pi] \end{cases} \tag{3}$$

een enkelvoudige gesloten kromme. We zien nu dat als we definieren $H_1 := \gamma_1([c, d])$, $H_2 := \gamma_2([d, c+2\pi])$, dan zijn H_1 en H_2 enkelvoudige, simpele krommes en $\gamma_1((d, c+2\pi)) = J = \gamma_2((c, d))$. Tenslotte definieren we $G_1 := \gamma_1([c, c + 2\pi])$ en $G_2 := \gamma_2([c, c + 2\pi])$. Figuur 4 illustreert de gedefinieerde afbeeldingen. $\square$

Bewijs van 2. Neem een punt $w \in H_1$ met w ongelijk aan de eindpunten, dus $w \neq y, z$. Dan hebben we dat $w \in \mathbb{C} - G_2$ en G_2 is het beeld van een compact onder γ_2 dus gesloten, dus er bestaat een $r > 0$ zodat $D(w, r) \subset \mathbb{C} - G_2$, noem $D := D(w, r)$.



Figuur 4: Illustratie van de afbeeldingen f, γ_1 en γ_2.

Het bewijs volgt uit het volgende cruciale lemma, dat geeft dat op D de samenhangscomponenten van $\mathbb{C} - G_1$ bevat zitten in de samenhangscomponenten van $\mathbb{C} - H$, dus $\mathbb{C} - H$ kan op D niet meer samenhangscomponenten hebben dan $\mathbb{C} - G_1$:

Lemma 4. *Als $w_1, w_2 \in D \cap (\mathbb{C} - G_1)$ en w_1, w_2 zitten in dezelfde samenhangscomponent van $\mathbb{C} - G_1$, dan zitten w_1, w_2 in dezelfde samenhangscomponent van $\mathbb{C} - H$.*

We kunnen dit lemma combineren met onderdeel (b) van Stelling 3, om het resultaat op D uit te breiden tot heel $\mathbb{C}$. Samen met het resultaat van onderdeel (a) van Stelling 3 voor de kromme G_1 krijgen we dan een bovengrens op het aantal samenhangscomponenten van $\mathbb{C} - H$.

Dit werken we stapsgewijs uit als volgt:

i. We hebben $w \in H$ en door onderdeel (b) van Stelling 3 (die we al eerder bewezen hebben) toe te passen op de kromme H, volgt dat w een limietpunt is van elke samenhangscomponent van $\mathbb{C} - H$. Dus D bevat punten van elke samenhangscomponent van $\mathbb{C} - H$.

ii. Onderdeel (a) van Stelling 3 is bewezen voor G_1 omdat G_1 een segment bevat, dus $\mathbb{C} - G_1$ heeft precies twee samenhangscomponenten, dus $D \cap (\mathbb{C} - G_1)$ kan punten bevatten uit hooguit twee samenhangscomponenten van $\mathbb{C} - G_1$.

iii. We bewijzen uit tegenspraak: stel dat $\mathbb{C} - H$ minstens drie samenhangscomponenten zou hebben, dan bevat $D \cap (\mathbb{C} - H)$ wegens uitspraak (i) drie punten $v_1, v_2, v_3 \in D \cap (\mathbb{C} - H)$ die elk in een verschillende samenhangscomponent van $\mathbb{C} - H$ zitten. Nu volgt uit de contrapositie van Lemma 4 dat v_1, v_2, v_3 elk in een verschillende samenhangscomponent van $\mathbb{C} - G_1$ zitten, oftewel $\mathbb{C} - G_1$ heeft minstens drie samenhangscomponenten.

Dit is in tegenspraak met uitspraak (ii), waar we bewezen hadden dat $\mathbb{C} - G_1$ precies twee samenhangscomponenten heeft.

Uit tegenspraak volgt dat $\mathbb{C} - H$ hooguit twee samenhangscomponenten heeft.

We bewijzen nu Lemma 4: zij $w_1, w_2 \in D \cap (\mathbb{C} - G_1)$ met w_1,w_2 in dezelfde samenhangscomponent van $\mathbb{C} - G_1$. Dan zijn w_1, w_2 niet gescheiden door G_1. Ook zijn w_1, w_2 niet gescheiden door G_2 omdat $D \subset (\mathbb{C} - G_2)$ en D is samenhangend, dus D zit bevat in twee samenhangscomponenten van $\mathbb{C} - G_2$. Verder zijn $G_1 = \gamma_1([c, c + 2\pi]), G_2 = \gamma_2([c, c + 2\pi])$ compact omdat $[c, c + 2\pi]$ compact is en γ_i continu, en $G_1 \cap G_2 = \overline{J}$ is een interval dus samenhangend, dus de stelling van Janiszewski geeft dat w_1 en w_2 niet gescheiden zijn door $G_1 \cup G_2$. We hebben dat $H \subset G_1 \cup G_2$ dus $\mathbb{C} - (G_1 \cup G_2) \subset \mathbb{C} - H$ en w_1, w_2 zitten in dezelfde samenhangende component van $\mathbb{C} - (G_1 \cup G_2)$ dus ze zitten in dezelfde samenhangende component van $\mathbb{C} - H$, oftwel ze zijn niet gescheiden door H. □

Bewijs van 3. Uit het bewijs van het vorige onderdeel (onderdeel 2 van sectie 2.1) weten we dat er $v_1, v_2 \in D \cap (\mathbb{C} - G_1)$ bestaan die niet in dezelfde component van $\mathbb{C} - G_1$ zitten, dus ze zijn gescheiden door G_1. We bewijzen uit het ongerijmde. Stel dat v_1 en v_2 niet gescheiden zijn door H. We weten dat v_1, v_2 niet gescheiden zijn door G_2 doordat $v_1, v_2 \in D \subset \mathbb{C} - G_2$, verder zijn G_2 en H compact en $H \cap G_2 = H_2$ is samenhangend dus Janiszewski geeft dat v_1, v_2 niet gescheiden zijn door $G_2 \cup H$. Dus $G_1 \subset G_2 \cup H$ zou v_1, v_2 niet scheiden, maar dit is in tegenspraak met de definitie van v_1, v_2. Dus v_1, v_2 zijn wel gescheiden door H oftewel H is niet samenhangend. □

Bewijs van 4. We hebben bewezen dat $\mathbb{C} - H$ twee samenhangscomponenten heeft, door hetzelfde argument als voorheen met open bollen rond 0 die H bevatten, wordt aangetoond dat een van de samenhangscomponenten (noem A) onbegrensd is en de andere (noem B) begrensd. Zij $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ een enkelvoudig gesloten kromme met $\gamma([\alpha, \beta]) = H$. Door een translatie plus een schaling uit te voeren kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $\alpha = c$ en $\beta = c + 2\pi$ waarbij $c \in \mathbb{R}$ was gedefinieerd in Bewijs 1.

Voor $x \notin G_1 \cup G_2$ zien we dat $\mathrm{Ind}_\gamma(x) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(x) + \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(x)$ omdat de integralen over $\overline{J}$ in γ_1 en γ_2 sommeren tot 0 omdat ze in tegengestelde richting gaan, dus slechts de integralen over H_1 en H_2 blijven over, waarbij $H_1 \cup H_2 = H$ en $H_1 \cap H_2 = \{y, z\}$ bestaat uit twee punten dus is verwaarloosbaar voor de integraal.

Volgens hetzelfde argument als voorheen is het voldoende om $\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_2)$ te bepalen voor $z_1, z_2 \in D \cap (\mathbb{C} - H)$ waarbij z_1 en z_2 in twee verschillende componenten van $\mathbb{C} - H$ zitten. Hieruit volgt dat z_1 en z_2 in een verschillende component van $\mathbb{C} - G_1$ zitten en in dezelfde component van $\mathbb{C} - G_2$. We hebben

$z_1, z_2 \notin H$ en $z_1, z_2 \notin G_2$ dus $z_1, z_2 \notin G_1 \cup G_2$ dus $\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2) + \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_2) - \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_2)$.

We hebben onderdeel (c) van Stelling 3 bewezen voor de segment-bevattende kromme G_1, dus omdat z_1, z_2 gescheiden zijn door G_1, volgt dat $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2) = \pm 1$.

We kunnen onderdeel (c) van Stelling 3 ook toepassen op de segment-bevattende kromme G_2, dus omdat z_1, z_2 niet gescheiden zijn door G_2, volgt dat $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z_2) = 0$.

Dus $\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = \pm 1$. □

3 Appendix

3.1 Een aantal topologische resultaten

Definitie 5. Zij X een topologische ruimte en Y een metrische ruimte. Zij $f : X \to Y$ een functie. Dan definieren we de oscillatie van f in X als

$$\mathrm{diam} f(X)$$

Lemma 6. *Zij $A \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling en zij $\gamma : I \to A$ een pad. Dan is er een pad homotopie $H : I \times I \to A$ zodat $t \mapsto H(1, t)$ een stuksgewijs lineair pad is.*

Bewijs. Aangezien $\gamma(I)$ compact en $\mathbb{R}^n - A$ gesloten is, is $\rho := d(\gamma(I), \mathbb{R}^n - A) > 0$. Aangezien γ uniform continu is, is er een strikt stijged rijtje $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$ zodat $\sup_{x,y \in [t_k, t_{k+1}]} |\gamma(x) - \gamma(y)| < \rho$, oftewel de oscillatie van γ, beperkt op een interval $[t_k, t_{k+1}]$, is kleiner dan ρ. Definieer nu $\eta : I \to \mathbb{R}^n$, op $t_k \le t \le t_{k+1}$, als

$$\eta(t) := \gamma(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} + t_k}(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k))$$

Het is duidelijk dat η continu en stuksgewijs lineair is. Aangezien de bal $B(\gamma(t_k); \rho) \subset A$ en $\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})\| < \rho$ (waarbij $\| \cdot \|$ de Euclidische norm op $\mathbb{R}^n$ is), volgt, uit de convexiteit van $B(\gamma(t_k); \rho)$, dat $\eta(I) \subset A$.

Definieer $H : I \times I \to A$ door

$$H(s, t) := s\eta(t) + (1 - s)\gamma(t)$$

Voor $t_k \le t \le t_{k+1}$ hebben we dat $\eta(t), \gamma(t) \in B(\gamma(t_k); \rho)$ en dus $H(s, t) \in B(\gamma(t_k); \rho)$. We concluderen dat H een pad homotopie van γ naar η is. □

De volgende stelling wordt gebruikt in het bewijs van het Eisenberg criterium.

Stelling 7 (Tietze-Urysohn extensie stelling)**.** *Zij E een metrische ruimte, $A \subset E$ een gesloten deelverzameling en $f : A \to \mathbb{R}$ een continue en begrensde afbeelding. Dan bestaat er een continue afbeelding $g : E \to \mathbb{R}$ die op A overeenkomt met f en waarvoor geldt dat*

$$\sup_{x \in E} g(x) = \sup_{x \in A} f(x) \qquad \textit{en} \qquad \inf_{x \in E} g(x) = \inf_{x \in A} f(x)$$

Bewijs. Zij $a = \inf_{y \in A} f(y)$ en $b = \sup_{y \in A} f(y)$. Na een eventuele translatie kunnen we aannemen dat $a = 1$ en $b = 2$. Definieer $g : E \to \mathbb{R}$ door $g(x) := f(x)$ voor alle $x \in A$ en elders als

$$g(x) = \frac{\inf_{y \in A}(f(y)d(x,y)}{d(x,A)}$$

Merk op dat, voor alle $x \in E - A$ en alle $y \in A$ geldt:

$$f(y) \leq \frac{f(y)d(x,y)}{d(x,A)} \leq \frac{2d(x,y)}{d(x,A)}$$

Hieruit volgt dat $1 \leq g(x) \leq 2$, voor alle $x \in E$. En dus $\inf_{x \in E} g(x) = 1$ en $\sup_{x \in E} g(x) = 2$. We dienen nu alleen nog te bewijzen dat g continu is. Uit de aanname op f volgt dat g continu is op het inwendige van A. Op de open verzameling $E - A$ kunnen we g schrijven als $g(x) = h(x)/d(x,A)$, met $h(x) = \inf_{y \in A}(f(y)d(x,y))$. Om te zien dat g continu is op $E - A$ merken we als eerste op dat de functie $x \mapsto d(x,A)$ van $E - A$ naar $\mathbb{R}$ continu en overal ongelijk aan nul is. Het is dus voldoende te bewijzen dat h continu is op $E - A$. Zij $r = d(x,A)$. Zij $0 < \epsilon < r$. Voor $x' \in E - A$ zodanig dat $d(x,x') < \epsilon$ hebben we dat $d(x,y) < d(x',y) + \epsilon$. en dus $h(x) \leq h(x') + b\epsilon$. En op soortgelijke manier volgt ook dat $h(x') \leq h(x) + 2\epsilon$, waaruit de continuiteit volgt. Als laatste dienen we nog aan te tonen dat g continu is op ∂A. Laat $x \in \partial A$. Zij $\epsilon > 0$ gegeven en zij $r > 0$ zo dat voor alle $y \in A \cap B(x;r) = C$, geldt dat$|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Zij $D := A - C$. Als $x' \in E - A$ en $d(x,x') < r/4$, dan hebben we voor elke $y \in D$ dat $d(x',y) \geq d(x,y) - d(x,x') > 3r/4$ en dus

$$\inf_{y \in D}(f(y)d(y,x')) \geq \frac{3}{4}r$$

Anderzijds hebben we dat $f(x)d(x,x') \leq bd(x,x') < 2r/4$ en dus

$$\inf_{y \in A}(f(y)d(x',y)) = \inf_{y \in C}(f(y)d(x',y))$$

Maar $f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$, voor alle $y \in C$, en $\inf_{y \in C} d(x',y) = d(x',A)$. We vinden dus dat

$$(f(x) - \epsilon)d(x',A) \leq \inf_{y \in A}(f(y)d(x',y)) \leq (f(x) + \epsilon)d(x',A)$$

waaruit volgt dat $|g(x') - g(x)| \leq \epsilon$, voor alle $x' \in (E - A) \cap B(x;r/4)$. Uit onze aanname op r volgt ook dat voor alle $x' \in A \cap B(x;r/4)$, geldt dat $|g(x') - g(x)| = |f(x') - f(x)| \leq \epsilon$. Dit bewijst de continuiteit van g. $\square$

3.2 Essentiele en inessentiele functies en het criterium van Eilenberg

Het bewijs van de stelling van Jordan maakt op meerdere plekken gebruik van scheidingseigenschappen van deelverzamelingen in $\mathbb{C}$.

Definitie 8. Zij $A \subset \mathbb{C}$. We zeggen dat A de punten $x, y \in \mathbb{C} - A$ scheidt als de samenhangscomponenten van x en y in $\mathbb{C} - A$ verschillend zijn.

Definitie 9. Zij E een metrische ruimte. We zeggen dat een continue afbeelding $f : E \to \mathbb{S}^1$ inessentieel is dan en slechts dan als er een continue $g : E \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $f(x) = e^{ig(x)}$. We noemen f essentieel als f niet inessentieel is.

Het makkelijkste voorbeeld van een essentiele functie is de identiteit $\mathrm{id} : S^1 \to S^1$, dus $E = S^1$ met de metriek uit $\mathbb{R}^2$. Stel dat deze inessentieel zou zijn, dan bestaat er een $g : S^1 \to \mathbb{R}$ continu met $\exp(ig(x)) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan moet g injectief zijn door injectiviteit van de identiteit en doordat S^1 compact en samenhangend is, is het beeld van g een samenhangend compact, oftewel een interval $[a, b]$. Verder doordat $\mathbb{R}$ Hausdorff is, is g een topologische imbedding oftewel een homeomorfisme op zijn beeld. Maar uit de topologie weten we dat $[a, b]$ en S^1 niet homeomorf zijn, tegenspraak. Dus g kan niet bestaan.

Het volgende criterium geeft aan wanneer een compacte deelverzameling van $\mathbb{C}$ twee punten in het complement scheidt.

Stelling 10 (Criterium van Eilenberg)**.** *Zij H een compacte deelverzameling van $\mathbb{C}$, en zij $s_{a,b} : \mathbb{C} - \{b\}$ de Mobius-transformatie gegeven door*

$$s_{a,b}(z) := \frac{z - a}{z - b}. \tag{4}$$

Een voldoende en noodzakelijke conditie voor H om de punten $a, b \in \mathbb{C} - H$ te scheiden is dat de afbeelding $z \mapsto s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ beperkt tot H essentieel is.

Het bewijs maakt gebruik van het volgende lemma.

Lemma 11. *Zij E een compacte een metrische ruimte en $f : E \times I \to \mathbb{S}^1$ een continue afbeelding. Als de afbeelding $x \mapsto f(x, 0)$ essentieel (respectievelijk inessentieel) is, is de afbeelding $x \mapsto f(x, 1)$ dat ook.*

Bewijs. Het bewijs bestaat uit 2 beweringen.

Bewering 1 Een continue afbeelding g van een metrische ruimte E naar $\mathbb{S}^1$ met $g(E) \neq \mathbb{S}^1$ is inessentieel.

Zij $\zeta_0 \in \mathbb{S}^1 - g(E)$ en zij $\alpha \in]-\pi, \pi]$ zodat $\zeta_0 = e^{i\alpha}$ en de restrictie van $t \mapsto e^{it}$ tot $]\alpha, \alpha + 2\pi[$ een homeomorfisme naar $\mathbb{S}^1 - \{\zeta_0\} is$. Als ψ de inverse van het homeomorfimse is, zien we dat $g(x) = e^{i\psi(g(x))}$ en dus dat g inessentieel is. Hiermee hebben we de eerste bewering bewezen.

Stel nu dat f_1, f_2 continue afbeeldingen van een metrische ruimte E naar $\mathbb{S}^1$ zijn, zodat $f_1(x) \neq -f_2(x)$ voor alle $x \in E$ en veronderstel dat f_1 essentieel. Dan heeft de functie $g := f_1/f_2$ niet het punt -1 in het beeld en is dus inessentieel. Dan zien we dat $f_2 = f_1/g$ essentieel is.

Bewering 2 De afbeelding $x \mapsto f(x, 1)$ is essentieel (danwel inessentieel) als de afbeelding $x \mapsto f(x, 0)$ essentieel (danwel inessentieel) is.

Omdat $E \times I$ compact is, is f uniform continu op $E \times I$. Dan bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $|f(x,s) - f(x,t)| \leq 1$ voor alle $x \in E$ als $|s-t| \leq 1/n$. Met behulp van deze n definiëren we $f_k(x) := f(x, \frac{k}{n})$ voor $0 \leq k \leq n$. We zien dat $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq 1$ voor alle $x \in E$ en $k \leq n-1$. Hieruit halen we dat $f_k(x) \neq -f_{k+1}(x)$ als $|f_k(x)| = |f_{k+1}(x)| = 1$. Met behulp van bewering 1 concluderen we nu dat $x \mapsto f_1(x) = f(x,1)$ essentieel is. Dit bewijst de tweede bewering en dus Lemma 11. $\square$

Nu gaan we Stelling 10 (Criterium van Eilenberg) bewijzen.

Bewijs. We bewijzen eerst dat de conditie voldoende is. We bewijzen de contrapositie van de bewering. Stel dat a en b dezelfde samenhangscomponent $A \subset \mathbb{C} - H$ hebben. Doordat A open is in $\mathbb{C}$, bestaat er een pad $\gamma : I \to A$ met $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$. Omdat $\gamma(t) \notin H$ voor alle $t \in I$, is de afbeelding $(z,t) \mapsto f(z,t) = s_{a,\gamma(t)}(z)/|s_{a,\gamma(t)}(z)|$ continu op $H \times I$, met $f(z,0) = 1$ en $f(z,1) = s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$. Met behulp van Lemma 11 zien we dat $(z,1) \mapsto f(z,1)$ inessentieel is. Hiermee hebben we laten zien dat de conditie dat $z \mapsto s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ voor $z \in H$ essentieel is voldoende is om te concluderen dat H de punten $a, b \in \mathbb{C} - H$ scheidt.

Vervolgens gaan we de noodzakelijkheid aantonen. Zij A de samenhangscomponent van $\mathbb{C} - H$ die a bevat. Dan is A open en de rand van A is bevat in H (want als de rand van A niet bevat zou zitten in H dan zou de rand in een ander samenhangscomponent van $\mathbb{C} - H$ zitten en zou A punten gemeenschappelijk met een andere samenhangscomponent hebben). Omdat dan geldt $b \notin A \cup H$ merken we op dat $d(A \cup H, b) > 0$. Laat A' en H' de beelden zijn van A en H onder het homeomorfisme $f : \mathbb{C} \setminus \{b\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $z \mapsto f(z) = s_{a,b}(z)$. Dan geldt dat H' compact is door compactheid van H en continuiteit van f. En A' is samenhangend door samenhangendheid van A en continuiteit van f. Verder heeft A positieve afstand tot b en punten dichtbij b worden dichtbij oneindig gestuurd, dus A' heeft positieve afstand tot oneindig en is dus begrensd. Verder is $f(a) = 0$ dus $0 \in A'$. De randpunten van A' zijn dan bevat in $H' \cup \{1\}$, dus $\overline{A'}$ en $\overline{A'} \cup H'$ zijn compact.

Als $1 \in \overline{A'} \setminus A'$, dan is A in het bijzonder niet begrensd en heeft een niet disjuncte doorsnede met het complement van een bol die H bevat (want H is begrensd). Omdat dit complement samenhangend is, moet gelden dat deze bevat is in A. Dit toont aan dat er een bol V gecentreerd in 1 bestaat zodat $V - \{1\} \subset A'$ dus 1 is geen randpunt van $\mathbb{C} - A'$ en de rand van $\mathbb{C} - A'$ (dus $\overline{\mathbb{C} - A'} \setminus \mathbb{C} - A'$) is dus bevat in H'.

Het voldoet nu om te bewijzen dat de afbeelding $u \mapsto u/|u|$ voor $u \in H'$ essentieel is (immers, dan nemen we de samenstelling $u = f(z)$). We geven nu een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat de afbeelding $u \mapsto u/|u|$ inessentieel is en schrijf $u/|u| = e^{ig(u)}$ voor $u \in H'$. Met de stelling van Tietze-Urysohn bestaat er een extensie $G : \overline{A'} \cup H' \to \mathbb{R}$ zodat $G|_{H'} = g$. We definiëren nu een afbeelding $h : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^1$ door $h(u) = u/|u|$ voor $u \in \mathbb{C} - \overline{A'}$ en $h(u) = e^{iG(u)}$ voor $u \in \overline{A'}$. Merk op dat h continu is en welgedefinieerd omdat $0 \in A'$.

We kiezen nu $r > 0$ zodat $\overline{A'} \subset \overline{B}(0,r) =: B$, wat kan aangezien $\overline{A'}$ compact is. We gaan nu bewijzen dat $h|_B$ inessentieel is. We definiëren $p(x,t) = h(tx)$ voor $(x,t) \in B \times I$. Dan zien we dat $p(x,0) = h(0)$, en dus het beeld van $x \mapsto p(x,0)$ is ongelijk aan $\mathbb{S}^1$. Met bewering 1 uit lemma 9 is de afbeelding $x \mapsto p(x,0)$ inessentieel. Met lemma 9 concluderen we vervolgens ook dat de afbeelding $x \mapsto p(x,1) = h(x)$ inessentieel is, en dus $h|_B$ is inessentieel en dus ook de restrictie $h|_{\partial B}$.

We merken op dat de identiteit op $\mathbb{S}^1$ geschreven kan worden als de samenstelling $h_1 \circ g_1$ waarbij $h_1 : \partial B \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z/|z|$ en $g_1 : \mathbb{S}^1 \to \partial B, z \mapsto rz$. Dan $h_1 = h|_{\partial B}$ en is dus inessentieel. In het bijzonder is dus de identiteitsafbeelding op $\mathbb{S}^1$ inessentieel, maar dat is een tegenspraak aangezien deze afbeelding essentieel is. We concluderen dus dat de afbeelding $u \mapsto u/|u|$ voor $u \in H'$ essentieel moet zijn, en dus is de afbeelding $z \mapsto s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ essentieel, waarmee de noodzakelijkheid is aangetoond. Dit bewijst het criterium van Eilenberg. □

Ten slotte bewijzen we nog de stelling van Janiszewski die op meerdere plekken terugkomt in het bewijs van de stelling van Jordan om allerlei gebieden aan elkaar te plakken. Dit relatief simpele bewijs van Janiszewski (afkomstig uit [1]) berust op het criterium van Eilenberg.

Stelling 12 (Stelling van Janiszewksi)**.** *Zij A, B compacte deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ en $a \neq b \in \mathbb{C} - (A \cup B)$. Als zowel A als B a en b niet scheiden $A \cap B$ samenhangend is, dan scheidt $A \cup B$ ook a en b niet.*

Bewijs. Vanwege het criterium van Eilenberg volstaat het om te bewijzen dat $z \mapsto f(z) = s_{a,b}(z)/|s_{a,b}(z)|$ voor $z \in A \cup B$ inessentieel is. We weten uit het criterium van Eilenberg eveneens dat $z \mapsto f(z)$ inessentieel is voor $z \in A, z \in B$. Dus, we schrijven $f(z) = e^{ig(z)}$ voor $z \in A$ en $f(z) = e^{ih(z)}$ voor $z \in B$. Er moet dan gelden dat $e^{ig(z)} = e^{ih(z)}$ voor $z \in A \cap B$, dus $g(z) = h(z) + 2\pi n$ voor een bepaalde $n \in \mathbb{Z}$ en $z \in A \cap B$. In het bijzonder geldt dat de afbeelding $z \mapsto \frac{1}{2\pi}(g(z) - h(z)) \in \mathbb{Z}$ voor $z \in A \cap B$, en deze afbeelding is continu en moet derhalve constant zijn ($A \cap B$ is namelijk samenhangend en de enige samenhangende deelverzamelingen van $\mathbb{Z}$ zijn de eenpuntsverzamelingen). We definiëren nu $F : A \cup B \to \mathbb{R}$ door $F(z) = g(z)$ als $z \in A$ en $F(z) = h(z) + 2\pi n$ voor $z \in B$. We merken op dat F welgedefinieerd is omdat $g(z) = h(z) + 2\pi n$ voor $z \in A \cap B$ en bovendien zien we dat $f(z) = e^{iF(z)}$ voor $z \in A \cup B$, dus f is inessentieel voor $z \in A \cup B$. Met het criterium van Eilenberg concluderen we dat $A \cup B$ a en b niet scheidt. Dit bewijst de stelling van Janiszewski. □

Referenties

[1] J. Dieudonne, Foundations of Modern Analysis, Academic Press Inc. 1960