Functionaalanalyse

Heinz Hanßmann

Utrecht, 2008

Inhoudsopgave

1

Inleiding

Zie ook §§1.1 en 1.2 in [10], §§1.2 en 2.1 in [16], §§1.0, 1.1 en 1.2 in [15], §§2.1 en 3.1 in [9], §§5.1, 6.1 en 6.2 in [4] of §§1.2 en 1.3 in [13].

In eerstejaarsvakken ziet men dat de meetkundige intuïtie over vlak en ruimte ook in $\mathbb{R}^n$ bruikbaar is als men met de afstand

$$\mathrm{d}(x,y) \;=\; \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2} \tag{1.1}$$

werkt. Dit definieert een metriek (met alle gevolgen van dien, hierover meer in hoofdstuk 2) maar de voorbeelden

$$\mathrm{d}(x,y) \;:=\; |x_1-y_1| \;+\; |x_2-y_2|$$

van de Manhatten-metriek op $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ en van de discrete metriek

$$\mathrm{d}(x,y) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{als} \quad x=y \\ 1 & \phantom{\text{als}} \quad x\neq y \end{cases}$$

op elke verzameling laten zien dat algemene metrische ruimten te ... algemeen zijn. Wat willen we wél?

Definitie 1.1. Zij E een vectorruimte over $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$). Een functie $\|..\|:E\longrightarrow\mathbb{R}$ noemen we een norm op E als

- *(i)* $\|x\|\geq 0$ *voor alle* $x\in E$.
- *(ii)* $\|x\|=0$ *dan en slechts dan als* $x=0$.
- *(iii)* $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ *voor alle* $\lambda\in\mathbb{K}$ *en alle* $x\in E$.
- *(iv)* $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ *voor alle* $x,y\in E$.

We noemen E voorzien met een norm een genormeerde ruimte.

We zullen in de notatie zoveel mogelijk het reële en complexe geval tegelijk behandelen. Zo is bv. $C(V)$ de ruimte van continue functies op een metrische ruimte V terwijl $C(V,\mathbb{R})$ of $C(V,\mathbb{C})$ de gevallen van expliciet reële danwel complexe waarden aanduidt.

Stelling 1.2. Zij E een genormeerde ruimte. Dan definieert $\mathrm{d}(x,y) := \|x-y\|$ *een metriek op E.*

Bewijs. We hebben zeker $\mathrm{d}(x,y) \geq 0$ voor alle $x, y \in E$ en

$$\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y .$$

Verder is

$$\mathrm{d}(y,x) = \|y-x\| = \|-(x-y)\| = |-1|\,\|x-y\| = \|x-y\| = \mathrm{d}(x,y)$$

en

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x,z) &= \|x-z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y-z\| = \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z) \end{aligned}$$

voor alle $x, y, z \in E$. □

Dit zijn al keurige ruimten. Eigenschap (*iii*) is een gemakkelijke toets of een metriek op een vectorruimte d.m.v. $\|x\| := \mathrm{d}(x,0)$ een norm zou kunnen definiëren.

Voorbeeld 1.3. De ruimte

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$$

van continue functies op $\mathbb{R}^n$ die in het oneindige verdwijnen is een vectorruimte en de supremum-norm

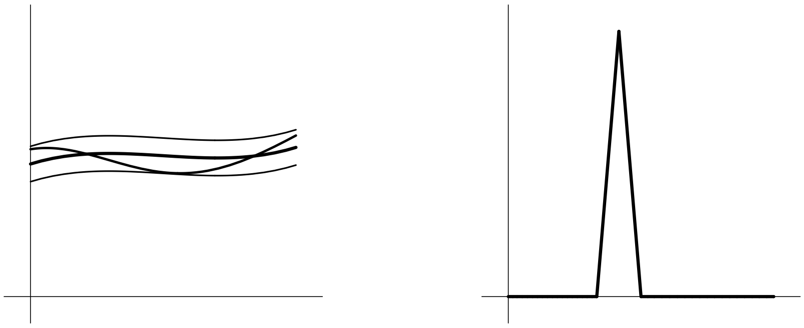
$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

is hierop een norm (oefening, gebruik dat de absolute waarde $|..|$ een norm op $\mathbb{K}$ is). Wat betekent het als $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = g$ t.o.v. deze norm/metriek? Een gevolg van

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \; \bigvee_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}} \; \bigwedge_{n\geq n_\varepsilon} \; \bigwedge_{x\in\mathbb{R}^n} \; |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \tag{1.2}$$

is zeker $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$, de functie-rij f_n convergeert puntsgewijs naar g. De positie in (1.2) van de 'voor alle' kwantor voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ betekent dat de keuze van $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ in de 'er is' kwantor voor gegeven $\varepsilon > 0$ uniform in x werkt, men spreekt daarom ook van *uniforme convergentie*. Twee functies zijn ε–dicht bij elkaar in deze norm als de grafiek van de één binnen een gebied van straal ε rond de grafiek van de ander blijft (en andersom), zie figuur 1.1.a voor een schets. △

Voorbeeld 1.4. Op $C[0,1]$ kunnen we naast de supremum-norm ook



Figuur 1.1. a. De functie $g \in C([0,1], \mathbb{R})$ ligt volledig in een ε–omgeving van f. **1.1.b.** De rij van functies f_m convergeert t.o.v. $\|..\|_1$ maar niet uniform naar nul.

$$\|f\|_1 \;:=\; \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

beschouwen (oefening: ook dit is een norm op $C[0,1]$). Vanwege

$$\|f\|_1 \;\le\; \int_0^1 \sup_{s\in[0,1]} |f(s)|\,\mathrm{d}t \;=\; \|f\|_\infty$$

is elke uniform convergente rij ook t.o.v. $\|..\|_1$ convergent. Maar niet omgekeerd, de rij van functies (schrijf $m = \frac{1}{2}n(n-1)+k$ met $k \in \{1,\ldots,n\}$)

$$f_m(t) \;:=\; \begin{cases} 0 & & 0 \le t \le \frac{k-1}{n} \\ 2nt - 2k + 2 & & \frac{k-1}{n} \le t \le \frac{2k-1}{2n} \\ & \text{als} & \\ 2k - 2nt & & \frac{2k-1}{2n} \le t \le \frac{k}{n} \\ 0 & & \frac{k}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

uit figuur 1.1.b convergeert niet eens puntsgewijs naar $g(t) \equiv 0$. $\triangle$

De convergente rijtjes blijven dezelfden als we twee normen in beide richtingen door elkaar kunnen afschatten

Definitie 1.5. Twee normen $\|..\|$ *en* $|||..|||$ *op een vectorruimte* E *zijn equivalent als er reële getallen* $m, M > 0$ *bestaan met*

$$\bigwedge_{x\in E} \quad m\,\|x\| \;\le\; |||x||| \;\le\; M\,\|x\| \;.$$

Twee equivalente normen definiëren dezelfde topologie (en andersom!).

Voorbeeld 1.6. Een heele familie van genormeerde ruimten zijn de 'klein-ell-pé' ruimten

$$\ell^p \;:=\; \left\{ a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \|a\|_p < \infty \right\}$$

voor $p \in [1,\infty]$ met

$$\|a\|_p \;:=\; \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

voor $p < \infty$ en

$$\|a\|_\infty \;:=\; \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \ .$$

De eigenschappen (i), (ii) en (iii) zijn onmiddelijk en de driehoeksongelijkheid (iv) is hier de zogenaamde Minkowski-ongelijkheid, in de belangrijkste gevallen $p = 1, 2, \infty$ is deze eveneens evident. Voor $1 < q < p < \infty$ heeft men de dalende rij

$$\ell^\infty \;\supset\; \ell^p \;\subset\; \ell^q \;\supset\; \ell^1 \;\supset\; \mathbb{K}^n$$

van genormeerde ruimten waar we de elementen van $\mathbb{K}^n$ met nullen opvullen om van hen oneindige rijtjes te maken. I.h.b. zijn alle normen $\|..\|_p$ op $\mathbb{K}^n$ gedefinieerd. △

Met een norm kunnen we de lengte van vectoren bepalen maar niet de hoek tussen twee vectoren meten.

Definitie 1.7. Zij E een $\mathbb{K}$–vectorruimte. Een functie $\langle .. \mid .. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ noemen we een inproduct *op E als*

(i) *$\langle x \mid x \rangle \geq 0$ voor alle $x \in E$.*
(ii) *$\langle x \mid x \rangle = 0$ dan en slechts dan als $x = 0$.*
(iii) *$\langle \lambda x + y \mid z \rangle = \lambda \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$ voor alle $\lambda \in \mathbb{K}$ en alle $x, y, z \in E$.*
(iv) *$\langle y \mid x \rangle = \overline{\langle x \mid y \rangle}$ voor alle $x, y \in E$.*

We noemen E dan een inproductruimte.

De in eigenschap (iv) optredende complexe conjugatie staat in het geval $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ voor de identiteit.

Stelling 1.8. Zij E een inproductruimte. Dan is $\langle .. \mid .. \rangle$ semi-lineair in het 2de argument.

Bewijs. Voor alle $x, y, z \in E$ en alle $\mu \in \mathbb{K}$ is $\langle x \mid y + \mu z \rangle = \overline{\langle y + \mu z \mid x \rangle} = \overline{\langle y \mid x \rangle + \langle \mu z \mid x \rangle} = \overline{\langle y \mid x \rangle} + \overline{\mu \langle z \mid x \rangle} = \langle x \mid y \rangle + \bar{\mu} \langle x \mid z \rangle$. □

Indien $\langle x \mid y \rangle = 0$ staan x en y loodrecht op elkaar en schrijft men ook $x \perp y$.

Voorbeeld 1.9. Op ℓ^2 is

$$\langle a \mid b \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} a_i \bar{b}_i$$

een inproduct en de norm wordt door $\|a\|_2 = \sqrt{\langle a \mid a \rangle}$ gegeven. △

Op elke inproductruimte definieert

$$\|a\| \;:=\; \sqrt{\langle a \mid a\rangle}$$

een norm. Hiermee kunnen we voor $x \perp y$ de stelling

$$\|x + y\|^2 \;=\; \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (1.3)$$

van Pythagoras formuleren. De eigenschappen (i), (ii) en (iii) van een norm zijn weer evident, voor de driehoeksongelijkheid gebruikt men de volgende afschatting.

Stelling 1.10. (ongelijkheid van Cauchy–Schwarz). Zij E een inproductruimte. Dan is $|\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ voor alle $x, y \in E$.

Bewijs. Kies $x, y \in E$ willekeurig maar vast. Voor $y = 0$ valt niets te bewijzen, ga voor $y \neq 0$ over op $z = \dfrac{y}{\|y\|}$. Om $|\langle x \mid z\rangle| \leq \|x\|$ te bewijzen schrijf $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$ met gedeelte $x_{\parallel} = \langle x \mid z\rangle\, z$ evenwijdig aan z en $x_{\perp} = x - \langle x \mid z\rangle z$. Zoals de notatie aanduidt staan deze loodrecht op elkaar,

$$\begin{aligned} \langle x_{\parallel} \mid x_{\perp}\rangle \;&=\; \langle x \mid z\rangle \big\langle z \mid x - \langle x \mid z\rangle z \big\rangle \\ &=\; \langle x \mid z\rangle \Big[\langle z \mid x\rangle - \overline{\langle x \mid z\rangle}\|z\|^2\Big] \;=\; 0 \;. \end{aligned}$$

Met Pythagoras volgt

$$\|x\|^2 \;=\; \|x_{\parallel}\|^2 + \|x_{\perp}\|^2 \;\geq\; \|x_{\parallel}\|^2 \;=\; |\langle x \mid z\rangle|^2\, \|z\|^2$$

met gelijkheid dan en slechts dan als $x_{\perp} = 0$, d.w.z. als x en z (ofwel x en y) evenwijdig zijn. □

De meetkundige opsplitsing in evenwijdig en loodrecht gedeelte zullen we later nog verder uitwerken.

Voorbeeld 1.11. Op $\mathbb{R}^n$ is $\langle x \mid y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ een inproduct, de bijbehorende norm definieert de metriek (1.1). △

Is de $\|..\|_1$–norm op $C[0,1]$ misschien ook afkomstig van een inproduct? Pythagoras kunnen we alleen gebruiken als we het inproduct al kennen. Tel

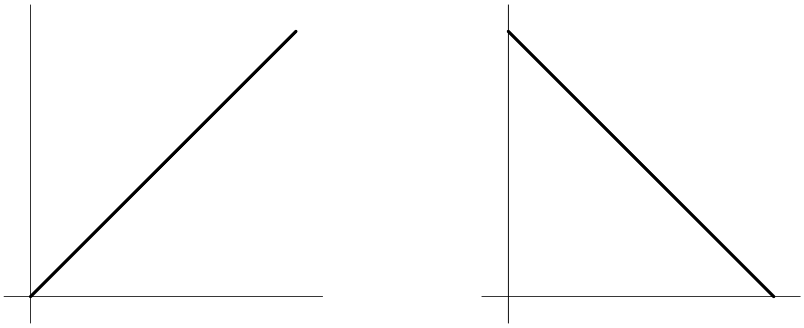
$$\|x - y\|^2 \;=\; \langle x \mid x\rangle - \langle x \mid y\rangle - \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle$$

op bij de eerste vergelijking in (1.3) en verkrijg de *parallelogram-identiteit*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \;=\; 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \;. \quad (1.4)$$

En hieraan voldoet $\|..\|_1$ niet, de in figuur 1.2 geschetste functies

$$f(t) \;=\; t \quad \text{en} \quad g(t) \;=\; 1 - t$$



Figuur 1.2. Twee functies f en g waarvoor $\|..\|_1$ niet aan de parallelogram-identiteit voldoet. Ook $\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\|f\|_\infty^2 + 2\|g\|_\infty^2$.

hebben $\|f+g\|_1 = 1$, $\|f\|_1 = \frac{1}{2}$, $\|g\|_1 = \frac{1}{2}$ en

$$\|f - g\|_1 \;=\; \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - 2t\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{\frac{1}{2}}^1 2t - 1\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2} \;\neq\; 0 \;.$$

De parallelogram-identiteit is niet alleen noodzakelijk opdat een norm van een inproduct afkomstig is, maar ook voldoende.

Voorbeeld 1.12. We kunnen $C[0,1]$ met het inproduct

$$\langle f \mid g \rangle \;:=\; \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

voorzien. De bijbehorende norm voldoet aan

$$\|f\|_2^2 \;=\; \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \;\leq\; \int_0^1 |f(t)|\,\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \;=\; \|f\|_1\,\|f\|_\infty \;\leq\; \|f\|_\infty^2$$

en (gebruik de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz)

$$\begin{aligned}\|f\|_1 \;&=\; \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 |f(t)|\mathbb{1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &=\; \langle\, |f| \mid \mathbb{1}\,\rangle \;\leq\; \|f\|_2\,\|\mathbb{1}\|_2 \;=\; \|f\|_2 \;.\end{aligned}$$

Het voorbeeld uit 1.4 toont aan dat ook convergentie t.o.v. $\|..\|_2$ echt zwakker is dan uniforme convergentie. De afschattingen $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ voor continue functies zijn precies tegenovergesteld aan de afschattingen in de ℓ^p–ruimten. $\triangle$

2

Topologie van metrische ruimten

Zie ook §§2.1, 2.2, 6.2 en 6.5 in [10], §§1.3 en 1.6 in [16], §§2.0 en 3.0 in [15], §1.2 in [9], §§3.14 en 10.1 in [4] of §§1.1, 1.4 en 5.1 in [13].

Een deelverzameling $U \subseteq V$ van een metrische ruimte is *omgeving* van $x \in U$ als er een $\varepsilon > 0$ bestaat waarvoor U de hele ε–omgeving

$$U_\varepsilon(x) \quad = \quad \left\{ \, y \in V \;\middle|\; \mathrm{d}(x,y) < \varepsilon \, \right\}$$

bevat. Indien U al haar punten omgeeft is U *open* en complementen $A = V \backslash U$ van open verzamelingen zijn *gesloten*. Vanwege de driehoeksongelijkheid is $U_\varepsilon(x)$ een open omgeving van x. In metrische ruimten is het mogelijk om vrijwel alle topologische begrippen d.m.v. rijtjes te karakteriseren.

Definitie 2.1. Zij V een metrische ruimte. Een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ is een Cauchy-rij als

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \quad \bigvee_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}} \quad \bigwedge_{m,n\geq n_\varepsilon} \quad \mathrm{d}(x_n, x_m) \quad < \quad \varepsilon \ .$$

De elementen van een Cauchy-rij komen in een sterke zin steeds dichter bij elkaar. Indien $(x_n)_n$ een convergente rij in V is dan is deze (vanwege de driehoeksongelijkheid) ook een Cauchy-rij. Maar als we de metrische ruimte V vervangen door $V^{\backslash\{\lim\limits_{n\to\infty} x_n\}}$ dan blijft de rij $(x_n)_n$ toch een Cauchy-rij.

Definitie 2.2. We noemen de metrische ruimte V volledig als elke Cauchy-rij in V convergent is.

In volledige metrische ruimten kunnen we over convergentie praten zonder al de limiet te moeten kennen.

Voorbeeld 2.3. Het belangrijkste voorbeeld is $\mathbb{K}^n$ ($\cong \mathbb{R}^{2n}$ indien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), het bewijs hiervoor gaat als volgt. Voor $\varepsilon = 1$ bestaat $m \in \mathbb{N}$ met

$$\bigwedge_{i,j\geq m} \quad \|x_i - x_j\| \quad < \quad 1$$

en dus

$$\bigwedge_{i \geq m} \quad \|x_i\| \ < \ \|x_m\| \ + \ 1 \ .$$

Daarom is de Cauchy-rij $(x_i)_i$ begrensd door $M = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_{m-1}\|, \|x_m\| + 1\}$. Volgens de stelling van Bolzano–Weierstraß bestaat een convergente deelrij $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ met limiet $y \in \mathbb{K}^n$. Vanwege

$$\mathrm{d}(y, x_j) \ \leq \ \mathrm{d}(y, x_{i_k}) \ + \ \mathrm{d}(x_{i_k}, x_j) \ < \ 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

is dan ook $y = \lim\limits_{j \to \infty} x_j$ de limiet van de hele rij. △

Een afbeelding $f : M \longrightarrow V$ tussen metrische ruimten heet *Lipschitz-continu* als er een $\gamma > 0$ bestaat met $\mathrm{d}(f(x), f(y)) \leq \gamma \cdot \mathrm{d}(x, y)$ voor alle $x, y \in M$ (de naam is terecht, f is dan i.h.b. continu) en *contractie* indien $\gamma < 1$.

Stelling 2.4. (contractiestelling van Banach). Zij V een volledige metrische ruimte en $f : V \longrightarrow V$ een contractie. Dan heeft f een uniek dekpunt $y = f(y) \in V$, voor elke $x_0 \in V$ is $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(x_0) = y$ en geldt de schatting

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \quad \mathrm{d}(y, f^n(x_0)) \ \leq \ \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} d(f(x_0), x_0) \ .$$

Bewijs. Zo'n dekpunt y is uniek want als $f(z) = z$ dan is $\mathrm{d}(y, z) = \mathrm{d}(f(y), f(z)) \leq \gamma \cdot \mathrm{d}(y, z)$ en dus $\mathrm{d}(y, z) = 0$ ofwel $y = z$. Voor de existentie definieer $x_n := f^n(x_0)$. Een limiet y van deze rij zou een dekpunt zijn, want

$$\mathrm{d}(y, f(y)) \ \leq \ \mathrm{d}(y, x_{n+1}) \ + \ \mathrm{d}(f(x_n), f(y)) \ \leq \ \mathrm{d}(y, x_{n+1}) \ + \ \gamma \cdot \mathrm{d}(x_n, y)$$

en beide termen gaan dan naar nul voor $n \to \infty$. Bereken

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) \ &= \ \mathrm{d}(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq \ \gamma \cdot \mathrm{d}(x_{n-1}, x_n) \ \leq \ \ldots \ \leq \ \gamma^n \cdot \mathrm{d}(x_0, x_1) \end{aligned}$$

en daarmee

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_n, x_{n+k}) \ &\leq \ \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{d}(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \\ &\leq \ \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^{n+i} \cdot \mathrm{d}(x_0, x_1) \ = \ \gamma^n \mathrm{d}(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^i \\ &\leq \ \gamma^n \mathrm{d}(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i \ = \ \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \mathrm{d}(x_0, x_1) \ . \end{aligned}$$

Dus $(x_n)_n$ is een Cauchy-rij, en de limiet $k \to \infty$ levert nog de gewenste schatting op. □

Toepassing op een kaart van europa levert een punt op de kaart waardoor we een naald kunnen steken die precies op het punt terechtkomt dat de kaart aangeeft. Iets serieuser toepassingen zijn bv. approximaties van de oplossing van (systemen van) lineaire vergelijkingen in de numerieke wiskunde. Men kan deze stelling echter ook op nietlineaire problemen toepassen en zo bv. existentie en eenduidigheid van oplossingen voor gewone differentiaalvergelijkingen aantonen of de impliciete functiestelling bewijzen.

Lemma 2.5. Zij $f : M \longrightarrow V$ een continue afbeelding tussen volledige metrische ruimten met de eigenschap

$$\bigwedge_{\alpha>0} \ \bigvee_{\beta(\alpha)>0} \ \bigwedge_{x\in M} \ U_{\beta(\alpha)}(f(x)) \ \subseteq \ \overline{f(U_\alpha(x))} \ .$$

Dan geldt ook

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \ \bigvee_{\delta(\varepsilon)>0} \ \bigwedge_{x\in M} \ U_{\delta(\varepsilon)}(f(x)) \ \subseteq \ f(U_\varepsilon(x)) \ .$$

I.h.a. zal $\delta(\gamma) < \beta(\gamma)$ voor gegeven $\gamma > 0$ zijn, men kan zelfs aantonen dat $\delta(\varepsilon) = \beta(\alpha)$ voor alle $\varepsilon > \alpha$ werkt.

Bewijs. Gegeven $\varepsilon > 0$ stel $\beta_n := \min\{\frac{1}{n}, \beta(2^{-n}\varepsilon)\}$ en definieer $\delta(\varepsilon) := \beta_1$. Voor vaste $x_1 \in M$ en $y \in U_{\delta(\varepsilon)}(f(x_1))$ moeten we $y \in f(U_\varepsilon(x_1))$ laten zien. Omdat de afsluiting van $f(U_{2^{-1}\varepsilon}(x_1))$ de β_1–omgeving van $f(x_1)$ bevat bestaat $x_2 \in U_{2^{-1}\varepsilon}(x_1)$ met $f(x_2) \in U_{\beta_2}(y)$ en inductief een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \ x_{n+1} \ \in \ U_{2^{-n}\varepsilon}(x_n) \ \wedge \ f(x_{n+1}) \ \in \ U_{\beta_{n+1}}(y) \ .$$

Voor alle $\gamma > 0$ bestaat een index $n_\gamma \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n, m \geq n_\gamma$ met $n \leq m$

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) \ \leq \ \sum_{k=n}^{m-1} \mathrm{d}(x_k, x_{k+1}) \ < \ \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k}\varepsilon \ < \ \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon \ < \ \gamma$$

ofwel $(x_n)_n$ is een Cauchy-rij. In de volledige metrische ruimte M heeft deze een limiet $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ en vanwege

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x_1, z) \ &= \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_1, x_n) \ \leq \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{d}(x_k, x_{k+1}) \\ &< \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}\varepsilon \ = \ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ = \ \varepsilon \end{aligned}$$

is $z \in U_\varepsilon(x_1)$. Indien $f(z) = y$ hebben we $y \in f(U_\varepsilon(x_1))$ aangetoond.

Omdat f continu is convergeert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ naar $f(z)$, vanwege $f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(y)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ volgt

$$\mathrm{d}(f(z), y) \;\leq\; \mathrm{d}(f(z), f(x_n)) \;+\; \mathrm{d}(f(x_n), y) \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0$$

en $\mathrm{d}(f(z), y) = 0$ impliceert $f(z) = y$. □

Dit lemma zullen we in hoofdstuk 6 tijdens het bewijs van het zogenaamd open mapping theorem gebruiken. We zullen dan ook het volgend resultaat nodig hebben.

Stelling 2.6. (Baire). Zij V een volledige metrische ruimte. Dan heeft de vereniging

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

van een aftelbare familie van gesloten deelverzamelingen $A_n \subseteq V$ zonder inwendig punt eveneens geen inwendig punt.

We bewijzen de volgende equivalente formulering. Is $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een familie van open en dichte deelverzamelingen $O_n \subseteq V$, dan is de doorsnede $\bigcap O_n$ eveneens dicht in V.

Bewijs. Zij $U \subseteq V$ open en niet leeg. Omdat $\overline{O}_1 = V$ bestaan $x_1 \in U \cap O_1$ en $\varepsilon_1 \in]0, 1[$ met $U_{2\varepsilon_1}(x_1) \subseteq U \cap O_1$, de omgeving $\overline{U_{\varepsilon_1}(x_1)}$ is dus inclusief rand in $U \cap O_1$ bevat. Inductief bestaan ε_n–omgevingen om punten $x_n \in U_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \cap O_n$ met straal $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$ waarvoor $\overline{U_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq U_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \cap O_n$. Hieruit volgt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_{\varepsilon_n}(x_n)} \;\subseteq\; U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

en omdat $(x_n)_n$ een Cauchy-rij is bevat deze doorsnede het punt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. □

De doorsnede van aftelbaar veel open en dichte verzamelingen is 'topologisch groot' en men noemt een eigenschap *generiek* indien de verzameling punten met deze eigenschap zo'n 'topologisch grote' deelverzameling bevat. Het is bv. generiek voor een reëel getal om niet rationaal te zijn, want

$$\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R}\backslash\{q\} \;\subseteq\; \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \;.$$

Darentegen is het niet generiek voor een reëel getal om wél rationaal te zijn, $\mathbb{Q}$ ligt alleen maar dicht in $\mathbb{R}$ en kan niet eveneens een aftelbare doorsnede van open en dichte verzamelingen bevatten (waarom niet?).

3

Banachruimten en lineaire operatoren

Zie ook §§2.3 en 6.3 in [10], §§1.3, 1.20 en 1.21 in [16], §§3.0, 6.0, 7.0 en 7.1 in [15], §§2.3, 4.1–4.3, 5.1 en 5.4–5.6 in [9], §§5.4, 5.5 en 5.7 in [4] of §§1.2, 1.5 en 5.2 in [13].

Naast eindige lineaire combinaties zijn we in de analyse ook in oneindige reeksen geïnteresserd. Het majorantiecriterium speelt de convergentie van reeksen terug op reeksen binnen $\mathbb{R}$ en opdat de limietpunten ook 'bestaan' is het nodig dat de ruimte volledig is.

Definitie 3.1. We noemen een genormeerde ruimte E een Banachruimte als E volledig is t.o.v. de bijbehorende metriek. Indien die norm afkomstig is van een inproduct spreken we ook van een Hilbertruimte.

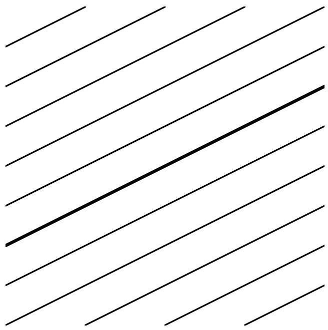
Voorbeeld 3.2. De ruimte $C_0(\mathbb{R}^n)$ van continue functies op $\mathbb{R}^n$ die in het oneindige verdwijnen is t.o.v. uniforme convergentie volledig. Zij hiervoor $(f_i)_i \in C_0(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij, dan is voor elk $x \in \mathbb{R}^n$ ook $(f_i(x))_i \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij. Definieer $g(x) := \lim_{i\to\infty} f_i(x)$ voor elk $x \in \mathbb{R}^n$, dus $f_i \to g$ puntsgewijs, maar ook uniform:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \ \bigvee_{i_\varepsilon\in\mathbb{N}} \ \bigwedge_{\underbrace{i,\, j}_{\downarrow \atop \infty} \ge i_\varepsilon} \ \bigwedge_{x\in\mathbb{R}^n} \ |f_i(x) - \underbrace{f_j(x)}_{\downarrow \atop g(x)}| \underbrace{<}_{\downarrow \atop \le} \varepsilon$$

en uniforme limieten van continue functies zijn continu (want $|g(x) - g(y)| \le |g(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - g(y)| < 3\varepsilon$ voor $\|x - y\| < \delta$ met 'de' δ behorende bij de continue functie f_i). Met behulp van een diagonaalargument volgt nog dat $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. △

Met dezelfde argumentatie is ook $(C[0,1], \|..\|_\infty)$ een Banachruimte.

Stelling 3.3. Zij E een Banachruimte en $F < E$ een gesloten deelruimte. Dan zijn F en de quotientruimte $E/_F$ ook Banachruimten.



Figuur 3.1. Het neutrale en andere elementen van $\mathbb{R}^2/_{<\binom{2}{1}>}$.

Bewijs. De beperking van $\|..\|$ op F is (blijkbaar) een norm op F en we moeten alleen nog laten zien dat F volledig is. Zij hiervoor $(x_n)_n$ een Cauchy-rij in F. Dus ook in E, en E is volledig, er bestaat een limiet $y = \lim_{n\to\infty} x_n \in E$. Maar $F \subseteq E$ is gesloten en bevat dus y, waarmee de gegeven Cauchy-rij binnen F een limiet heeft.

Op E definieert men d.m.v. $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in F$ een equivalentierelatie (oefening: ga dit na!) waarvoor de equivalentieklassen de vorm

$$\left\{ y \in E \;\middle|\; y \sim x \right\} \;=\; \left\{ x + z \;\middle|\; z \in F \right\} \;=:\; x + F$$

hebben, zie figuur 3.1 voor een schets. De verzameling van alle equivalentieklassen is het quotient

$$E/_F \;=\; \left\{ x + F \;\middle|\; x \in E \right\}$$

waarop door

$$\begin{aligned} (x+F) \;+\; (y+F) \;&:=\; (x+y) \;+\; F \\ \lambda \cdot (x+F) \;&:=\; (\lambda x) \;+\; F \end{aligned}$$

optellen en scalair vermenigvuldigen gedefinieerd worden. (Oefening: ga na dat deze definities onafhankelijk van de gekozen representanten zijn, en dat hiermee het quotient een vectorruimte wordt.) D.m.v. de afstand

$$\|x+F\| \;:=\; \inf_{y\sim x} \|y\|$$

tussen de verzamelingen $x+F \subseteq E$ en $F \subseteq E$ wordt een norm op het quotient gedefinieerd.

(*i*) Als infimum van getallen ≥ 0 is $\|x+F\| \geq 0$.
(*ii*) Indien $\|x+F\| = 0$, dan bestaat voor elk $\varepsilon > 0$ een $y \sim x$ met $\|y\| < \varepsilon$. Neem $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ en verkrijg een rijtje $(y_n)_n$ in $x+F$ met $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Maar

met F is ook $x+F$ gesloten (invers beeld van F onder de translatie $z \mapsto z-x$), dus $0 \in x+F$, d.w.z. $0 \sim x$ ofwel $x+F=F$, de nul in het quotient.

(iii) $\|\lambda \cdot (x+F)\| = \|(\lambda x)+F\| = \inf\limits_{z\sim\lambda x} \|z\| = \inf\limits_{y\sim x} \|\lambda y\| = |\lambda| \inf\limits_{y\sim x} \|y\|$.

(iv) $\|(x+F)+(y+F)\| = \inf\limits_{z\sim(x+y)} \|z\| \stackrel{!}{=} \inf\limits_{u\sim x} \inf\limits_{v\sim y} \|u+v\| \le \inf\limits_{u\sim x} \|u\| + \inf\limits_{v\sim y} \|v\|$.

Zij tenslotte $(x_n+F)_n$ een Cauch-rij in $E/_F$, d.w.z.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n(\varepsilon)\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m,n\ge n(\varepsilon)} \|x_n - x_m + F\| < \varepsilon$$

en dat betekent dan weer dat $y^\varepsilon_{nm} \sim (x_n - x_m)$ bestaan met $\|y^\varepsilon_{nm}\| < 2\varepsilon$. Helaas kunnen we niet ervan uitgaan dat $y_{nm} = y_n - y_m$ met $y_n \sim x_n$ en $y_m \sim x_m$. Zoiets gaan we nu construeren, en daarbij is het 'toegestaan' om op een deelrij over te gaan.

Werk met $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, stel $n_k := n(\frac{1}{2^{k+1}})$ en schrijf $y^k_{nm} := y^\varepsilon_{nm}$ voor $n,m \ge n_k$. Definieer nu $y_{n_1} = x_{n_1}$ en vervolgens recursief $y_{n_{k+1}} = y_{n_k} + y^k_{n_{k+1},n_k}$. Dan is $y_{n_k} \sim x_{n_k}$ en

$$\|y_{n_{k+l}} - y_{n_k}\| \le \sum_{j=0}^{l-1} \|y_{n_{k+j+1}} - y_{n_{k+j}}\| < \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^{k+l-1}} < \frac{1}{2^{k-1}} ,$$

ofwel $(y_{n_k})_k$ is een Cauchy-rij. In de volledige ruimte E bestaat de limiet $z = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$ en dan is

$$z + F = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} + F = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k} + F) .$$

Omdat $(x_n+F)_n$ een Cauchy-rij is en (nu) een convergente deelrij heeft moet ook de hele rij convergeren, met dezelfde limiet $z+F$. $\square$

Merk op dat we de eigenschap (ii) van de norm op E nergens hebben gebruikt, om (ii) op de quotientruimte te bewijzen hadden we alleen maar nodig dat de deelruimte $F < E$ gesloten is. Men noemt een functie $|..| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ op een vectorruimte een halfnorm als aan de eigenschappen (i), (iii) en (iv) van een norm is voldaan, en indien (ii) niet geldt zal de deelruimte $\{0\}$ die alleen uit het neutrale element bestaat niet gesloten zijn. Men kan dus van een met een halfnorm voorzien ruimte E overstappen naar een genormeerde ruimte door het quotient van E met de afsluiting $\overline{\{0\}}$ te nemen. Dit trukje wordt bv. in de integratietheorie toegepast om de ruimten L^p te definiëren.

Bij lineaire ruimten horen lineaire afbeeldingen en deze hebben in de functionaalanalyse de speciale naam *lineaire*[1] *operatoren* gekregen. Voorbeelden zijn de inclusie $\iota : F \longrightarrow E$ van een deelruimte en de projectie

[1] In de niet-lineaire functionaalanalyse zijn ook niet-lineaire operatoren belangrijk, maar vanaf nu nemen we stilzwijgend aan dat alle *operatoren* lineair zijn.

$$\begin{array}{rccc} \rho : & E & \longrightarrow & E/_{F} \\ & x & \mapsto & x+F \end{array}$$

op een quotientruimte.

Voorbeeld 3.4. De *Laplace-operator*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & C^2(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{array}$$

is kennelijk lineair maar niet continu. Immers, de rij van functies $f_k(t) = \frac{1}{k}\sin(2\pi k t)$ convergeert uniform naar nul terwijl

$$\Delta f_k(t) \;=\; -4\pi^2 k \sin(2\pi k t)$$

zelfs puntsgewijs in alle punten buiten $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ divergeert. △

Stelling 3.5. Voor een lineaire afbeelding $T : E \longrightarrow F$ tussen genormeerde ruimten zijn de volgende uitspraken equivalent.

(*i*) *T is Lipschitz-continu.*
(*ii*) *T is in het nulpunt $0 \in E$ continu.*

Bewijs. Lipschitz-continuïteit betekent

$$\bigvee_{C>0} \; \bigwedge_{x \in E} \quad \|Tx\| \;\leq\; C \cdot \|x\|$$

en continuïteit in $z \in E$ betekent

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \; \bigvee_{\delta>0} \; \bigwedge_{x\in E} \quad \|x-z\| \;<\; \delta \;\Longrightarrow\; \|Tx - Tz\| \;<\; \varepsilon \;.$$

Voor $(i) \Rightarrow (ii)$ neem $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$, dit werkt uniform voor alle z en i.h.b. voor $z = 0$. Voor $(ii) \Rightarrow (i)$ kies $\varepsilon = 1$ en verkrijg $\delta > 0$ met $\|Ty\| < 1$ zodra $\|y\| < 2\delta$. Zij nu $x \in E$ vast maar willekeurig. Voor $x = 0$ valt niets te bewijzen, en anders ga over op $y = \dfrac{\delta x}{\|x\|}$. Dan is

$$\|Tx\| \;=\; \frac{\|x\|}{\delta}\|Ty\| \;<\; \frac{1}{\delta} \cdot \|x\|$$

en $C := \dfrac{1}{\delta}$ is de gezochte Lipschitz-constante. □

Men noemt het infimum

$$\inf\{C > 0 \mid \|Tx\| \leq C\|x\|\} \;=\; \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \;=\; \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \;=:\; \|T\|$$

de norm van T en spreekt ook van *begrensde operatoren*. Voor $F < E$ voldoet de inclusie $\iota_F : F \longrightarrow E$ aan

$$\bigwedge_{y \in F} \quad \|\iota_F y\| \;=\; \|y\| \ ,$$

zo'n *isometrie* heeft norm 1 (behalve als $F = \{0\}$, dan is $\|\iota_F\| = 0$), voor de projectie ρ geldt

$$\|\rho\| \;=\; \sup_{\|x\|=1} \|x + F\| \;=\; \sup_{\|x\|=1} \inf_{y \in x+F} \|y\| \;\leq\; 1$$

en $\|\rho\| = 1$ behalve als $F = E$.

Stelling 3.6. De ruimte $L(E,F)$ van begrensde operatoren tussen genormeerde ruimten is een genormeerde ruimte. Als F een Banachruimte is dan is ook $L(E,F)$ een Banachruimte.

Bewijs. De functie $\|..\| : L(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}$ op de vectorruimte $L(E,F)$ voldoet zeker aan eigenschap (i) in definitie 1.1. Indien $\|T\| = 0$ is $\|Tx\| = 0$ voor alle $x \in E$, daarmee $Tx = 0$ voor alle $x \in E$ en dat betekent $T = 0$. Voor alle $\lambda \in \mathbb{K}$ geldt

$$\|\lambda T\| \;=\; \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Tx\| \;=\; |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \;=\; |\lambda|\, \|T\|$$

en eigenschap (iv) volgt uit de reeks afschattingen

$$\begin{aligned} \|S + T\| \;&=\; \sup_{\|x\|=1} \|Sx + Tx\| \;\leq\; \sup_{\|x\|=1} (\|Sx\| + \|Tx\|) \\ &\leq\; \sup_{\|x\|=1} \|Sx\| \;+\; \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \;=\; \|S\| \;+\; \|T\| \end{aligned}$$

waarmee $\|..\|$ inderdaad een norm op $L(E,F)$ is. De rij $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(E,F)^{\mathbb{N}}$ is Cauchy indien

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \;\; \bigvee_{m_\varepsilon \in \mathbb{N}} \;\; \bigwedge_{m,n \geq m_\varepsilon} \quad \|T_n - T_m\| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1}$$

en dan is ook $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in de volledige ruimte F. De puntsgewijs gedefinieerde operator $Sx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ is zeker lineair en ook begrensd, want de rij $(\|T_n\|)_n$ van reële getallen is begrensd. Om in (3.1) de limiet $m \to \infty$ te nemen controleren we puntsgewijs $\|T_n x - Sx\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ want dan geldt deze afschatting ook voor het supremum hiervan over $\{\|x\| = 1\}$, ofwel $T_m \to S$ in de operatornorm. $\square$

Uit de lineaire algebra zijn we gewend dat iedere deelruimte $V < E$ een (algebraïsch) supplement heeft, een tweede deelruimte $F < E$ met $V + F = E$ en $V \cap F = \{0\}$. Dan kan ieder element $x \in E$ uniek worden ontbonden in $x = y + z$ met $y \in V$ en $z \in F$. Dit definieert projecties $\pi_V(x) = y$ op V langs F en $\pi_F = \mathrm{id} - \pi_V$ op F langs V. We noemen $E = V \oplus F$ de *topologische directe som* van V en F indien π_V (en dus ook π_F) begrensd is.

Voorbeeld 3.7. De ruimte $C[0,1] = \mathbb{K} \oplus F$ is de (topologische) directe som van de constante functies en de functies waarvoor de integraal

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad 0$$

over $[0,1]$ verdwijnt. $\triangle$

Stelling 3.8. (universele eigenschap van de topologische directe som). Zij $E = F \oplus G$*, dan bestaat voor elk tweetal* $R \in L(F,H)$*,* $S \in L(G,H)$ *een unieke afbeelding* $T : E \longrightarrow H$ *met* $R = T \circ \iota_F$ *en* $S = T \circ \iota_G$*, m.a.w. het diagram*

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, "\iota_F"'] \arrow[dr, "R"] & \\
E \arrow[rr, "T!"] & & H \\
& G \arrow[ul, "\iota_G"] \arrow[ur, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

commuteert. De afbeelding T *is lineair en begrensd.*

Deze eigenschap karakteriseert $F \oplus G$, heeft namelijk $F \amalg G$ dezelfde eigenschap zo bestaat een 'unieke' bijectieve begrensde operator $T : F \oplus G \longrightarrow F \amalg G$ met begrensde inverse.

Bewijs. Voor de uniciteit neem $T_1, T_2 : E \longrightarrow H$ en bereken

$$T_1 x \;=\; T_1(y+z) \;=\; T_1 y \,+\, T_1 z \;=\; Ry \,+\, Sz \;=\; T_2 x$$

wat meteen ook de existentie $Tx := Ry + Sz$ oplevert, blijkbaar lineair. De afschattingen

$$\begin{aligned}
\|Tx\| \;&\leq\; \|Ry\| \,+\, \|Sz\| \;\leq\; \|R\|\,\|y\| \,+\, \|S\|\,\|z\| \\
&=\; \|R\|\,\|\pi_F x\| \,+\, \|S\|\,\|\pi_G x\| \;\leq\; (\|R\|\,\|\pi_F\| + \|S\|\,\|\pi_G\|)\;\|x\|
\end{aligned}$$

voor alle $x = y + z$ laten zien dat de operator T begrensd is. $\square$

Ook de quotientruimte is door een universele eigenschap gekarakteriseerd.

Stelling 3.9. Zij $F < E$ *een gesloten deelruimte, dan bestaat voor elke* $T \in L(E,G)$ *met* $T(F) \subseteq \{0\}$ *een unieke afbeelding* $S : E/F \longrightarrow G$ *met* $T = S \circ \rho$*, het diagram*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] & & G \\
& E/F \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "S!"'] &
\end{tikzcd}$$

commuteert. De afbeelding S *is lineair en begrensd.*

Bewijs. De uniciteit volgt uit $S_1(x+F) = Tx = S_2(x+F)$. De hieruit voortvloeiende $S(x+F) := Tx$ is welgedefinieerd want

$$\begin{aligned} x+F = y+F &\implies x-y \in F \implies T(x-y) = 0 \\ &\implies Tx = Ty \implies S(x+F) = S(y+F) \ . \end{aligned}$$

Verder geldt

$$S(\lambda(x+F)+(y+F)) \;=\; T(\lambda x+y) \;=\; \lambda Tx + Ty \;=\; \lambda S(x+F) + S(y+F)$$

en voor de continuïteit kies voor elk $\varepsilon > 0$ een $y \in x+F$ met $\|y\| = \|x+F\|+\varepsilon$, dan volgt

$$\|S(x+F)\| \;=\; \|Ty\| \;\leq\; \|T\|\,\|y\| \;=\; \|T\|\,(\|x+F\|+\varepsilon)$$

en dus $\|S\| \leq \|T\|$. □

We kunnen elke operator schrijven als het na elkaar uitvoeren van een surjectieve en een injectieve operator.

Stelling 3.10. (homomorfiestelling). Zij $T \in L(E,F)$. Dan is de kern (of nulruimte)

$$N(T) \;:=\; \ker T \;:=\; T^{-1}(0) \;=\; \left\{ x \in E \;\middle|\; T(x) = 0 \right\}$$

van T een gesloten deelruimte en T induceert een lineaire continue bijectie tussen de quotientruimte $E/_{\ker T}$ en het beeld

$$R(T) \;:=\; \operatorname{im} T \;:=\; T(E) \;=\; \left\{ y \in F \;\middle|\; y = T(x) \text{ voor een } x \in E \right\}$$

onder T.

Bewijs. De deelruimte $\ker T$ is gesloten want invers beeld van de gesloten verzameling $\{0\}$ onder de begrensde operator T. Vanwege de universele eigenschap is er precies één afbeelding die het diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] & & F \\ & E/_{\ker T} \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

commutatief maakt, namelijk

$$\begin{array}{rccc} S : & E/_{\ker T} & \longrightarrow & F \\ & x + \ker T & \longmapsto & T(x) \end{array} .$$

De begrensde operator S is injectief, want zijn kern bestaat juist uit de kern van T, de nul in de quotientruimte, en volgens definitie is $\operatorname{im} S = \operatorname{im} T$. $\square$

De scalairen zijn volledig en de *duale ruimte* $E^* = L(E, \mathbb{K})$ van begrensde lineaire vormen is daarom altijd een Banachruimte. Ga verder door en bekijk de *biduale* ruimte $E^{**} = L(E^*, \mathbb{K})$, deze bestaat uit de begrensde lineaire vormen op de ruimte van begrensde lineaire vormen op E. D.m.v. $\alpha \mapsto \alpha(x)$ definieert elk $x \in E$ zo'n element $T_x \in E^{**}$, dus $T_x\alpha = \alpha(x) \in \mathbb{K}$, want T_x is niet alleen lineair maar vanwege

$$\bigwedge_{\alpha \in E^*} \quad |T_x\alpha| \;=\; |\alpha(x)| \;\leq\; \|\alpha\|\,\|x\| \;=\; \|x\|\,\|\alpha\|$$

ook continu. Om van de afschatting $\|T_x\| \leq \|x\|$ een vergelijking $\|T_x\| = \|x\|$ te maken gebruiken we de volgende stelling (zonder bewijs).

Stelling 3.11. (Hahn–Banach). Zij $V < E$ deelruimte van de genormeerde ruimte E en $\beta \in V^*$. Dan bestaat $\alpha \in E^*$ met $\alpha_{|_V} = \beta$ en $\|\alpha\| = \|\beta\|$.

Voor vaste $x \in E$ definieert $\beta(\lambda x) := \lambda\|x\|$ een lineaire operator op $V = < x >$ met $\|\beta\| = 1$. Volgens de stelling van Hahn–Banach bestaat $\alpha \in E^*$ met $\|\alpha\| = 1$ en $\alpha(x) = \|x\|$. De vergelijking

$$|T_x\alpha| \;=\; |\alpha(x)| \;=\; \|x\|$$

leidt tot $\|T_x\| \geq \|x\|$ en dus $\|T_x\| = \|x\|$. M.b.v. de isometrie

$$\begin{array}{rcccl} T & : & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & & x & \mapsto & T_x \end{array} \tag{3.2}$$

kunnen we alle eigenschappen van E naar $\operatorname{im} T \subseteq E^{**}$ overhevelen en kunnen in feite E zelf als een deelruimte van E^{**} beschouwen. De biduale ruimte E^{**} is een Banachruimte en daarom zal de afsluiting $F := \overline{E}$ van E binnen E^{**} eveneens een Banachruimte zijn. Op deze manier vinden we voor elke genormeerde ruimte E een Banachruimte F met de eigenschap dat E isometrisch in F ingebed kan worden en dan dicht ligt. Het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[rr, "S"] & & F_2 \\ & E \arrow[ul, "T_1"] \arrow[ur, "T_2"'] & \end{tikzcd}$$

laat zien dat zo'n F op isometrie na eenduidig is, deze wordt door

$$S(\lim_{n\to\infty} T_1 x_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} T_2 x_n \tag{3.3}$$

gedefinieerd en (oefening!) hangt niet van de gekozen Cauchy-rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ af. Men spreekt ook van de *completering* van E. Voorbeelden zijn de completering $L^1[0,1]$ van $C[0,1]$ t.o.v. de norm

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

en de completering $L^2[0,1]$ van $C[0,1]$ t.o.v. de norm

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \ .$$

Vanwege de parallelogram-identiteit is $L^2[0,1]$ een Hilbertruimte.

Voor $\mathbb{Q}$ is de interpretatie van $\mathbb{R}$ als punten op de lijn 'tussen de al aanwezige rationale punten' belangrijk. De integratietheorie van Lebesgue maakt het mogelijk om elementen van $L^1[0,1]$ en $L^2[0,1]$ ook weer als functies te kunnen interpreteren.

Hoe veel groter is E^{**} ? Zelfs voor een Banachruimte hoeft de identificerende isometrie (3.2) niet surjectief te zijn, ℓ^1 en ook $L^1[0,1]$ zijn hiervoor (tegen)voorbeelden.

Definitie 3.12. Indien $E = E^{**}$ noemen we de Banachruimte E reflexief.

4

Meetkunde van Hilbertruimten

Zie ook §§4.1–4.3 en §§5.1–5.4 in [10], §§2.9–2.11 en 3.1–3.5 in [16], §§3.1, 3.2, 4.0, 4.1, 4.3, 4.4, 5.0 en 5.3 in [15], §§3.1–3.5 in [9], §§6.3, 6.5 en 6.6 in [4] of §§2.1 en 2.2 in [13].

De ruimtelijke intuïtie die in de lineaire algebra zo vaak te hulp schiet is ook in oneindige dimensie nog zeer waardevol. Dit geldt i.h.b. waar men gebruik kan maken van een inproduct.

Stelling 4.1. Zij H een Hilbertruimte, $x \in H$ en $F < H$ een gesloten deelruimte. Dan bestaat precies één $z \in F$ met

$$\|x - z\| \;=\; \inf_{y \in F} \|x - y\| \;.$$

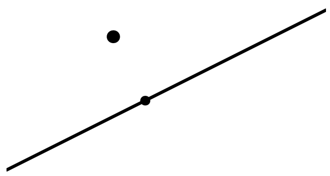
De afbeelding $\pi : x \mapsto z$ is een projectie, $\pi^2 = \pi$.

Deze bestapproximatie lost het probleem $\|x - y\| \stackrel{!}{=} \min$ op, zie figuur 4.1.

Bewijs. Voor de uniciteit neem aan dat $\|x - z_1\| = \|x - z_2\|$ en definieer $z_0 := \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, dan is

$$\begin{aligned}
\|x \,-\, z_0\|^2 &= \langle \frac{x - z_1}{2} + \frac{x - z_2}{2} \mid \frac{x - z_1}{2} + \frac{x - z_2}{2} \rangle \\
&= \frac{1}{4}\|x - z_1\|^2 + \frac{1}{4}\|x - z_2\|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\langle x - z_1 \mid x - z_2 \rangle \\
&\leq \frac{1}{4}\|x - z_1\|^2 + \frac{1}{4}\|x - z_2\|^2 + \frac{1}{2}|\langle x - z_1 \mid x - z_2 \rangle| \\
&\leq \frac{1}{4}\|x - z_1\|^2 + \frac{1}{4}\|x - z_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x - z_1\|\,\|x - z_2\| \\
&= \|x - z_1\|^2 \;\leq\; \|x - z_0\|^2
\end{aligned}$$

en in de gebruikte ongelijkheid van Cauchy–Schwarz geldt gelijkheid dan en slechts dan als $x - z_1$ en $x - z_2$ evenwijdig zijn, d.w.z. $z_1 = z_2$. Voor de existentie stel



Figuur 4.1. Het punt $x \notin F$ en zijn orthogonale projectie.

$$d \;:=\; \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

en kies $y_n \in F$ met $d^2 \leq \|x - y_n\|^2 < d^2 + \dfrac{1}{n}$, een Cauchy-rij:

$$\begin{aligned}
\|y_n \;-\; y_m\|^2 \;&=\; \|(x - y_n) \;-\; (x - y_m)\|^2 \\
&\overset{!}{=}\; 2\|x - y_n\|^2 \;+\; 2\|x - y_m\|^2 \;-\; \|(x - y_n) \;+\; (x - y_m)\|^2 \\
&<\; 2d^2 + \frac{2}{n} \;+\; 2d^2 + \frac{2}{m} \;-\; 4\|x \;-\; \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \\
&\leq\; 2d^2 + \frac{2}{n} \;+\; 2d^2 + \frac{2}{m} \;-\; 4d^2 \;=\; \frac{2}{n} + \frac{2}{m}
\end{aligned}$$

waar in $\overset{!}{=}$ de parallelogram-identiteit is toegepast. Het in de Hilbertruimte H bestaande limietpunt $z = \lim_{n \to \infty} y_n$ zit in de gesloten deelruimte F. □

Zoals het bewijs laat zien voldoet de voorwaarde dat F convex is. Emuleer het differentiëren (lineaire approximatie!) en varieer $y \in F$ met $\|y\| \ll 1$ (d.w.z. voldoende klein). Dan is

$$\|x \;-\; (z + y)\|^2 \;=\; \|x - z\|^2 \;-\; 2\,\mathrm{Re}\langle x - z \mid y\rangle \;+\; \|y\|^2$$

en na vermenigvuldiging van y met een geschikte scalair is

$$2\,\mathrm{Re}\langle x - z \mid y\rangle \;=\; 2\,|\langle x - z \mid y\rangle| \;.$$

De zeer kleine $\|y\|^2$ verliest het tegen $|\langle x - z \mid y\rangle|$ en dus moet de bestapproximatie $z \in F$ aan $\langle x - z \mid y\rangle = 0$ voldoen — voor alle $y \in F$.

Definitie 4.2. Zij H een Hilbertruimte en $D \subseteq H$ een deelverzameling. Dan schrijven we

$$D^\perp \;=\; \left\{ w \in H \;\middle|\; \langle w \mid y\rangle = 0 \text{ voor alle } y \in D \right\}$$

voor de deelruimte loodrecht op D.

Stelling 4.3. Zij H een Hilbertruimte en $F < H$ een gesloten deelruimte. Dan is $H = F \oplus F^{\perp}$ de topologische directe som van F en $F^{\perp}$.

Bewijs. De doorsnede $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ bestaat uit de enige vector die loodrecht op zichzelf staat. Voor $x \in H$ voldoen de bestapproximatie $z \in F$ en $w := x - z \in F^{\perp}$ aan $x = z + w$ — H is de algebraïsche directe som van F en $F^{\perp}$. Bij zo'n opsplitsing horen altijd lineaire projecties, de projecties $\pi_F(x) = z$ en $\pi_{F^{\perp}} = \mathrm{id} - \pi_F$ zijn vanwege Pythagoras' $\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2$ continu met norm 1 (behalve als $F = 0$ of $F = H$). □

Men spreekt ook van een *orthogonale directe som* en noemt π_F de *orthogonale projectie* op F.

Voorbeeld 4.4. De inproductruimte $C[0,1] = \mathbb{K} \oplus F$ is de orthogonale directe som van de constante functies en de continue functies waarvoor de integraal

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad 0$$

over $[0,1]$ verdwijnt. △

D.m.v. $x \mapsto \langle x \mid y \rangle$ wordt een lineaire functie $H \longrightarrow \mathbb{K}$ gedefinieerd die vanwege de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz bovendien continu is. In eindige dimensie zijn alle lineaire vormen continu en worden door $(n \times 1)$–matrices gegeven, uiteindelijk dus door het inproduct.

Stelling 4.5. (Riesz). Zij H een Hilbertruimte. Voor elke begrensde lineaire vorm $\alpha : H \longrightarrow \mathbb{K}$ bestaat precies één $y \in H$ met $\alpha(x) = \langle x \mid y \rangle$ voor alle $x \in H$:

$$\bigwedge_{\alpha \in H^*} \quad \overset{1}{\bigvee_{y \in H}} \quad \bigwedge_{x \in H} \quad \alpha(x) = \langle x \mid y \rangle \ .$$

Bewijs. Voor de uniciteit bereken $0 = \langle x \mid y \rangle - \langle x \mid z \rangle = \langle x \mid y - z \rangle$ voor alle $x \in H$ en concludeer $y = z$. Voor de existentie neem $y = 0$ indien $\alpha(x) \equiv 0$. Anders is

$$F \quad := \quad \ker \alpha \quad = \quad \left\{ \, z \in H \;\middle|\; \alpha(x) = 0 \, \right\}$$

een échte gesloten deelruimte en dus bestaat $0 \neq w \in F^{\perp}$. Dan geldt $\alpha(\alpha(x)w - \alpha(w)x) = 0$ voor alle $x \in H$ en op zulke vectoren staat w loodrecht, d.w.z.

$$0 \quad = \quad \langle \alpha(x)w \; - \; \alpha(w)x \mid w \rangle \quad = \quad \alpha(x)\|w\|^2 \; - \; \alpha(w)\langle x \mid w \rangle$$

en daarmee is

$$y \quad := \quad \frac{\overline{\alpha(w)}}{\|w\|^2} w$$

de gezochte vector die de lineaire vorm α representeerd. $\square$

De afbeelding $\alpha \mapsto y$ is een isometrie $H^* \longrightarrow H$ van de duale ruimte van H op H zelf. Net zo is H^{**} isometrisch met H^* en de compositie van deze isometrieën komt overeen met de identificatie $H = H^{**}$, alle Hilbertruimten zijn reflexief.

Banachruimten zijn *niet* altijd reflexief, voorbeelden zijn ℓ^1 en ℓ^∞, maar zelfs als $E = E^{**}$ hoeft E niet isometrisch met E^* te zijn. Neem bv. $p, q > 1$ met
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 ,$$
dan is
$$\left(\ell^p\right)^* = \ell^q$$
en om symmetrie-redenen $\ell^p = \left(\ell^q\right)^* = \left(\ell^p\right)^{**}$ reflexief, maar niet isometrisch met de duale ruimte. De uitzondering $p = q = 2$ hierop wordt juist door de Hilbertruimte ℓ^2 gemaakt.

Het kiezen van een basis speelt in eindige dimensie een belangrijke rol, en de kanonieke basis van $\mathbb{K}^n$ is zelfs een orthonormaalbasis.

Definitie 4.6. Een systeem $(e_k)_k$ van vectoren in een inproductruimte noemen we een orthonormaalsysteem als
$$\langle e_k \mid e_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 \text{ als } k = l \\ 0 \text{ als } k \neq l \end{cases} .$$

In dimensie n is elk orthonormaalsysteem $\{e_1, \ldots, e_n\}$ van lengte n een basis.

Voorbeeld 4.7. In $C([0,1], \mathbb{C}) \subseteq L^2([0,1], \mathbb{C})$ is
$$\left\{ t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k t} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$
een orthonormaalsysteem (en in de inproductruimte en in de Hilbertruimte), de integraal
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k t} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} l t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(k-l)t} \, \mathrm{d}t$$
is gelijk aan 1 voor $k = l$ en gelijk aan
$$\left. \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(k-l)t}}{2\pi \mathrm{i}(k-l)} \right|_0^1 = 0$$
voor $k \neq l$. $\triangle$

Voorbeeld 4.8. De verzameling $\{ \mathbb{1}, \sqrt{2} \cos 2\pi k t, \sqrt{2} \sin 2\pi k t \mid k \in \mathbb{N} \}$ met $\mathbb{1}(t) := 1$ voor alle $t \in [0,1]$ vormt een orthonormaalsysteem in $C[0,1] \subseteq L^2[0,1]$ ongeacht of $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. $\triangle$

Stelling 4.9. Zij $(e_k)_k$ een orthonormaalsysteem van een Hilbertruimte H. Dan is de reeks $z = \sum \lambda_k e_k$ dan en slechts dan de ontbinding van een element $z \in H$ als $\lambda_k = \langle z \mid e_k \rangle$ en $(\lambda_k)_k \in \ell^2$.

I.h.b. is elk orthonormaalsysteem lineair onafhankelijk.

Bewijs. Bereken

$$\langle z \mid e_l \rangle \;=\; \langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \mid e_l \rangle \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k \mid e_l \rangle \;=\; \lambda_l$$

en

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_k \bar{\lambda}_l \delta_{kl} \;=\; \langle \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \mid z \rangle \;=\; \|z\|^2 \;\in\; \mathbb{R} \;.$$

Omgekeerd bekijk $x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ voor $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Dan is $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij, want

$$\|x_{n+m} - x_n\|^2 \;=\; \sum_{k=n+1}^{n+m} |\lambda_k|^2 \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0$$

en H is volledig. □

Het bewijs construeert in feite een isometrie van ℓ^2 met

$$F \;=\; \left\{ z \in H \;\middle|\; z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right\}$$

waardoor F volledig en daarmee gesloten in H is, dus $H = F \oplus F^{\perp}$. Voor $x \in H$ schrijf $x = z + w$ met $z = \pi(x)$ en $w \in F^{\perp}$ en met Pythagoras volgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x \mid e_k \rangle|^2 \;=\; \|z\|^2 \;=\; \|x\|^2 \;-\; \|w\|^2 \;\leq\; \|x\|^2 \;,$$

de *ongelijkheid van Bessel.* De orthogonale projectie op F wordt gegeven door

$$\pi(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \langle x \mid e_k \rangle \, e_k \;.$$

Voorbeeld 4.10. (Gram–Schmidt orthonormaliseringsprocedure). Zij $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ een rij in de Hilbertruimmte H, bv. $(t^k)_k \in L^2[0,1]^{\mathbb{N}}$. De initiale stap is

$$e_1 \;:=\; \frac{f_1}{\|f_1\|}$$

dus bereken

$$\int_0^1 \left(t^1\right)^2 \, \mathrm{d}t \;=\; \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 \;=\; \frac{1}{3}$$

waarmee $\|t\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ en $e_1(t) = \sqrt{3} \cdot t$; we hebben $< e_1 > = < f_1 >$. Voor de inductiestap spannen de orthonormale vectoren $e_1, \ldots, e_n$ dezelfde ruimte op als de gegeven vectoren $f_1, \ldots, f_n$. Bereken de orthogonale projectie $\pi(f_{n+1})$ op deze ruimte en kies

$$e_{n+1} \;:=\; \frac{f_{n+1} - \pi(f_{n+1})}{\|f_{n+1} - \pi(f_{n+1})\|} \enspace .$$

In het voorbeeld is voor $n = 1$

$$\pi(f_2) \;=\; \sum_{k=1}^{1} \langle f_2 \mid e_k \rangle e_k \enspace ,$$

dus bereken

$$\int_0^1 t^2 \sqrt{3}\, t \, \mathrm{d}t \;=\; \left.\frac{\sqrt{3}}{4} t^4 \right|_0^1 \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4}$$

en tenslotte

$$\|t^2 - \frac{3}{4} t\|_2^2 \;=\; \int_0^1 \left(t^2 - \frac{3}{4} t\right)^2 \mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{80}$$

waarmee $e_1(t) = \sqrt{80}(t^2 - \frac{3}{4} t)$. Merk op dat de berekeningen zelf altijd in een vectorruimte $< f_1, \ldots, f_{n+1} >$ van eindige dimensie plaatsvinden. △

Hoe kunnen we nagaan of een orthonormaalsysteem compleet is in de zin dat *elk* element in de $(e_k)_k$ kan worden ontbonden?

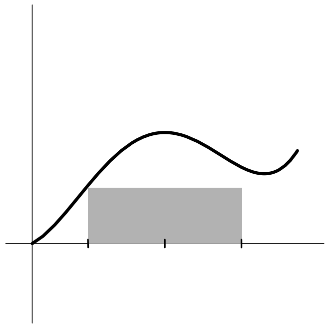
Stelling (en definitie) 4.11. Voor een orthonormaalsysteem $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in een Hilbertruimte H zijn de volgende uitspraken equivalent.

- *(i)* $\overline{< e_k \mid k \in \mathbb{N} >} = H$.
- *(ii)* $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *is een maximaal orthonormaalsysteem.*
- *(iii)* *Als* $\langle x \mid e_k \rangle = 0$ *voor alle* $k \in \mathbb{N}$ *dan is* $x = 0$.
- *(iv)* *Voor alle* $x \in H$ *geldt* $\|x\|^2 = \sum |\langle x \mid e_k \rangle|^2$.
- *(v)* *Voor alle* $x \in H$ *geldt* $x = \sum \langle x \mid e_k \rangle e_k$.

We noemen $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dan een compleet orthonormaalsysteem van H.

Bewijs. De implicaties $(iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii)$ zijn een gemakkelijke oefening, laat dus nog $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv)$ zien.

Voor de implicatie $(iii) \Rightarrow (ii)$ gebruik contrapositie: indien (ii) niet waar is bestaat er dus $x = e_0$ zodanig dat ook $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ een orthonormaalsysteem is. Dan is i.h.b. $\langle e_0 \mid e_k \rangle = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ maar ook $\|e_0\| = 1$, dus $e_0 \neq 0$ en aan (iii) is niet voldaan.



Figuur 4.2. Onder de grafiek van de continue functie f kunnen we een heel rechthoek plaatsen.

Nu nog niet$(iv) \Rightarrow$ niet(ii). Indien de ongelijkheid van Bessel een echte ongelijkheid is moet $\|w\| \neq 0$ zijn voor het gedeelte w van x loodrecht op $F = \overline{< e_k \mid k \in \mathbb{N} >}$, voeg dan $e_0 = \dfrac{w}{\|w\|} \in F^\perp$ aan het orthonormaalsysteem toe. $\square$

In (iv) is de ongelijkheid van Bessel veranderd in de *vergelijking van Parseval*, deze luidt meer algemeen

$$\langle x \mid y \rangle \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \langle x \mid e_k \rangle \overline{\langle y \mid e_k \rangle} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \langle x \mid e_k \rangle \langle e_k \mid y \rangle$$

en volgt onmiddelijk uit (v). Bovendien is het voldoende om (iii) op alle $x \in V$ van een dichte deelruimte $\overline{V} = H$ te toetsen. Immers,

$$\overline{F^\perp \cap V} \;=\; F^\perp \cap \overline{V}$$

en $\overline{\{0\}} = \{0\}$. Dit gebruiken we nu om te laten zien dat het orthonormaalsysteem $\{t \mapsto \exp(2\pi i k t) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ compleet is.

Stelling 4.12. De verzameling $\{\, \mathbb{1}, \sqrt{2}\cos 2\pi k t, \sqrt{2}\sin 2\pi k t \mid k \in \mathbb{N}\,\}$ *vormt een compleet orthonormaalsysteem van* $L^2[0,1]$.

Bewijs. Zij $0 \neq f \in C([0,1],\mathbb{R})$ loodrecht op het orthonormaalsysteem. De continue functie $|f|$ neemt in $t_0 \in [0,1]$ een maximum aan, en we mogen $f(t_0) > 0$ veronderstellen (werk anders met $-f$). Zoals in figuur 4.2 te zien bestaat $\delta > 0$ zodanig, dat $f(t) > \frac{1}{2} f(t_0)$ voor alle $t \in \,]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Definieer

$$g(t) \;:=\; 1 \;+\; \cos 2\pi(t - t_0) \;-\; \cos 2\pi\delta$$

en omdat we δ altijd kleiner kunnen kiezen mogen we $\delta < \frac{1}{4}$ aannemen, dus $\cos 2\pi\delta > 0$. Dan is

$$\begin{aligned} g(t) \;&>\; 1 \qquad \text{voor alle } t \in \,]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\\ |g(t)| \;&\leq\; 1 \qquad \text{voor alle } t \notin \,]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\end{aligned}$$

want $t \in [0,1]$. Op een gesloten interval binnen $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, bv. op $[t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}]$ heeft g een minimum $\mu > 1$. De functie

$$(g(t))^n \;=\; (1 \,+\, \cos 2\pi t_0 \cdot \cos 2\pi t \,+\, \sin 2\pi t_0 \cdot \sin 2\pi t \,-\, \cos 2\pi\delta)^n$$

is een trigonometrisch polynoom en staat dus loodrecht op f voor alle $n \in \mathbb{N}$, d.w.z.

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \langle f \mid g^n \rangle \;=\; \int_0^1 f(t)(g(t))^n \,\mathrm{d}t \\ &=\; \int_0^{t_0-\delta} f(t)(g(t))^n \,\mathrm{d}t \;+\; \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)(g(t))^n \,\mathrm{d}t \;+\; \int_{t_0+\delta}^{1} f(t)(g(t))^n \,\mathrm{d}t \;. \end{aligned}$$

Voor de eerste en derde term is $|g(t)|^n \leq 1$ en kunnen we

$$\left|\int f(t)(g(t))^n \,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \int |f(t)| \,\mathrm{d}t \;\leq\; \|f\|_1 \;\leq\; \|f\|_2 \;\in\; \mathbb{R}$$

afschatten, maar de tweede term

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)(g(t))^n \,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_{t_0-\frac{\delta}{2}}^{t_0+\frac{\delta}{2}} \frac{f(t_0)}{2} \cdot \mu^n \,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\delta f(t_0)}{2} \cdot \mu^n \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \infty$$

en dat is absurd, want de som blijft 0 voor alle n. Voor $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ neem nu reële en imaginaire gedeeltes. □

De ontbinding van een functie in sinus en cosinus is haar Fourierreeks

$$f(t) \;=\; a_0 \;+\; \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos 2\pi k t \;+\; \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k \sin 2\pi k t$$

met coefficienten

$$\begin{aligned} a_0 \;&=\; \langle f \mid \mathbb{1} \rangle \;=\; \int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t \\ a_k \;&=\; 2\,\langle f \mid \cos 2\pi k \rangle \;=\; 2\int_0^1 f(t) \cos(2\pi k t) \,\mathrm{d}t \\ b_k \;&=\; 2\,\langle f \mid \sin 2\pi k \rangle \;=\; 2\int_0^1 f(t) \sin(2\pi k t) \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

die voor reëelwaardige functies reëel zijn. Vanwege $\cos x + \mathrm{i} \sin x = \exp \mathrm{i}x$ is

$$\overline{< t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k t} \;\mid\; k \in \mathbb{Z} >} \;=\; L^2([0,1], \mathbb{C})$$

en de Fouriercoëfficienten

$$c_k \;=\; \langle f \mid \exp 2\pi \mathrm{i} k \rangle \;=\; \int_0^1 f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} k t} \,\mathrm{d}t$$

in

$$f(t) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kt}$$

voldoen voor reëelwaardige functies aan $c_{-k} = \bar{c}_k$.

Definitie 4.13. Een afbeelding $U : H \longrightarrow G$ tussen Hilbertruimten is unitair als U lineair en surjectief is en voor alle $x, y \in H$ geldt dat $\langle Ux \mid Uy\rangle = \langle x \mid y\rangle$. We noemen H en G dan unitair equivalent.

De vergelijking van Parseval laat zien dat

$$x \;\mapsto\; (\langle x \mid e_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$$

een unitaire operator $H \longrightarrow \ell^2$ definieert als $(e_k)_k$ een compleet orthonormaalsysteem van H is. Iedere separabele Hilbertruimte is unitair equivalent of met $\mathbb{K}^n$ of met ℓ^2.

5

Compacte verzamelingen

Zie ook §§2.1 en 6.1 in [10], §§1.11, 1.12 en 1.26 in [16], §§2.1 en 5.4 in [15], §§1.2, 2.2 en 2.3 in [9], §§3.16, 3.17, 7.1. en 7.3–7.5 in [4] of §§1.1, 2.4 en 7.3 in [13].

Waar wiskunde de wetenschap van het oneindige is, is 'compactheid' de eigenschap 'dicht bij eindig'. Over een eindige verzameling heeft elke functie een minimum. De approximatiestelling 4.1 is in feite ook daarom zo opzienbarend omdat ze een minimum over een niet-compacte verzameling oplevert.

Definitie 5.1. Een (deelverzameling van een) metrische ruimte V is compact als elke overdekking $(U_i)_{i\in I}$ door open verzamelingen een eindige deeloverdekking $V \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ bevat en precompact als er voor elke $\varepsilon > 0$ een eindige overdekking $V \subseteq U_\varepsilon(x_1) \cup \ldots \cup U_\varepsilon(x_n)$ bestaat.

Wat betekent dit? Overdekken met eindig veel open verzamelingen is op zich niet moeilijk, daarom is de beperking tot 'kleine' open verzamelingen in de definitie van precompact cruciaal. Een precompacte verzameling is i.h.b. begrensd.

Bij de eigenschap compact gaat het om iets anders. We mogen zelf een overdekking

$$V \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

door open verzamelingen kiezen, bv. de $\frac{1}{2}$–omgevingen

$$U_{\frac{1}{2}}(x) = \left\{ y \in V \;\middle|\; \mathrm{d}(x,y) < \frac{1}{2} \right\}$$

met *alle* $x \in V$ en als/omdat V compact is zijn er al eindig veel *van deze* open verzamelingen voldoende om V te overdekken. In het voorbeeld volgt dus

$$V \subseteq U_{\frac{1}{2}}(x_1) \cup \ldots \cup U_{\frac{1}{2}}(x_n)$$

en daarom is er een eindige verzameling $\{x_1, \ldots, x_n\}$ binnen een compacte metrische ruimte zodanig, dat elk punt $y \in V$ hooguit afstand $\mathrm{d}(x_i, y) < \frac{1}{2}$ tot minstens één van deze punten heeft.

Voorbeeld 5.2. Eindige verzamelingen zijn compact (en precompact). △

Compactheid is een krachtige eigenschap, leuk om te hebben en moeilijk om na te gaan. Daarom zijn criteria hiervoor belangrijk.

Stelling 5.3. Voor een metrische ruimte V zijn de volgende uitspraken equivalent.

(*i*) *V is compact.*
(*ii*) *V is volledig en precompact.*
(*iii*) *V is rij-compact, d.w.z. elke rij in V heeft een convergente deelrij.*

Indien de afsluiting compact is noemen we een verzameling *relatief compact*, in een volledige metrische ruimte is dat equivalent met precompact.

Bewijs. Voor $(i) \Rightarrow (iii)$ stel dat $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ een rij zonder convergente deelrij is; d.w.z. geen punt in V is limietpunt van een deelrij van $(y_k)_k$, ofwel

$$\bigwedge_{x\in V} \quad \bigvee_{\varepsilon_x>0} \quad U_{\varepsilon_x}(x) \text{ bevat hooguit eindig veel van de } y_k.$$

Omdat V compact is heeft de overdekking

$$V \;\subseteq\; \bigcup_{x\in V} U_{\varepsilon_x}(x)$$

een eindige deeloverdekking $V \subseteq U_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \cup \ldots \cup U_{\varepsilon_{x_n}}(x_n)$ en dat is absurd (want dan zou ook V maar eindig veel van de y_k bevatten).

Uitgaande van (*iii*) heeft elke Cauchy-rij een convergente deelrij en is dus zelf convergent, ofwel V is volledig. Indien V niet precompact is bestaat een getal $\varepsilon > 0$ met de eigenschap dat eindig veel ε–omgevingen $U_\varepsilon(x)$ de hele ruimte V niet kunnen overdekken. Construeer hieruit inductief een rijtje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zonder convergente deelrij.

Voor $(ii) \Rightarrow (i)$ neem aan dat er een open overdekking $(W_i)_{i\in I}$ zonder eindige deeloverdekking is. Elke deelverzameling $D \subseteq V$ is precompact, daarom zijn er voor elk $n \in \mathbb{N}$ eindig veel punten $x_1, \ldots, x_{m(n)} \in D$ met de eigenschap, dat ieder punt in D tot minstens één van deze punten een afstand kleiner dan 2^{-n} heeft. Construeer hiermee inductief een rijtje $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ waarvoor de 2^{-n}–omgeving $U_{2^{-n}}(y_n)$ het punt y_{n+1} bevat maar niet zelf in een eindige vereniging van W_i bevat is. Vanwege

$$\mathrm{d}(y_{n+k}, y_n) \;\le\; \sum_{l=1}^{k} \mathrm{d}(y_{n+l}, y_{n+l-1}) \;\le\; \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^{n+l-1}} \;<\; \frac{1}{2^{n-1}}$$

is dit een Cauchy-rij, zij $z \in V$ diens limietpunt en $j \in I$ een index waarvoor $z \in W_j$. Omdat W_j open is bestaat $\varepsilon > 0$ met $U_\varepsilon(z) \subseteq W_j$ en omdat $(y_n)_n$ naar z convergeert bestaat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ met $y_n \in U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(z)$ voor alle $n \ge n_\varepsilon$. Kies nu $n \ge n_\varepsilon$ met $2^{-n+1} < \varepsilon$. Dan is

$$\mathrm{d}(x,z) \;\leq\; \mathrm{d}(x,y_n) + \mathrm{d}(y_n,z) \;\leq\; \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon$$

voor alle $x \in U_{2^{-n}}(y_n)$ en dat is absurd, want geen eindig aantal (laat staan een enkele) van de W_i mag $U_{2^{-n}}(y_n)$ overdekken. $\square$

Daarmee zijn alle eigenschappen van rij-compacte verzamelingen ook voor compacte verzamelingen geldig, i.h.b. zijn compacte deelverzamelingen gesloten en separabel.

Voorbeeld 5.4. Een deelverzameling $V \subseteq \mathbb{K}^n$ is dan en slechts dan compact, als V gesloten en begrensd is; elke begrensde verzameling is precompact. $\triangle$

De beelden van compacte verzamelingen onder een continue afbeelding zijn weer compact. We kunnen daarom de Banachruimte $C[0,1]$ generaliseren door de definitie

$$\|f\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in V} |f(x)| \;\stackrel{!}{=}\; \max_{x\in V} |f(x)|$$

van de supremum-norm naar willekeurige compacta V uit te breiden. De volledigheid van $C(V)$ berust weer erop dat de uniforme limiet van continue functies zelf continu is.

Op $C[0,1]$ hebben we ook andere normen, ten opzichte waarvan deze ruimte niet volledig is. In eindige dimensie is deze situatie uitgesloten.

Stelling 5.5. Alle normen op $\mathbb{K}^n$ zijn equivalent.

Bewijs. Ontbind $x = \sum \lambda_k e_k \in \mathbb{K}^n$ in de kanonieke orthonormaalbasis $e_1, \ldots, e_n$ en schat voor een gegeven norm

$$\|x\| \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\|e_k\| \;\stackrel{!}{\leq}\; \left\| \begin{pmatrix} |\lambda_1| \\ \vdots \\ |\lambda_n| \end{pmatrix} \right\|_2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} \|e_1\| \\ \vdots \\ \|e_n\| \end{pmatrix} \right\|_2 \;=\; \sqrt{\sum \|e_k\|^2} \cdot \|x\|_2$$

af, waarbij we in $\stackrel{!}{\leq}$ de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz in de Hilbertruimte $(\mathbb{K}^n, \|..\|_2)$ toepassen. Dit is de gewenste afschatting $\|..\| \leq M\|..\|_2$ en laat tegelijk zien dat $\|..\|$ op $(\mathbb{K}^n, \|..\|_2)$ continu is. Op de compacte verzameling

$$\left\{ \, y \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \|y\|_2 = 1 \, \right\}$$

neemt $\|..\|$ een minimum $m > 0$ aan, waarmee ook 'andersom' $m\|x\|_2 \leq \|x\|$ voor alle $x \in \mathbb{K}^n$. $\square$

Indien de deelruimte $F < E$ van een genormeerde ruimte eindige dimensie heeft kunnen we een basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ kiezen en

$$T \;:\; x \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k \;\mapsto\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

gebruiken om een norm op $\mathbb{K}^n$ te definiëren die de bijectieve lineaire afbeelding $T : F \longrightarrow \mathbb{K}^n$ een isometrie maakt. Daarom is F volledig en i.h.b. gesloten in E. Een dichte deelruimte $F \neq E$ heeft dus altijd oneindige dimensie. Een operator $T : E \longrightarrow F$ heeft *eindige rang* indien de dimensie van de deelruimte $\operatorname{im} T < F$ eindig is.

Stelling 5.6. Een operator $T : E \longrightarrow F$ van eindige rang tussen genormeerde ruimten is dan en slechts dan begrensd als $\ker T$ *een gesloten deelruimte van E is.*

I.h.b. is een lineaire vorm $\alpha : E \longrightarrow \mathbb{K}$ dan en slechts dan onbegrensd als $\ker \alpha$ in E dicht ligt.

Bewijs. Voor begrensde T is $\ker T = T^{-1}(0)$ zeker gesloten. Omgekeerd is de projectie $\rho : E \longrightarrow E/_{\ker T}$ begrensd en volgens het bewijs van de homomorfiestelling 3.10 kunnen we $T = \iota \circ S \circ \rho$ schrijven waar $\iota : \operatorname{im} T \longrightarrow F$ de (isometrische) inclusie is en

$$S : \begin{array}{ccc} E/_{\ker T} & \longrightarrow & \operatorname{im} T \\ x + \ker T & \mapsto & T(x) \end{array}$$

een bijectieve lineaire afbeelding. Met $\operatorname{im} T$ heeft ook de quotientruimte eindige dimensie. D.m.v. $|||y||| := \|Sy\|$ kunnen we op $E/_{\ker T}$ een tweede norm definiëren en volgens stelling 5.5 zijn alle normen equivalent. I.h.b. bestaat $M > 0$ met

$$\bigwedge_{y \in E/_{\ker T}} \quad \|Sy\| \;=\; |||y||| \;\leq\; M \, \|y\|$$

ofwel S is begrensd en daarmee is ook T begrensd. $\square$

De projectie op een eindigdimensionaal supplement van een gesloten deelruimte voldoet aan deze voorwaarden en is daarom automatisch begrensd.

Gevolg 5.7. Indien $\dim V < \infty$ *is elke algebraïsche directe som met een gesloten supplement F een topologische directe som $E = V \oplus F$.* $\square$

Men noemt een metrische ruimte *lokaal compact* indien elk punt een compacte omgeving heeft. Deze eigenschap karakteriseert eindigdimensionale genormeerde ruimten

Stelling 5.8. Zij E een genormeerde ruimte en $\overline{U_1(0)} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ compact. Dan heeft E eindige dimensie.

Bewijs. Er zijn dus eindig veel punten $a_1, \ldots, a_n \subseteq \overline{U_1(0)}$ met de eigenschap dat

$$\overline{U_1(0)} \;\subseteq\; U_{\frac{1}{2}}(a_1) \,\cup\, \ldots \,\cup\, U_{\frac{1}{2}}(a_n) \;. \tag{5.1}$$

Definieer $F := < a_1, \ldots, a_n >$ en laat $E = F$ uit het ongerijmde zien, zij dus $x \in E \backslash F$. De afstand

$$d \;:=\; \mathrm{d}(x,F) \;:=\; \inf\left\{ \|x-y\| \;\middle|\; y \in F \right\} \;>\; 0$$

is echt positief, want anders zou $x \in \overline{F} = F$ zijn. Neem $y \in F$ met $d \leq \|x-y\| \leq \frac{3}{2}d$ en bekijk

$$z \;:=\; \frac{x-y}{\|x-y\|} \;\in\; \overline{U_1(0)}\;;$$

vanwege (5.1) bestaat $k \in \{1,\ldots,n\}$ met $\|z-a_k\| < \frac{1}{2}$. We hebben nu

$$x \;=\; y \;+\; \|x-y\|\,z \;=\; \underbrace{y \;+\; \|x-y\|\,a_k}_{\in F} \;+\; \underbrace{\|x-y\|\,(z-a_k)}_{\Longrightarrow\;\notin F}$$

waarmee $\|x-y\|\,\|z-a_k\| \geq d$ en dat is absurd, want dan zou $\|x-y\| > 2d$ zijn. □

Een gesloten en begrensde verzameling is dus alleen in eindige dimensie automatisch compact, bv. is in een Hilbertruimte elk orthonormaalsysteem een begrensde rij zonder convergente deelrij. In oneindige dimensie moeten we voor compactheid hogere eisen stellen. Een verzameling $M \subseteq C(V)$ van continue functies op de compacte metrische ruimte V heet *uniform equicontinu* als

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\;\bigvee_{\delta>0}\;\bigwedge_{x,y\in V}\;\bigwedge_{f\in M}\quad \mathrm{d}(x,y) \;<\; \delta \;\;\Longrightarrow\;\; |f(x)-f(y)| \;<\; \varepsilon\;.$$

Het 'equi' duidt aan dat δ niet van f afhangt, en de uniformiteit betekent (net als bij uniforme continuïteit) onafhankelijkheid van het punt x waarin M equicontinu is.

Voorbeeld 5.9. Indien voor $M \subseteq C^1[0,1] \subseteq C[0,1]$ een $C > 0$ bestaat met

$$\bigwedge_{f\in M}\quad \|f'\|_\infty \;\leq\; C$$

is M uniform equicontinu. △

Stelling 5.10. (Arzelà–Ascoli). Zij V compact. Dan is $M \subseteq C(V)$ dan en slechts dan compact als M gesloten, begrensd en uniform equicontinu is.

Bewijs. Elke compacte verzameling is gesloten en begrensd, laat zien dat M ook uniform equicontinu is. Overdek M hiervoor met eindig veel $\frac{1}{3}\varepsilon$–omgevingen $U_{\frac{1}{3}\varepsilon}(f_k)$, $k = 1,\ldots,m$. Vanwege de compactheid van V zijn de f_k uniform continu, er zijn dus $\delta_1,\ldots,\delta_m$ waarvoor

$$\bigwedge_{x,y\in V}\quad \mathrm{d}(x,y) \;<\; \delta_k \;\;\Longrightarrow\;\; |f_k(x)-f_k(y)| \;<\; \frac{\varepsilon}{3}\;.$$

Voor $\mathrm{d}(x,y) < \delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ is dan

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; |f(x) - f_k(x)| \;+\; |f_k(x) - f_k(y)| \;+\; |f_k(y) - f(y)| \;<\; \varepsilon$$

voor alle $f \in M$.

Zij omgekeerd $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$, we zoeken een Cauchy-deelrij; houdt hiervoor $\varepsilon > 0$ vast en kies alvast $\delta > 0$ behorende bij $\frac{\varepsilon}{3}$ volgens de equicontinuïteit. In de separabele ruimte V bestaat een dichte rij $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$. De begrensde rij $(f_k(x_1))_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heeft een convergente deelrij $f^{1l}(x_1) := f_{k_l}(x_1)$ en inductief zijn er deelrijen $(f^{jl})_l$ van $(f^{j-1,l})_l$ (en dus uiteindelijk van $(f_k)_k$) die in de punten $x_1, x_2, \ldots, x_j$ convergent zijn. De diagonaalrij $(f^{jj})_j$ is een deelrij van $(f_k)_k$ die in alle punten x_j, $j \in \mathbb{N}$ convergeert, i.h.b. bestaan $n_j \in \mathbb{N}$ met

$$\bigwedge_{n,m\geq n_j} \quad |f^{nn}(x_j) - f^{mm}(x_j)| \;<\; \frac{\varepsilon}{3} \;.$$

De δ–omgevingen $U_\delta(x_j)$, $j \in \mathbb{N}$ overdekken V en V is compact, dus al in een eindige vereniging $U_\delta(x_1) \cup \ldots \cup U_\delta(x_\ell)$ bevat. Neem nu $n_\varepsilon := \max\{n_1, \ldots, n_\ell\}$, dan geldt voor $n, m \geq n_\varepsilon$ en ieder $x \in V$ (waarvoor we $j \in \{1, \ldots, \ell\}$ met $x \in U_\delta(x_j)$ bepalen) dat

$$\begin{aligned} |f^{nn}(x) - f^{mm}(x)| \;&\leq\; |f^{nn}(x) - f^{nn}(x_j)| \;+\; |f^{nn}(x_j) - f^{mm}(x_j)| \\ &\quad +\; |f^{mm}(x_j) - f^{mm}(x)| \;<\; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon \end{aligned}$$

en voor het maximum over alle $x \in V$ zoals gewenst $\|f^{nn} - f^{mm}\|_\infty < \varepsilon$. $\square$

De Banachruimte $C(V)$ heeft ook een ringstructuur die ervan een algebra maakt, want voor $f, g \in C(V)$ geldt voor het (puntsgewijs) product dat $f \cdot g \in C(V)$ en deze bewerking is associatief

$$\bigwedge_{f,g,h\in C(V)} \quad (f \cdot g) \cdot h \;=\; f \cdot (g \cdot h) \;,$$

distributief

$$\bigwedge_{f,g,h\in C(V)} \quad (f + g) \cdot h \;=\; f \cdot h \;+\; g \cdot h$$

en zelfs commutatief

$$\bigwedge_{f,g\in C(V)} \quad (f \cdot g) \;=\; g \cdot f \;.$$

Bovendien is er een neutraal element $\mathbb{1}(x) \equiv 1$, de één met de eigenschap $\mathbb{1} \cdot f = \mathbb{1}$ voor alle $f \in C(V)$. T.o.v. scalairen geldt

$$\bigwedge_{f,g\in C(V)} \quad \bigwedge_{\lambda\in\mathbb{K}} \quad \lambda\,(f \cdot g) \;=\; (\lambda f) \cdot g \;=\; f \cdot (\lambda g)$$

en de afschatting

$$\bigwedge_{f,g \in C(V)} \|f \cdot g\| \ \leq \ \|f\| \, \|g\|$$

is het kenmerk van een *genormeerde algebra*. We zeggen dan ook dat $C(V)$ een commutatieve Banachalgebra met één is. Voor een deelverzameling $D \subseteq B$ van een (Banach)algebra is er naast het opspansel $< D >$ ook de door D voorgebrachte algebra — deze hoeft de één niet te bevatten.

Voorbeeld 5.11. De door $\mathbb{1}$ en x voortgebrachte algebra $\mathbb{K}[x]$ bestaat uit alle veeltermen. $\triangle$

Stelling 5.12. (Stone–Weierstraß). Zij V compact en $D \subseteq C(V, \mathbb{R})$ met

(*i*) *D bevat een constante functie,*
(*ii*) *D separeert de punten in V, d.w.z.* $\displaystyle\bigwedge_{x,y \in V} \bigvee_{f \in D} f(x) \neq f(y)$.

Dan ligt de door D voortgebrachte algebra A dicht in $C(V, \mathbb{R})$.

Bewijs. Zij dus $f \in C(V, \mathbb{R})$. Tel er desnoods $\|f\|_\infty$ bij op, dan is $f \geq 0$. Zij verder $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. Dan is er $n \in \mathbb{N}$ met $\frac{1}{2}(n-1)\varepsilon \geq \|f\|_\infty$. Definieer

$$X_k \ := \ \left\{ x \in V \ \middle| \ f(x) \leq (k - \frac{1}{3})\frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

en

$$Y_k \ := \ \left\{ x \in V \ \middle| \ f(x) \geq (k + \frac{1}{3})\frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

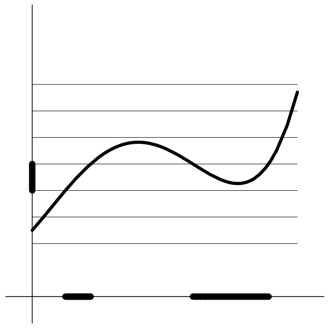
voor $k = 0, \ldots, n$. Dan is $X_k \cap Y_k = \emptyset$, vormen de verzamelingen $\emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_n = V$ een stijgende rij en $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \ldots \supseteq Y_{n-1} \supseteq Y_n = \emptyset$ een dalende rij. Voor $x \in V$ bestaat dus $k \in \{1, \ldots, n\}$ met $x \in X_k \backslash X_{k-1}$ en we concluderen

$$(k - 1 - \frac{1}{3})\,\frac{\varepsilon}{2} \ < \ f(x) \ \leq \ (k - \frac{1}{3})\,\frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

d.w.z. de waarden op $X_k \backslash X_{k-1}$ liggen $\frac{\varepsilon}{2}$–dicht bij elkaar. De onderverdeling t.o.v. de waarden is in figuur 5.1 geschetst. Om een functie in A te construeren waarvoor dit ook geldt hebben we het volgende lemma nodig.

Lemma 5.13. Gegeven gesloten $X, Y \subseteq V$ met $X \cap Y = \emptyset$ en $\delta > 0$. Dan bestaat $g \in A$ met

(*i*) *$0 \leq g(x) \leq 1$ voor alle $x \in V$.*
(*ii*) *$g(x) \leq \delta$ voor alle $x \in X$.*
(*iii*) *$g(x) \geq 1 - \delta$ voor alle $x \in Y$.*



Figuur 5.1. De verzamelingen $X_k \backslash X_{k-1}$ zijn zo gedefinieerd dat de waarden van alle punten erin hooguit om ε van elkaar verschillen.

Hiermee hebben we 'afkapfuncties' tot onze beschikking, zie figuur 5.2.a voor een voorbeeld. Pas dit toe op X_j en Y_j met $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$ en verkrijg $g_j \in A$, $j = 0, \ldots, n$. Definieer

$$g \;:=\; \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=0}^{n} g_j$$

en controleer dat dit werkt.

Als $j \geq k$ (en k is nog steeds zo gekozen dat $x \in X_k \backslash X_{k-1}$) dan is $g_j(x) \leq \frac{\varepsilon}{n}$ en dus

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=0}^{k-1} g_j(x) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=k}^{n} g_j(x) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \cdot k \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{2} (n-k+1) \frac{\varepsilon}{n} \\ &\leq \frac{k\varepsilon + \varepsilon^2}{2} \;<\; (k + \frac{1}{3}) \frac{\varepsilon}{2} \;. \end{aligned}$$

Bovendien is $x \in Y_j$ voor $j \leq k-2$ en dus $g_j(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{n}$ en daarmee

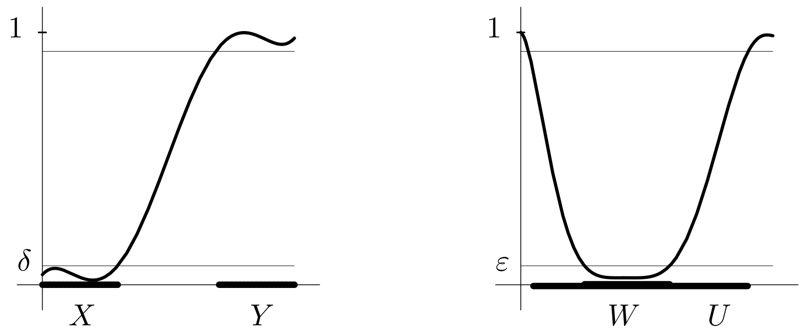
$$\begin{aligned} g(x) &\geq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=0}^{k-2} g_j(x) \;\geq\; \frac{\varepsilon}{2}(k-1)(1 - \frac{\varepsilon}{n}) \;=\; (k-1)\frac{\varepsilon}{2} - \frac{k-1}{2n}\varepsilon^2 \\ &> \frac{(k-1)\varepsilon - \varepsilon^2}{2} \;>\; (k - 1 - \frac{1}{3}) \frac{\varepsilon}{2} \;. \end{aligned}$$

Hieruit volgt 'voor deze x'

$$|f(x) - g(x)| \;<\; (k + \frac{1}{3})\frac{\varepsilon}{2} - (k - \frac{4}{3})\frac{\varepsilon}{2} \;=\; \frac{5}{6}\,\varepsilon$$

en dus uiteindelijk voor alle $x \in V$, ofwel $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. □

We moeten nog de 'afkapfuncties' uit figuur 5.2.a construeren. Hiervoor construeren we eerst een functie zoals in figuur 5.2.b geschetst.



Figuur 5.2.a. Deze veeltermfunctie is bijna 0 op X en bijna 1 op Y. **5.2.b.** Deze veeltermfunctie is bijna 0 op W en bijna 1 buiten U.

Lemma 5.14. Zij $z \in V$ en $U \subseteq V$ een open omgeving van z. Dan bestaat een open omgeving $W \subseteq U$ van z zodanig, dat er voor elk $\varepsilon > 0$ een $g \in A$ is met

(i) $0 \leq g(x) \leq 1$ *voor alle* $x \in V$.
(ii) $g(x) \leq \varepsilon$ *voor alle* $x \in W$.
(iii) $g(x) \geq 1 - \varepsilon$ *voor alle* $x \in V \backslash U$.

Bewijs. Gegeven $x \in V \backslash U$ bestaat $h_x \in D$ met $h_x(x) \neq h_x(z)$, gebruik deze functie om

$$p_x(y) \quad := \quad \frac{(h_x(y) - h_x(z))^2}{\|h_x - h_x(z)\|_\infty^2}$$

te definiëren; de functie $p_x \in A$ voldoet aan $p_x(z) = 0$, $p_x(x) > 0$ en $0 \leq p_x(y) \leq 1$ voor alle $y \in V$. De open verzamelingen

$$U_x \quad := \quad \left\{ y \in V \;\middle|\; p_x(y) > 0 \right\}$$

overdekken $V \backslash U$ en die is compact (want gesloten), dus bestaan $x_1, \ldots, x_m \in V \backslash U$ met

$$V \backslash U \quad \subseteq \quad \bigcup_{i=1}^m U_{x_i} \quad .$$

De functie

$$p \quad := \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{x_i} \quad \in \quad A$$

voldoet aan $0 \leq p \leq 1$, $p(z) = 0$ en $p(y) > 0$ voor alle $y \in V \backslash U$ en heeft dus op deze compacte verzameling een minimum $\delta > 0$ — indien nodig stellen we δ na beneden bij om $\delta < 1$ te verzekeren. Definieer

$$W \quad := \quad \left\{ y \in V \;\middle|\; p(y) < \frac{\delta}{2} \right\} \quad ,$$

een in U bevatte open omgeving van z. Neem $k := \min\{l \in \mathbb{N} \mid l > \frac{1}{\delta}\}$, dan is

$k-1 \leq \frac{1}{\delta}$, dus $k \leq \frac{1+\delta}{\delta} < \frac{2}{\delta}$ ofwel $1 < k\delta < 2$. De door

$$q_n(y) \ := \ \left(1 \ - \ (p(y))^n\right)^{k^n}$$

gedefinieerde functies zijn in A en voldoen aan $0 \leq q_n \leq 1$ en $q_n(z) = 0$. Voor $x \in W$ is $kp(x) < \frac{1}{2}k\delta < 1$ en daarmee

$$q_n(x) \ \geq \ 1 \ - \ k^n(p(x))^n \ > \ 1 \ - \ (\frac{k\delta}{2})^n \ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ 1 \ .$$

Voor $x \in V \backslash U$ is $kp(x) \geq k\delta > 1$ en daarmee

$$\begin{aligned} q_n(x) \ &\leq \ \frac{1+k^n(p(x))^n}{k^n(p(x))^n} \left(1 \ - \ (p(y))^n\right)^{k^n} \\ &\leq \ \frac{\left(1+(p(y))^n\right)^{k^n}\left(1-(p(y))^n\right)^{k^n}}{k^n(p(x))^n} \ = \ \frac{\left(1-(p(y))^{2n}\right)^{k^n}}{(kp(x))^n} \\ &\leq \ \frac{1}{(kp(x))^n} \ \leq \ \frac{1}{(k\delta)^n} \ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ 0 \ . \end{aligned}$$

Voor gegeven $\varepsilon > 0$ bestaat dus $n \in \mathbb{N}$ met $q_n > 1-\varepsilon$ op W en $q_n < \varepsilon$ op $V \backslash U$, de functie $g := 1 - q_n$ voldoet (eveneens) aan $0 \leq g \leq 1$. □

Hiermee kunnen we het lemma uit het bewijs van stelling 5.12 bewijzen.

Bewijs (van lemma 5.13). Pas lemma 5.14 toe op $U := V \backslash Y$ (d.w.z. $Y = V \backslash U$) en verkrijg voor elk $z \in X \subseteq U$ een open omgeving W_z van z. De gesloten verzameling X is compact en wordt dus al door $W_{z_1}, \ldots, W_{z_m}$ overdekt; kies nu $\varepsilon := \frac{\delta}{m}$ en verkrijg functies $g_1, \ldots, g_m : V \longrightarrow [0,1]$ met $g_i < \frac{\delta}{m}$ op W_{z_i} en $g_i > 1 - \frac{\delta}{m}$ op Y. De functie

$$g \ := \ \prod_{i=1}^{m} g_i$$

heeft de gewenste eigenschappen. □

Dit was de reële versie van de stelling van Stone–Weierstraß. In het complexe geval moeten we iets meer eisen.

Gevolg 5.15. Zij V compact en $D \subseteq C(V,\mathbb{C})$ met (i), (ii) uit stelling 5.12 en bovendien

(iii) Voor alle $f \in D$ is ook $\bar{f} \in D$.

Dan ligt de door D voortgebrachte algebra A dicht in $C(V,\mathbb{C})$.

Bewijs. Splits $C(V,\mathbb{C}) = C(V,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}C(V,\mathbb{R})$ op d.m.v.

$$\mathrm{Re}(f) \;=\; \frac{f+\bar{f}}{2} \quad \text{en} \quad \mathrm{Im}(f) \;=\; \frac{f-\bar{f}}{2\mathrm{i}}$$

en pas stelling 5.12 separaat toe. □

Voor compacte deelverzamelingen $V \subseteq \mathbb{C}$ liggen de door $z \mapsto z$ en $z \mapsto \bar{z}$ voortgebrachte veeltermen $\mathbb{C}[z,\bar{z}]$ dicht in $C(V,\mathbb{C})$ en $\mathbb{R}[x]$ ligt dicht in bv. $C([0,1],\mathbb{R})$. Door over te gaan op rationale coëfficienten (in het complexe geval coëfficienten wiens reëel en imaginair gedeelte allebij rationaal zijn) verkrijgen we zo aftelbare veeltermruimten die in $C(V)$ dicht liggen. Dit kunnen we generaliseren.

Stelling 5.16. Zij V een compacte metrische ruimte. Dan is $C(V)$ separabel.

Bewijs. We kunnen ons tot het reële geval beperken. Zorg voor $\mathbb{1} \in D$ en bovendien $d_n \in D$ met

$$d_n(x) \;:=\; \mathrm{d}(x, V^{\setminus U_n}) \;=\; \inf\left\{ \mathrm{d}(x,y) \;\middle|\; y \in V^{\setminus U_n} \right\}$$

waar $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een basis van de topologie van de compacte (en daarom separabele) metrische ruimte V is. Voor $x, y \in V$ bestaat U_n rond y met $x \notin U_n$ en dus $d_n(x) = 0$, $d_n(y) \neq 0$. □

Zijn dus alle Banachruimten separabel? Op zich geen slechte gedachte — bijna alle belangrijke Banachruimten zijn inderdaad separabel — maar niet allemaal.

Voorbeeld 5.17. De ruimte ℓ^∞ van begrensde rijtjes is niet separabel. Bekijk hiervoor alle rijtjes

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\in\; \{0,1\}^{\mathbb{N}} \;\subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$$

van nullen en enen. Dit zijn er overaftelbaar veel en de afstand is altijd

$$\|\, a - b \,\|_\infty \;=\; 1 \;,$$

waarmee de $U_{\frac{1}{2}}(a)$ open verzamelingen met lege doorsneden zijn. △

Dit is de reden waarom de separabele ruimte ℓ^1 — met duale ruimte $\left(\ell^1\right)^* = \ell^\infty$ — niet reflexief is.

6

Begrensde operatoren

Zie ook §§5.1–5.3 en 6.3 in [10], §§1.20, 1.23 en 1.25 in [16], §§7.0, 7.2 en 7.5 in [15], §§4.1–4.4 en 6.3 in [9], §11.1. in [4] of §§5.1 en 7.1 in [13].

In hoofdstuk 3 hebben we gezien dat een (lineaire) operator dan en slechts dan continu is als hij begrensd is. Uit hoofdstuk 5 volgt dat het supremum in

$$\|T\| \quad = \quad \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \quad = \quad \inf \{C > 0 \mid \|Tx\| \geq C\|x\|\}$$

niet noodzakelijk een maximum is (de sfeer is niet compact) terwijl het infimum juist door $\|T\|$ woordt aangenomen. Met F is ook de ruimte $L(E,F)$ van begrensde operatoren een Banachruimte.

Stelling 6.1. Zij E een Banachruimte, dan is $L(E) := L(E,E)$ een Banachalgebra met één.

Bewijs. Dit is eenvoudig maar we gaan het een keer uitvoerig bewijzen, neem hiervoor $R, S, T \in L(E)$ vast. Compositie is zoals altijd associatief, en $(R+S)T = RT + ST$ want

$$\bigwedge_{x \in E} \quad (R+S)(Tx) \quad = \quad R(Tx) \;+\; S(Tx) \quad = \quad (R \circ T)(x) \;+\; (S \circ T)(x) \ .$$

Omdat de compositie niet commutatief is moeten we ook $T(R+S) = TR+TS$ aantonen, hiervoor gebruiken we in

$$\bigwedge_{x \in E} \quad T((R+S)(x)) \quad = \quad T(Rx \,+\, Sx) \quad = \quad T(Rx) \;+\; T(Sx)$$

de lineariteit van T. De één is in deze Banachalgebra de identiteit

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

want

$$(\mathrm{id} \circ T)(x) \;=\; \mathrm{id}(Tx) \;=\; Tx \quad \text{en} \quad (T \circ \mathrm{id})(x) \;=\; T(\mathrm{id}(x)) \;=\; Tx$$

voor alle $x \in E$. Tenslotte is

$$\bigwedge_{x \in E} \quad \|(S \circ T)(x)\| \;=\; \|S(Tx)\| \;\leq\; \|S\|\,\|Tx\| \;\leq\; \|S\|\,\|T\|\,\|x\|$$

en dus $\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$. □

Voorbeeld 6.2. De ruimte $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ van kwadratische matrices is een Banach-algebra. Terwijl alle normen op $\mathbb{K}^{n\times n}$ equivalent zijn, hebben alleen matrixnormen de cruciale eigenschap $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$. △

Voorbeeld 6.3. Zij $k \in C[0,1]^2 = C([0,1]\times[0,1])$ en

$$(K(f))(s) \;:=\; \int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t \;.$$

Dan is

$$K \;:\; C[0,1] \;\longrightarrow\; C[0,1]$$

een begrensde (lineaire) operator. Hierin schuilt de bewering dat $K(f)$ weer een continue functie (in s) definieert, verwissel hiervoor limiet en integraal. Voor de lineariteit van K bereken voor vaste $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
(K(\lambda f + g))\,(s) \;&=\; \int_0^1 k(s,t)(\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t \\
&=\; \lambda \int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^1 k(s,t) g(t)\,\mathrm{d}t \\
&=\; \lambda(K(f))(s) \;+\; (K(g))(s) \;=\; (\lambda K(f) \;+\; K(g))\,(s)
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\|K(f)\|_\infty \;&=\; \sup_{0\leq s\leq 1} \left|\int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \sup_{0\leq s\leq 1} \int_0^1 |k(s,t)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq\; \int_0^1 \|k\|_\infty\,\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \;=\; \|k\|_\infty\,\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

voor de continuïteit. De afschatting $\|K\| \leq \|k\|_\infty$ van de operatornorm door de supremum-norm over $[0,1]^2$ is i.h.a. niet scherp. De operator K is ook continu t.o.v. de L^2–norm

$$\|f\|_2 \;=\; \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \;.$$

Immers,

$$
\begin{aligned}
\|K(f)\|_2^2 &= \int_0^1 |K(f)(s)|^2 \,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^1 |\int_0^1 k(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t|^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 |\langle f \mid \bar{k}(s,..)\rangle|^2 \,\mathrm{d}s \;\leq\; \int_0^1 |\,\|k(s,..)\|_2\,\|f\|_2|^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2 \,\mathrm{d}t\mathrm{d}s\;\|f\|_2^2 \;=\; \|k\|_2^2\,\|f\|_2^2
\end{aligned}
$$

waar $\bar{k}(s,..)(t) = \overline{k(s,t)}$ het complex conjugeerde voor de in de eerste variabele s vastgehouden functie op $[0,1]$ is. Omdat $C[0,1] \subseteq L^2[0,1]$ dicht ligt kunnen we K d.m.v.

$$K(\lim_{n\to\infty} f_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} K(f_n)$$

uitbreiden tot een begrensde operator

$$K \;:\; L^2[0,1] \;\longrightarrow\; L^2[0,1]$$

(men kan aantonen dat dit zelfs voor $k \in L^2[0,1]^2$ werkt). Ook de afschatting $\|K\|_{L^2} \leq \|k\|_2$ (van een andere operatornorm!) is i.h.a. niet scherp. $\triangle$

Voorbeeld 6.4. De *rechter shift* $S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ is d.m.v. $S(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ gedefinieerd en blijkbaar lineair. Vanwege

$$\bigwedge_{a\in\ell^2} \quad \|S(a)\|_2 \;=\; \left(0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{2}} \;\overset{!}{=}\; \|a\|_2$$

is S een isometrie — maar niet surjectief — en dus i.h.b. begrensd. De *linker shift* $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ met $T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$ is alleen begrensd en voldoet aan $T \circ S = \mathrm{id}$, maar $S \circ T \neq \mathrm{id}$. $\triangle$

Stelling 6.5. (Banach–Schauder, open mapping theorem). Indien de operator $T \in L(E,F)$ de Banachruimte E surjectief op de Banachruimte F afbeeldt is voor alle open deelverzamelingen $O \subseteq E$ ook $T(O) \subseteq F$ open.

Deze stelling is al van toepassing als het beeld $\mathrm{im}\,T \subseteq F$ gesloten is, want dan voldoet de co-restrictie $T : E \longrightarrow \mathrm{im}\,T$ aan de voorwaarden. Indien T injectief is, zijn onder de lineaire afbeelding $T^{-1} : \mathrm{im}\,T \longrightarrow E$ de inverse beelden van open verzamelingen eveneens open (in $\mathrm{im}\,T$), d.w.z. $T^{-1} \in L(\mathrm{im}\,T, E)$.

Bewijs. Laat erst zien dat $\overline{T(U_\alpha(0))}$ voor elk $\alpha > 0$ een omgeving van de oorsprong in F is. In de aftelbare vereniging

$$F \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(U_{n\alpha}(0))} \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \cdot \overline{T(U_\alpha(0))}$$

van gesloten deelverzamelingen bevat volgens stelling 2.6 van Baire (minstens) één $n \cdot \overline{T(U_\alpha(0))}$ een inwendig punt, maar dan geldt dit i.h.b. voor

$$\overline{T(U_\alpha(0))} \;=\; \frac{n}{n}\cdot\overline{T(U_\alpha(0))}\;.$$

Noem dit inwendig punt y, dan zijn ook $-y \in -\overline{T(U_\alpha(0))} = \overline{T(U_\alpha(0))}$ en de convexe combinatie $0 = \frac{1}{2}(y-y)$ inwendige punten van $\overline{T(U_\alpha(0))}$, ofwel er bestaat $\beta = \beta(\alpha) > 0$ met $U_\beta(0) \subseteq \overline{T(U_\alpha(0))}$. Omdat

$$U_\beta(Tx) \;=\; Tx \,+\, U_\beta(0) \;\subseteq\; Tx \,+\, \overline{T(U_\alpha(0))} \;=\; \overline{T(U_\alpha(x))}$$

is hiermee aan de voorwaarden van lemma 2.5 voldaan en bestaat voor elk $\varepsilon > 0$ een $\delta = \delta(\varepsilon)$ met $U_\delta(Tx) \subseteq T(U_\varepsilon(x))$ voor alle $x \in O$. Kies voor gegeven x in de open verzameling O nu $\varepsilon > 0$ zo klein dat $U_\varepsilon(x) \subseteq O$, dan is

$$U_\delta(Tx) \;\subseteq\; T(U_\varepsilon(x)) \;\subseteq\; T(O)$$

en $T(O)$ is omgeving van al haar punten. □

Net zo als de redeneringen transparanter werden door Hilbertruimten en Banachruimten te bestuderen i.p.v. 'concrete' functieruimten is het soms voordelig om uitspraken voor elementen van een Banachalgebra te bewijzen i.p.v. voor operatoren in $L(E)$.

Stelling 6.6. De inverteerbare elementen van een Banachalgebra A vormen een open deelverzameling van A.

De inverteerbare elementen $T \in L(E)$ zijn de operatoren met een (lineair en) begrensd inverse T^{-1}, en hiervoor is het volgens het open mapping theorem voldoende dat T bijectief is.

Bewijs. Vanwege de meetkundige reeks (ook Neumann-reeks genoemd)

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k \tag{6.1}$$

is $U_1(1) = \{1 - T \mid \|T\| < 1\}$ een open omgeving van de één binnen de inverteerbare elementen. Immers, de reeks (6.1) convergeert vanwege

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\;\bigvee_{n_\varepsilon\in\mathbb{N}}\;\bigwedge_{n\geq n_\varepsilon}\;\bigwedge_{m\in\mathbb{N}}\;\|\sum_{k=n}^{n+m} T^k\| \;\leq\; \sum_{k=n}^{n+m}\|T\|^k \;<\; \varepsilon$$

en voldoet aan

$$(1-T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k \;=\; T^0 \;=\; 1 \;=\; \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(1-T)\;.$$

Voor een willekeurig inverteerbaar element $S \in A$ is dan

$$U_1(1)\cdot S \;=\; \left\{\, S - TS \;\middle|\; \|T\| < 1 \right\} \;\supseteq\; U_{\frac{1}{\|S^{-1}\|}}(S)$$

een open omgeving van S binnen de inverteerbare elementen. □

Van centrale betekenis in de lineaire algebra zijn de eigenwaarden. In oneindige dimensie zijn injectieve lineaire afbeeldingen niet noodzakelijk ook surjectief en generaliseerd men als volgt.

Definitie 6.7. Zij A een complexe Banachalgebra met 1 *en $T \in A$. Dan noemt men*

$$\sigma(T) \ := \ \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ \middle| \ \lambda - T \text{ niet inverteerbaar} \right\}$$

het spectrum van T.

Voor een reële Banachalgebra A zal men moeten complexificeren, d.w.z. overgaan op $\mathbb{C} \otimes A = A \oplus \mathrm{i}A$.

Voorbeeld 6.8. Voor $T \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ bestaat $\sigma(T)$ precies uit de eigenwaarden en deze zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking

$$\det(\lambda - T) \ = \ 0 \ . \tag{6.2}$$

Voor $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ voldoen de (reële) eigenwaarden eveneens aan (6.2) en met $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ is ook $\bar{\lambda}$ een oplossing ervan, met als gevolg dat $|\lambda|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)T + T^2$ in $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ niet inverteerbaar is. De complexificatie

$$\mathbb{C} \otimes M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ = \ M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ \oplus \ \mathrm{i}\, M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

van een reële matrixalgebra is uiteraard een complexe matrixalgebra. △

Voorbeeld 6.9. Zij V compact en $A = C(V, \mathbb{C})$ de algebra van continue complexe functies op V. Voor $f \in A$ is $\lambda - f$ dan en slechts dan inverteerbaar als $\lambda \notin f(V)$. Deze uitspraak geldt ook voor $A = C(V, \mathbb{R})$, het is niet nodig om expliciet $\mathbb{C} \otimes C(V, \mathbb{R}) = C(V, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}C(V, \mathbb{R}) = C(V, \mathbb{C})$ te complexificeren. Voor $f \in C(V)$ is dus $\sigma(f) = f(V)$, ongeacht of $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ of $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. △

Voorbeeld 6.10. Zij E een Banachruimte en $T \in A = L(E)$. De eigenwaarden van T liggen in het spectrum $\sigma(T)$ omdat $\lambda - T$ dan niet injectief is. Voor niet-eigenwaarden $\lambda \in \sigma(T)$ is $\operatorname{im} T \neq E$ en kan het beeld wel of niet dicht liggen in E. Het open mapping theorem 6.5 sluit uit dat de begrensde operator T bijectief en toch niet inverteerbaar in $L(E)$ is. △

Stelling 6.11. Zij A een complexe Banachalgebra met 1 *en $T \in A$. Dan is het spectrum $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ compact.*

Bewijs. De niet inverteerbare elementen van A vormen een gesloten deelverzameling (want het complement is open), en $\sigma(T)$ is invers beeld hiervan onder de continue afbeelding

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & A \\ \lambda & \mapsto & \lambda - T \end{array}$$

en dus eveneens gesloten. Maar $\sigma(T)$ is ook begrensd, want als $|\lambda| > \|T\|$ dan is

$$\|\frac{T}{\lambda}\| \;=\; \frac{\|T\|}{|\lambda|} \;<\; 1$$

en daarmee $\lambda - T = (1 - \frac{T}{\lambda})\lambda$ inverteerbaar. Een begrensde gesloten deelverzameling van $\mathbb{C}$ is compact. □

Voorbeeld 6.12. De eigenwaarden van de d.m.v. $\lambda \in \ell^\infty$ gedefinieerde vermenigvuldigingsoperator

$$T_\lambda \;:\; \begin{array}{ccc} \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ (a_i)_i & \mapsto & (\lambda_i a_i)_i \end{array}$$

zijn precies de elementen van $\{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Zij $\mu \in \mathbb{C}$ geen limietpunt van deze verzameling, dan definieert

$$(\frac{1}{\mu - \lambda_i})_{i\in\mathbb{N}} \;\in\; \ell^\infty$$

een inverteerbare vermenigvuldigingsoperator met inverse $\mu - T_\lambda$. Het spectrum

$$\sigma(T_\lambda) \;=\; \overline{\{\; \lambda_i \;\mid\; i \in \mathbb{N}\}}$$

komt daarom overeen met de kleinste compacte verzameling die alle eigenwaarden bevat. △

Stelling (en definitie) 6.13. Voor een element $T \in A$ van een Banachalgebra is

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;=\; \lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;=\; \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$$

waarbij A voor de tweede identiteit een complexe Banachalgebra met 1 moet zijn. Men noemt dit de spectraalstraal van T en schrijft hiervoor $\rho(T)$.

Gevolg 6.14. Het spectrum $\sigma(T) \neq \emptyset$ is niet leeg.

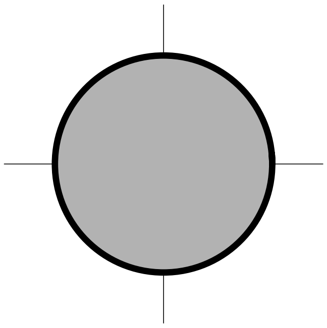
I.h.b. heeft elke matrix minstens één eigenwaarde. We zullen nog zien dat er oneindigdimensionale operatoren zonder eigenwaarden bestaan, deze hebben dus wel spectraalwaarden.

Bewijs (van het stelling-gedeelte). In de Banachalgebra A is $\|T^m\| \leq \|T\|^m$ voor alle $m \in \mathbb{N}$. Gegeven $p \in \mathbb{N}$ bestaan er $q, r \in \mathbb{N}$ met $m = pq + r$ en $0 \leq r < p$, met als gevolg

$$\|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;\leq\; \|T^p\|^{\frac{q}{m}} \cdot \|T\|^{\frac{r}{m}}$$

en vanwege

$$\lim_{m\to\infty} \frac{q(m)}{m} \;=\; \frac{1}{p} \quad \text{en} \quad \lim_{m\to\infty} \frac{r(m)}{m} \;=\; 0$$



Figuur 6.1. De schijf B bevat de rand en is daarmee compact. De aanname (6.3) zorgt ervoor dat de continue functie $S : B \longrightarrow A$ op de hele rand gedefinieerd is.

verder

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \quad = \quad \limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad \leq \quad \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \ .$$

Dit geldt voor alle $p \in \mathbb{N}$, dus

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad \leq \quad \inf_{p\in\mathbb{N}} \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad \lim_{m\to\infty} \inf_{p\geq m} \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \quad = \quad \liminf_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$$

waaruit volgt dat deze getallen aan elkaar en aan $\lim\limits_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ gelijk zijn, schrijf hiervoor al $\rho(T)$. De aanscherping van het bewijs van stelling 6.11 m.b.v. opgave 27 levert nog

$$\sigma(T) \quad \subseteq \quad \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| \leq \rho(T) \right\}$$

op. Indien T inverteerbaar is geldt $1 \leq \|T^m\| \, \|T^{-m}\| \leq \|T^m\| \, \|T^{-1}\|^m$, d.w.z.

$$\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} \quad \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \ \geq \ \frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

en dus $\rho(T) \geq \dfrac{1}{\|T^{-1}\|} > 0$. Is omgekeerd $\rho(T) = 0$, dan volgt $\sigma(T) = \{0\}$ en we mogen vanaf nu $\rho(T) \neq 0$ veronderstellen. Om te bevestigen dat de spectraalstraal overeenkomt met de straal van de kleinste schijf rond 0 die het hele spectrum bevat argumenteren we uit het ongerijmde.

$$\text{Stel dat} \qquad \bigwedge_{\lambda\in\sigma(T)} \quad |\lambda| \ < \ \rho(T) \ . \tag{6.3}$$

Dan is de A–waardige functie $S(\mu) := (1 - \mu T)^{-1}$ op heel

$$B \quad = \quad \left\{ \mu \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mu| \leq \frac{1}{\rho(T)} \right\}$$

gedefinieerd en continu, dus uniform continu op deze in figuur 6.1 geschetste compacte verzameling, d.w.z.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{\lambda,\mu\in B} |\lambda-\mu| < \delta \implies \|S(\lambda)-S(\mu)\| < \varepsilon \ .$$

Kies $\varepsilon = \frac{1}{6}$ en maak de bijbehorende $\delta > 0$ desnoods iets kleiner opdat $0 < r := \dfrac{1}{\rho(T)} - \dfrac{\delta}{2} < \dfrac{1}{\rho(T)}$. Dan geldt

$$\bigwedge_{\substack{\omega\in\mathbb{C}\\|\omega|=1}} \|S(r\omega) - S(\frac{\omega}{\rho(T)})\| < \frac{1}{6}$$

want

$$|r\omega - \frac{\omega}{\rho(T)}| = |\omega|\cdot|r-\frac{1}{\rho(T)}| = \frac{\delta}{2} < \delta \ .$$

Omdat $\dfrac{1}{r} > \rho(T) = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ bestaat $m \in \mathbb{N}$ met $\|(rT)^m\| < \frac{1}{4}$, gebruik deze m om $\omega = \exp(\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{m})$ vast te leggen. In de veeltermring $\mathbb{C}[z]$ is dan

$$1 - z^m = \prod_{k=0}^{m-1}(1-\omega^k z)$$

en breuksplitsing leidt tot

$$\frac{1}{1-z^m} = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\alpha_k}{1-\omega^k z}$$

met

$$\alpha_k = \lim_{z\to\omega^{-k}}\frac{1-\omega^k z}{1-z^m} \overset{!}{=} \lim_{z\to\omega^{-k}}\frac{-\omega^k}{-mz^{m-1}} = \frac{\omega^k}{m\omega^{-km+k}} = \frac{1}{m}$$

en dus

$$\frac{1}{1-z^m} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{1-\omega^k z} \ . \tag{6.4}$$

Elke veelterm $p(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i$ definieert het element $p(T) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i T^i \in A$ en (6.4) blijft geldig (als we zorg dragen dat alleen maar inverteerbare elementen in de noemer staan). Vul rT in voor z, dan is

$$(1-(rT)^m)^{-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S(\omega^k r)$$

terwijl we

$$(1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S(\frac{\omega^k}{\rho(T)})$$

krijgen als we $\dfrac{T}{\rho(T)}$ voor z invullen. Nu kunnen we

$$\begin{aligned}\left\|(1-(rT)^m)^{-1} \;-\; (1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}\right\| \;&\leq\; \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\|S(\omega^k r)-S(\frac{\omega^k}{\rho(T)})\| \\ &<\; \frac{1}{6}\end{aligned}$$

afschatten. Bovendien is

$$\|1 \;-\; (1-(rT)^m)^{-1}\| \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty}\|(rT)^m\|^j \;<\; \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \;=\; \frac{1}{3}$$

en dus

$$\|1 \;-\; (1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}\| \;<\; \frac{1}{3}+\frac{1}{6} \;=\; \frac{1}{2}$$

met als gevolg dat

$$\|(\frac{T}{\rho(T)})^m\| \;=\; \|1 \;-\; \{1 \;-\; [1 \;-\; (1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}]\}^{-1}\| \;<\; \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \;=\; 1$$

wat $\|T^m\| < (\rho(T))^m$ zou betekenen, en dat is absurd. Daarmee kan (6.3) niet waar zijn. $\square$

Dat elke matrix minstens één eigenwaarde heeft volgt al uit de hoofdstelling van de algebra, toegepast op de veelterm (6.2). Net zo als deze stelling kan men gevolg 6.14 met middelen uit de complexe functie theorie bewijzen (met de stelling van Liouville, een gevolg van Cauchy's integraalformule) en met iets meer middelen (uniciteit van Laurentreeksen) ook stelling 6.13 zelf, zie [10] voor een discussie.

Omgekeerd gebruikt bovenstaand bewijs nergens de hoofdstelling van de algebra, de wortels $\omega^k = \exp(\frac{2\pi \mathrm{i} k}{m})$ van $1-z^m$ zijn immers expliciet bekend. Omdat bij elke veelterm $p \in \mathbb{C}[\lambda]$ een Leslie-matrix T bestaat met $\det(\lambda - T) = p(\lambda)$ kan gevolg 6.14 dus ook worden gebruikt om de hoofdstelling van de algebra te bewijzen.

Stelling 6.15. Zij A een complexe Banachalgebra met $1 \neq 0$ waarin elk element $T \neq 0$ inverteerbaar is. Dan is $A \cong \mathbb{C}$.

Bewijs. Voor $\lambda \in \sigma(T)$ is $\lambda - T$ niet inverteerbaar, dus $\lambda - T = 0$ ofwel $T = \lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Voor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zijn er naast de commutatieve Banachalgebra's $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ waarin elk element $T \neq 0$ inverteerbaar is ook nog de quaternionen

$$\mathbb{H} \;=\; \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{i} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{j} \oplus \mathbb{R}\,\mathrm{k}$$

met $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$ en $\mathrm{ij} = \mathrm{k} = -\mathrm{ji}$ plus cyclische permutaties.

7

Compacte operatoren

Zie ook §§5.3 en 6.3 in [10], §8.0 in [15], §§7.1 en 7.2 in [9], §§11.1–11.4 in [4] of §§2.4 en 5.1 in [13].

Hier gaat het om de operatoren die zich nog het meest zoals (eindige) matrices gedragen.

Stelling (en definitie) 7.1. Zij $T : E \longrightarrow F$ een lineaire afbeelding tussen Banachruimten. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.

(i) Voor begrensde deelverzamelingen $M \subseteq E$ is $T(M)$ precompact.
(ii) $T(U_1(0))$ is relatief compact.
(iii) Voor elke begrensde rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ bevat de rij der beelden $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij.

We noemen T dan een compacte operator.

Bewijs. De omgeving $U_1(0)$ van de oorsprong is begrensd en volgens (i) is de afsluiting van het beeld onder T in de volledige ruimte F daarmee compact. Voor $(ii) \Rightarrow (iii)$ specificeer de bovengrens $\|x_n\| \leq \mu$, dan heeft

$$\frac{1}{\mu}T(x_n) \quad \in \quad \overline{T(U_1(0))}$$

een convergente deelrij, vermenigvuldig deze weer met μ. Voor de implicatie $(iii) \Rightarrow (i)$ gebruik dat de rijcompacte verzameling $\overline{T(M)}$ daarmee compact is. □

In eindige dimensie zijn alle begrensde verzamelingen precompact en daarom is elke $T \in L(E, F)$ van eindige rang een compacte operator; de begrensde verzameling $T(U_1(0)) \subseteq \operatorname{im} T$ is dan relatief compact.

Voorbeeld 7.2. Zij $k \in C[0,1]^2$ en

$$(K(f))(s) \quad = \quad \int_0^1 k(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

Dan is de (begrensde lineaire) operator

$$K \;:\; C[0,1] \;\longrightarrow\; C[0,1]$$

compact. Zij hiervoor $M \subseteq C[0,1]$ door $\mu > 0$ begrensd, dan is $\overline{K(M)}$ gesloten en begrensd. Om de stelling 5.10 van Arzelà–Ascoli toe te kunnen passen laat zien dat $\overline{K(M)}$ ook (uniform) equicontinu op $[0,1]$ is. Op de compacte verzameling $[0,1]^2$ is de continue functie k automatisch uniform continu, gegeven $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ met $|k(s,t) - k(r,t)| < \dfrac{\varepsilon}{2\mu}$ voor alle $|s - r| < \delta$. Voor deze $r, s \in [0,1]$ en alle $f \in M$ geldt

$$\begin{aligned} |\,(K(f))(s) \;-\; (K(f))(r)\,| \;&\leq\; \int_0^1 |k(s,t) - k(r,t)||f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &<\; \frac{\varepsilon}{2\mu}\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2\mu}\|f\|_\infty \end{aligned}$$

en dus ook

$$|\,g(s) \;-\; g(r)\,| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon$$

voor alle $g \in \overline{K(M)}$. △

Een deelvectorruimte I van een algebra A die onder vermenigvuldiging gesloten is vormt zelf een (deel)algebra. Voor de kern van een algebrahomomorfisme geldt iets meer, en generaliserend noemt men I een (tweezijdig) *ideaal* van A indien

$$\bigwedge_{a \in A} \;\bigwedge_{b \in I} \quad ab \in I \;\;\wedge\;\; ba \in I$$

en schrijft hiervoor $I \lhd A$. (Indien alleen aan één van deze condities is voldaan spreekt men van een linker danwel rechter ideaal.) Een voorbeeld is de deelruimte van veeltermen die in 0 en 1 een wortel hebben.

Stelling 7.3. Voor een Banachruimte E vormen de compacte operatoren $T : E \longrightarrow E$ een gesloten tweezijdig ideaal $K(E) \lhd L(E)$.

Bewijs. Op een relatief compacte verzameling $T(U_1(0))$ heeft de continue functie $\|..\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ een supremum, dus compacte operatoren T zijn begrensd met norm

$$\|T\| \;=\; \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \;.$$

Met S en T zijn ook $S + T$ en λT voor alle $\lambda \in \mathbb{K}$ compact, $K(E)$ is een deelvectorruimte. Als $S \in L(E)$, $T \in K(E)$ en $M \subseteq E$ begrensd dan is met $\overline{T(M)}$ ook

$$\overline{(ST)(M)} \;=\; \overline{S(T(M))} \;\overset{!}{=}\; S(\overline{T(M)})$$

compact, bovendien is $S(M)$ begrensd en daarom

$$(TS)(M) \;=\; T(S(M))$$

precompact. Voor $T \in \overline{K(E)}$ en $\varepsilon > 0$ bestaat $S \in K(E)$ met $\|T - S\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Omdat $S(U_1(0))$ precompact is zijn er bovendien $x_1, \ldots, x_n \in U_1(0)$ met

$$S(U_1(0)) \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{n} U_{\frac{\varepsilon}{3}}(Sx_j)$$

en ons doel is een soortgelijk uitspraak voor T. Gegeven $x \in U_1(0)$ bestaat een index $1 \le j \le n$ met $\|Sx - Sx_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$ en hiermee

$$\|Tx \;-\; Tx_j\| \;\le\; \|Tx - Sx\| \;+\; \|Sx - Sx_j\| \;+\; \|Sx_j - Tx_j\| \;<\; \varepsilon$$

ofwel $T(U_1(0))$ is precompact. □

Is dus $(T_k)_k$ een rij operatoren van eindige rang, dan is $T = \lim_{k\to\infty} T_k$ een compacte operator.

Voorbeeld 7.4. Voor $\lambda = (\lambda_i)_i \in \ell^\infty$ is de vermenigvuldigingsoperator

$$\begin{array}{rccc} T_\lambda : & \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ & (a_i)_i & \mapsto & (\lambda_i a_i)_i \end{array}$$

dan en slechts dan compact als $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$. De vermenigvuldigingsoperatoren $T_n := T_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,0,0,\ldots)}$ hebben eindige rang en convergeren onder deze conditie naar T. Omgekeerd is voor $e_k = (0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$

$$\|T_\lambda e_k\|_2^2 \;=\; \langle T_\lambda e_k \mid T_\lambda e_k\rangle \;=\; \langle \lambda_k e_k \mid \lambda_k e_k\rangle \;=\; |\lambda_k|^2$$

en argumenteren we uit het ongerijmde. Stel dat $(\lambda_k)_k$ niet naar 0 convergeert, d.w.z.

$$\bigvee_{\varepsilon>0} \;\bigwedge_{l\in\mathbb{N}} \;\bigvee_{k_l \ge l} \;\|T_\lambda e_{k_l}\|_2 \;\ge\; \varepsilon \;.$$

Omdat T_λ compact is heeft de rij $f_l = e_{k_l}$ een deelrij $g_m = f_{l_m}$ waarvoor $(T_\lambda g_m)_m$ convergeert, met limiet $b \in \ell^2$. Daarmee geldt

$$\bigwedge_{a\in\ell^2} \;\lim_{m\to\infty} \langle T_\lambda g_m \mid a\rangle \;=\; \langle b \mid a\rangle$$

en bovendien

$$\bigwedge_{a\in\ell^2} \;\langle T_\lambda g_m \mid a\rangle \;=\; \langle \lambda_{k_{l_m}} e_{k_{l_m}} \mid (a_i)_i\rangle \;=\; \lambda_{k_{l_m}} a_{k_{l_m}} \;\stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow}\; 0$$

want $a_i \to 0$ en $(\lambda_k)_k$ is begrensd. Dit betekent $b \perp \ell^2$ ofwel $\lim_{m\to\infty} T_\lambda g_m = 0$ en dat is absurd, want $\|T_\lambda g_m\| \ge \varepsilon > 0$ voor alle $m \in \mathbb{N}$. △

Het spectrum van de vermenigvuldigingsoperator T_λ is de afsluiting van de verzameling van eigenwaarden λ_i, in het compacte geval komt er hooguit 0 bij. De compositie met de linker of rechter shift levert andere compacte operatoren op, zoals $T(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (\lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3, \lambda_4 a_4, \ldots)$. Om het spectrum hiervan te berekenen kunnen we de volgende stelling gebruiken. Deze stelling beschrijft de globale structuur van algemene compacte operatoren.

Stelling 7.5. (Riesz theorie). Zij E een complexe Banachruimte van oneindige dimensie en $T \in K(E)$ een compacte operator op E. Dan is $0 \in \sigma(T)$ en elke $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ is een eigenwaarde van T waarvoor de bijbehorende gegeneraliseerde eigenruimte

$$V_\lambda \;:=\; \left\{ x \in E \;\middle|\; \text{er bestaat } k \in \mathbb{N} \text{ met } (\lambda - T)^k(x) = 0 \right\}$$

eindige dimensie heeft. Als $\sigma(T)$ oneindig veel elementen bevat, dan aftelbaar oneindig veel en 0 is het unieke accumulatiepunt van $\sigma(T)$.

De formulering laat in het midden of 0 wel of niet eigenwaarde is.

Bewijs. De operator $0 - T = -T$ is niet inverteerbaar, want anders zou $\mathrm{id} = TT^{-1}$ compact zijn (en dus $\dim E < \infty$), d.w.z. $0 \in \sigma(T)$. De ruimte $E_\lambda := \ker(\lambda - T)$ bestaat uit eigenvectoren (of $E_\lambda = \{0\}$, als λ geen eigenwaarde). De restrictie

$$\begin{aligned} T_{|E_\lambda} : E_\lambda &\longrightarrow E_\lambda \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

is voor $\lambda \neq 0$ een inverteerbare compacte operator, dus $\dim E_\lambda < \infty$. We kunnen de eigenruimte d.m.v.

$$V_\lambda^k \;:=\; \ker(\lambda - T)^k$$

generaliseren, want $V_\lambda^1 = E_\lambda$ en $(\lambda - T)^{-1}(V_\lambda^k) = V_\lambda^{k+1}$. Dit definieert een stijgende rij, d.w.z. $V_\lambda^k \subseteq V_\lambda^{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Zodra $V_\lambda^\ell = V_\lambda^{\ell+1}$ is ook $V_\lambda^\ell = V_\lambda^k$ voor alle $k \geq \ell$ (de rij wordt stationair).

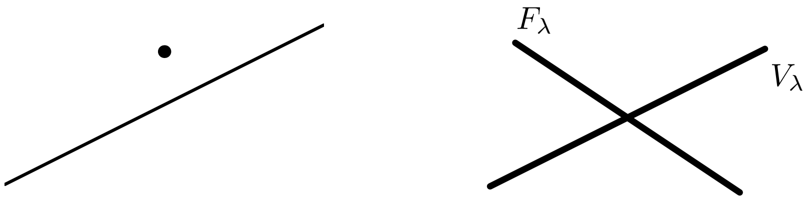
Lemma 7.6. Als $V_\lambda^k \neq V_\lambda^{k+1}$ dan is er een $x_{k+1} \in V_\lambda^{k+1} \setminus V_\lambda^k$ met $\|x_{k+1}\| = \dfrac{1}{\lambda}$ en $\|Tx_{k+1} - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ voor alle $y \in V_\lambda^k$.

Zoals figuur 7.1.a suggereert zou men voor het bewijs in een Hilbertruimte met de orthogonale projectie van een $x \in V_\lambda^{k+1} \setminus V_\lambda^k$ kunnen werken.

Bewijs (van Lemma 7.6). Kies $x \in V_\lambda^{k+1}$ met $x \notin V_\lambda^k$, dan is

$$d \;:=\; \inf_{y \in V_\lambda^k} \|x - y\| \;>\; 0$$

(want $V_\lambda^k \subseteq V_\lambda^{k+1}$ gesloten), neem $z \in V_\lambda^k$ met $\|x - z\| \leq 2d$ en definieer



Figuur 7.1.a. Een punt $x \in V_\lambda^{k+1}$ met $x \notin V_\lambda^k$. **7.1.b.** De opsplitsing van E in de invariante deelruimten V_λ en F_λ.

$$x_{k+1} \quad := \quad \frac{x - z}{\lambda\|x - z\|} \quad \in \quad V_\lambda^{k+1} \backslash V_\lambda^k$$

waarmee $\|x_{k+1}\| = \dfrac{1}{\lambda}$. Bereken

$$\begin{aligned} \|Tx_{k+1} \; - \; Ty\| \;\; &= \;\; \|\lambda x_{k+1} - (\lambda - T)(x_{k+1}) \; - \; \lambda y \; + \; (\lambda - T)(y)\| \\ = \;\; &\left\| \frac{1}{\|x - z\|}[x \; - \; z \; - \; \|x - z\| \left((\lambda - T)(x_{k+1}) \; + \; \lambda y \; - \; (\lambda - T)(y)\right)] \right\| \\ &\geq \;\; \frac{d}{2d} \;\; = \;\; \frac{1}{2} \end{aligned}$$

voor deze x_{k+1} en alle $y \in V_\lambda^k$. $\square$

Als $(V_\lambda^k)_k$ niet stationair wordt, dan is $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ volgens Lemma 7.6 een begrensde rij waarvoor $(Tx_k)_k$ geen convergente deelrij bevat, en dat is absurd want T is compact. Zij ℓ minimaal met $V_\lambda^\ell = V_\lambda^{\ell+1}$, dan is $V_\lambda^\ell = V_\lambda$. De restrictie van $\lambda - T$ tot V_λ is daarmee *nilpotent*, haar ℓ-de macht is de nul-afbeelding op V_λ.

Lemma 7.7. Voor $k \in \mathbb{N}$ *is* $(\lambda - T)^k = \lambda^k - T_k$ *met* $T_k \in K(E)$.

Bewijs (van Lemma 7.7). Met inductie: Voor $k = 1$ is $T_1 = T$ compact en $(\lambda - T)^{k-1}(\lambda - T) = (\lambda^{k-1} - T_{k-1})(\lambda - T) = \lambda^k - \lambda^{k-1}T - \lambda T_{k-1} + T_{k-1}T$ met $T_k := \lambda^{k-1}T + \lambda T_{k-1} - T_{k-1}T$ compact. $\square$

Dus V_λ^k is de eigenruimte van de compacte operator T_k behorende bij de eigenwaarde $\lambda^k \neq 0$. Dit heeft $\dim V_\lambda^k < \infty$ als gevolg en dus ook $\dim V_\lambda < \infty$. Laat tenslotte zien dat $\lambda \neq 0$ geïsoleerd punt van $\sigma(T)$ is. D.w.z. geen accumulatiepunt, ofwel de rij(!) van eigenwaarden $\lambda_k \neq 0$ heeft limiet 0 — het enige alternatief is dat het spectrum $\sigma(T)$ eindig is.

Lemma 7.8. Voor $\lambda \neq 0$ *bestaat een gesloten deelruimte* $F_\lambda < E$ *met* $T(F_\lambda) \subseteq F_\lambda$ *(d.w.z.* F_λ *is invariant onder* T*) en* $E = V_\lambda \oplus F_\lambda$*. De restrictie van* $\lambda - T$ *op* F_λ *is inverteerbaar.*

Indien $\lambda \neq 0$ geen eigenwaarde van T is geldt $E_\lambda = V_\lambda = 0$ en $E = F_\lambda$, waarop $\lambda - T$ inverteerbaar is, d.w.z. $\lambda \notin \sigma(T)$.

Het bewijs van Lemma 7.8 volgt zo meteen, zie figuur 7.1.b voor een schets. Merk op dat ook $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ want $(\lambda - T)^\ell(Ty) \stackrel{!}{=} T((\lambda - T)^\ell(y)) = 0$. Schrijf afkortend $T_V := T_{|V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ en $T_F := T_{|F_\lambda} : F_\lambda \longrightarrow F_\lambda$. Voor $x \in E$ bestaan (unieke) $y \in V_\lambda$, $z \in F_\lambda$ met $x = y + z \in V_\lambda \oplus F_\lambda$ en

$$Tx \;=\; Ty \;+\; Tz \;=\; T_V y \;+\; T_F z \;\in\; V_\lambda \oplus F_\lambda \;,$$

men noteert dit ook als

$$T \;=\; T_V \oplus T_F \;:\; V_\lambda \oplus F_\lambda \;\longrightarrow\; V_\lambda \oplus F_\lambda \;.$$

Voor $\mu \neq \lambda$ is $\mu - T_V$ inverteerbaar. Met $\lambda - T_F$ is ook $\mu - T_F$ inverteerbaar als $|\lambda - \mu|$ voldoende klein blijft. Als gevolg hiervan bestaat de inverse

$$(\mu - T)^{-1} \;=\; (\mu - T_V)^{-1} \;\oplus\; (\mu - T_F)^{-1}$$

voor alle $\lambda \neq \mu \in U_\varepsilon(\lambda)$, ε voldoende klein, en dus $\sigma(T) \cap U_\varepsilon(\lambda) = \{\lambda\}$. $\square$

Nu moeten we nog na gaan dat elke gegeneraliseerde eigenruimte inderdaad een invariant supplement heeft

Bewijs (van Lemma 7.8). In meerdere stappen.

1). $F^1_\lambda := \mathrm{im}(\lambda - T) < E$ is gesloten. Zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ en $y = \lim_{n\to\infty} (\lambda - T)(x_n)$, zoek $x \in E$ met $y = \lambda x - Tx$. Indien $d_n := \inf_{z\in E_\lambda} \|x_n - z\|$ een begrensde rij is bestaan $x'_n \in E$ met $x_n - x'_n \in E_\lambda$ en

$$(\lambda - T)(x_n) \;=\; (\lambda - T)(x'_n)$$

waarvoor de $x'_n (= x_n - z_n)$ een begrensde rij vormen. Omdat T compact is bestaat een deelrij met $\lim_{k\to\infty} Tx'_{n_k} = z \in E$, waarmee

$$\lambda x'_{n_k} \;=\; (\lambda - T)x'_{n_k} \;+\; Tx'_{n_k} \;\stackrel{k\to\infty}{\to}\; y \;+\; z$$

en dus

$$y \;=\; (\lambda - T)\left(\frac{y+z}{\lambda}\right) \;\in\; \mathrm{im}(\lambda - T) \;.$$

We moeten nog laten zien dat $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ begrensd is. Stel van niet, en ga over op een deelrij van $(x_n)_n$ opdat $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$. De $y_n = \dfrac{x_n}{d_n}$ voldoen aan $\inf_{z\in E_\lambda} \|y_n - z\| = 1$, dus er bestaan $y'_n \in U_2(0)$ met

$$(\lambda - T)(y'_n) \;=\; (\lambda - T)(y_n) \;=\; \frac{1}{d_n}(\lambda - T)(x_n) \tag{7.1}$$

en $\inf_{z\in E_\lambda} \|y'_n - z\| = 1$. In de limiet $n \to \infty$ leidt (7.1) tot

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda - T)(y'_n) \;=\; \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d_n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}(\lambda - T)(x_n)\right) \;=\; 0\cdot y \;=\; 0$$

en de compactheid van T impliceert $\lim_{k\to\infty} Ty'_{n_k} = z \in E$ voor een welgekozen deelrij, waarmee ook

$$\lim_{k\to\infty} y'_{n_k} \;=\; \frac{z}{\lambda} \;\in\; E_\lambda$$

en dat is absurd (want de afstand is en blijft gelijk aan 1). De rij $(d_n)_n$ is dus begrensd.

2). $F_\lambda^k := \operatorname{im}(\lambda - T)^k \overset{!}{=} \operatorname{im}(\lambda^k - T_k)$ is eveneens gesloten (want ook T_k is compact).

3). $V_\lambda \cap F_\lambda^\ell = \{0\}$. Voor $y \in V_\lambda^\ell \cap F_\lambda^\ell$ bestaat $x \in E$ met $y = (\lambda - T)^\ell(x)$, bovendien is $(\lambda - T)^\ell(y) = 0$ en dus $(\lambda - T)^{2\ell}(x) = 0$, ofwel $x \in V_\lambda^{2\ell} = V_\lambda^\ell$ en dan $y = (\lambda - T)^\ell(x) = 0$.

4). De dalende rij $F_\lambda^k \supseteq F_\lambda^{k+1}$ wordt stationair, er is een $m \in \mathbb{N}$ met $F_\lambda^m = F_\lambda^{m+1}$. Dit volgt met het volgende Lemma, dat men (oefening!) net zo als Lemma 7.6 kan bewijzen.

Lemma 7.9. Als $F_\lambda^k \neq F_\lambda^{k+1}$ dan is er een $x_{k+1} \in F_\lambda^k \backslash F_\lambda^{k+1}$ met $\|x_k\| = \frac{1}{\lambda}$ en $\|Tx_k - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ voor alle $y \in F_\lambda^{k+1}$.

5). $F_\lambda^m = F_\lambda^\ell =: F_\lambda$, d.w.z. met dezelfde index ℓ als bij $V_\lambda = V_\lambda^\ell$. Anders is $m > \ell$ en er bestaat $y \in F_\lambda^{m-1} \subseteq F_\lambda^\ell$ met $y \notin F_\lambda^m$. Vanwege

$$(\lambda - T)(y) \;\in\; F_\lambda^m \;=\; (\lambda - T)(F_\lambda^m)$$

bestaat $z \in F_\lambda^m$ met $(\lambda - T)(y) = (\lambda - T)(z)$, d.w.z. $y - z \in E_\lambda \subseteq V_\lambda^\ell$ en dat is absurd (want $y - z \in F_\lambda^\ell$ en $y - z \neq 0$).

6). $T(F_\lambda) \subseteq F_\lambda$. Voor $z \in F_\lambda$ is $Tz = \lambda z - (\lambda - T)(z) \in F_\lambda$.

7). $E = V_\lambda + F_\lambda$. Voor $x \in E$ is

$$(\lambda - T)^\ell(x) \;\in\; F_\lambda \;=\; (\lambda - T)^\ell(F_\lambda)\ ,$$

dus bestaat $z \in F_\lambda$ met

$$(\lambda - T)^\ell(x) \;=\; (\lambda - T)^\ell(z)\ ,$$

d.w.z. $y := x - z \in V_\lambda = V_\lambda^\ell$.

8). Vanwege 3) en 7) kunnen we elk element $x \in E$ op een unieke manier ontbinden in $x = y + z$ met $y \in V_\lambda$ en $z \in F_\lambda$. Omdat $\dim V_\lambda < \infty$ zorgt gevolg 5.7 ervoor dat de algebraïsche directe som $E = V_\lambda \oplus F_\lambda$ een topologische directe som is.

9). De restrictie van $\lambda - T$ op de gesloten deelruimte F_λ is injectief (want $F_\lambda \cap E_\lambda = \{0\}$) en surjectief (want $F_\lambda = F_\lambda^\ell = F_\lambda^{\ell+1}$). Dezelfde argumentatie als in 1) laat zien dat $\lambda - T$ gesloten verzamelingen afbeeldt op gesloten verzamelingen — of gebruik het open mapping theorem 6.5. □

Nu plukken we de vruchten. Stel T is compact en heeft een eindig spectrum $\sigma(T) = \{\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Dan volgt

$$E \;=\; F \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$$

waarbij $F = \bigcap_{i=1}^{m} F_{\lambda_i}$ en

$$T \;=\; T_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} T_i \;:\; F \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \;\longrightarrow\; F \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \tag{7.2}$$

met $T_0 := T_{|_F}$ en $T_i := T_{|_{V_{\lambda_i}}}$. Het spectrum van het oneindigdimensionale deel is $\sigma(T_0) = \{0\}$, d.w.z. T_0 is *quasi-nilpotent*. De beschrijving van de T_i is in feite lineaire algebra, maar ook hier helpt de Riesz theorie ons nog verder. Binnen V_λ hebben we de stijgende rij

$$E_\lambda \;=\; V_\lambda^1 \;\subset\; V_\lambda^2 \;\subset\; \ldots \;\subset\; V_\lambda^\ell \;=\; V_\lambda \;.$$

In eindige dimensie bestaan altijd supplementen $V_\lambda^{k+1} = V_\lambda^k \oplus U_\lambda^{k+1}$, waarmee

$$V_\lambda \;=\; E_\lambda \oplus \bigoplus_{k=2}^{\ell} U_\lambda^k \;.$$

Schrijf nog $U_\lambda^1 := E_\lambda$, dan kunnen we $U_\lambda^{k+1} := (\lambda - T)^{-1}(U_\lambda^k)$ voor $k = 1, \ldots, \ell - 1$ kiezen. Immers, de vectoren uit U_λ^{k+1} zijn juist diegenen die pas na $k+1$ keer toepassen van $(\lambda - T)$ verdwijnen en nog niet na k keer toepassen van $(\lambda - T)$. Deze splitsing van V_λ kunnen we gebruiken om de matrixrepresentatie van de lineaire afbeelding $T_{|_{V_\lambda}}$ in *Jordan normaalvorm* te schrijven.

Indien $\dim U_\lambda^k = 1$ voor alle $k = 1, \ldots, \ell$ zijn we al bijna klaar als we een basis $\{u^1, \ldots, u^\ell\}$ uit vectoren in de U_λ^k samenstellen. Op de diagonaal van de bijbehorende matrix staat overall λ. Verder zijn bijna alle elementen nul, alleen op de plaatsen direct boven de diagonaal staan de scalairen ν_k uit de ontbinding $Tu^{k+1} = \lambda u^{k+1} + \nu_k u^k$ Door over te gaan op $\{v^1, \ldots, v^\ell\}$ met $v^\ell := u^\ell$ en $v^k := -(\lambda - T)v^{k+1}$ kunnen we dan alle ν_k gelijk aan 1 stellen.

In het algemene geval beginnen we met een willekeurige basis $\{u_1^\ell, \ldots, u_n^\ell\}$ van U_λ^ℓ en construeren soortgelijk $\{v_1^k, \ldots, v_n^k\}$ voor alle $k = 1, \ldots, \ell$. Waar $\dim U_\lambda^{k+1} < \dim U_\lambda^k$ vullen we met vectoren u^k aan tot een basis van U_λ^k en gebruiken $v^k := u^k$ eveneens als beginpunt van basisvectoren $\{v^1, \ldots, v^k\}$. De matrix behorende bij de zo verkregen basis van V_λ is in Jordan normaalvorm.

Op het quasi-nilpotente deel T_0 na hebben we de ingrediënten van de splitsing (7.2) nu volledig beschreven. Ons doel is een soortgelijke representatie in het geval $\sigma(T) = \{0\} \,\dot\cup\, \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ van een oneindig spectrum. Door over te gaan op het quotient van E met de gesloten invariante deelruimte

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_{\lambda_i} \tag{7.3}$$

komen we van het quasi-nilpotente deel af. De op het quotient geïnduceerde operator is compact met hetzelfde spectrum en de doorsnede (7.3) van supplementen met de gegeneraliseerde eigenruimten V_{λ_i} verwijnt. Bovendien stemmen de afzonderlijke Jordaan normaalvormen op de gegeneraliseerde eigenruimten voor en na het nemen van het quotient overeen. Voor elk $m \in \mathbb{N}$ kunnen we

$$T_m \;:=\; 0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} T_i \;:\; \bigcap_{i=1}^{m} F_{\lambda_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \;\longrightarrow\; \bigcap_{i=1}^{m} F_{\lambda_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \tag{7.4}$$

definiëren en proberen om T door deze operatoren te approximeren. Een noodzakelijke voorwaarde hiervoor is dat we de compacte operator T überhaupt door operatoren van eindige rang kunnen approximeren.

Stelling 7.10. Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$. Dan bestaan $T_n \in L(H)$ van eindige rang met $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$.

Bewijs. Indien $\dim(\operatorname{im} T) \in \mathbb{N}_0$ kies $T_n = T$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, veronderstel dus $\dim(\operatorname{im} T) = \infty$. De afsluiting $\overline{\operatorname{im} T}$ is separabel, want

$$\operatorname{im} T \;=\; \bigcup_{k=0}^{\infty} T(U_k(0))$$

is vereniging van aftelbaar veel relatief compacte (en dus separabele) verzamelingen. Kies nu een compleet orthonormaalsysteem $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ van de separabele Hilbertruimte $\overline{\operatorname{im} T}$. Zij

$$\pi_n \;:\; H \;\longrightarrow\; H$$

de orthogonale projectie op het opspansel $< e_1, \ldots, e_n >$, dan heeft $T_n := \pi_n \circ T$ eindige rang. Bewijs nu $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ uit het ongerijmde. Veronderstel

$$\bigvee_{\varepsilon>0} \;\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} \;\bigvee_{n\geq m} \;\; \|T - T_n\| \;\geq\; \varepsilon \;.$$

Selecteer een deelrij T_{n_k} waarvoor dat altijd geldt en bijbehorend $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ met $\|x_k\| = 1$ en $\|Tx_k - T_{n_k}x_k\| \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$. De operator T is compact, dus bestaat er een deelrij $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ met

$$\lim_{l\to\infty} Tx_{k_l} \;=\; y \;\in\; \overline{\operatorname{im} T} \;.$$

In de ontbinding

$$\begin{aligned} Tx_{k_l} - T_{n_{k_l}}x_{k_l} \;&=\; \Big((\mathrm{id} - \pi_{n_{k_l}}) \circ T\Big)(x_{k_l}) \\ &=\; (\mathrm{id} - \pi_{n_{k_l}})(Tx_{k_l} - y) \;+\; (\mathrm{id} - \pi_{n_{k_l}})y \\ &=\; (\mathrm{id} - \pi_{n_{k_l}})(Tx_{k_l} - y) \;+\; \sum_{i=n_{k_l}+1}^{\infty} \langle y \mid e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

is $\|\mathrm{id} - \pi_{n_{k_l}}\| = 1$ voor alle $l \in \mathbb{N}$ en $\|Tx_{k_l} - y\|$ is een nul-rij, daarom gaat de eerste term naar nul als $l \to \infty$. Met de som gaat dan ook $\|Tx_{k_l} - T_{n_{k_l}} x_{k_l}\|$ naar nul en dat is absurd (want de benedengrens $\frac{\varepsilon}{2}$ is groter dan nul). □

Kunnen we dit bewijs gebruiken om te laten zien dat ook $T_m \to T$ voor de in (7.4) gedefinieerde operatoren? In ieder geval is $T_m = \pi_m \circ T$ waar

$$\pi_m \text{ de projectie op } \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i} \quad \text{langs} \quad \bigcap_{i=1}^{m} F_{\lambda_i} \ .$$

De Banachruimte E is de topologische directe som van deze twee gesloten deelruimten, d.w.z. π_m en $\mathrm{id} - \pi_m$ zijn begrensd. Voor een convergente deelrij met limiet $\lim_{l\to\infty} Tx_{m_l} = y$ hebben we voor de afschatting van

$$\|(\mathrm{id} - \pi_{m_l})(Tx_{m_l} - y)\| \ \leq \ \|\mathrm{id} - \pi_{m_l}\| \, \|Tx_{m_l} - y\|$$

een gemeenschappeljke bovengrens van de $\|\mathrm{id} - \pi_m\|$ nodig. In bovenstaand bewijs zijn alle π_n orthogonale projecties.

Stelling 7.11. (Banach–Steinhaus, uniform boundedness principle). Zij E een Banachruimte en $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(E)^{\mathbb{N}}$ een rij van operatoren met de eigenschap dat voor alle $x \in E$ de rijtjes $(\|T_n x\|)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ begrensd zijn. Dan bestaat $C > 0$ met $\|T_n\| \leq C$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Een puntsgewijs uniform begrensde rij van continue operatoren is dus uniform equicontinu.

Bewijs. Voor vaste $x \in E$ bestaat $k \in \mathbb{N}$ met $T_n x \in k \cdot \overline{U_1(0)} = \overline{U_k(0)}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, ofwel

$$E \ = \ \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

is de aftelbare vereniging van de gesloten verzamelingen

$$A_k \ := \ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n^{-1}(\overline{U_k(0)}) \ .$$

Volgens stelling 2.6 van Baire heeft minstens één A_k een inwendig punt y, en dan zijn ook $-y \in -A_k = A_k$ en de convexe combinatie $0 = \frac{1}{2}(y - y)$ inwendige punten van A_k. Daarom bestaat $\delta > 0$ met $U_\delta(0) \subseteq A_k$ en daarmee is

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \ \|T_n\| \ \leq \ C$$

voor $C := \frac{k}{\delta}$. □

Een puntsgewijs gedefinieerde limiet $S(x) := \lim_{n\to\infty} T_n x$ van lineaire operatoren noemt men *sterke limiet* en schrijft $S = s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n$. De sterke convergentie is zwakker dan de convergentie in de operatornorm — deze is uniform op $U_1(0)$.

Gevolg 7.12. Zij E een Banachruimte en $S = s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n$ met $T_n \in L(E)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan is ook $S \in L(E)$.

Bewijs. Voor elk punt $x \in E$ is $(\|T_n x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent en i.h.b. begrensd. De uniforme bovengrens $C > 0$ levert

$$\bigwedge_{x\in E} \quad \|Sx\| \;=\; \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} C \cdot \|x\| \;=\; C \cdot \|x\|$$

op en daarmee $\|S\| \leq C$. □

Indien $y = \lim_{m\to\infty} \pi_m y$ voor alle $y \in E$ is dus naast

$$\sum_{i=m_l+1}^{\infty} \langle y \mid e_i \rangle e_i \quad \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

automatisch ook

$$\lim_{l\to\infty} (\mathrm{id} - \pi_{m_l})(Tx_{m_l} - y) \;=\; 0 \;.$$

We kunnen dan voor de compacte operator T zonder quasi-nilpotent deel

$$T \;=\; \lim_{m\to\infty} T_m$$

concluderen, met de in (7.4) gedefinieerde approximaties van eindige rang.

Voorbeeld 7.13. Op ℓ^2 met kanoniek orthonormaalsysteem $(e_k)_k$ definieert

$$Te_k \;:=\; \frac{e_k}{k} + \frac{e_{k+1}}{k+1}$$

de compacte lineaire operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ waarvoor

$$T\left((a_i)_i\right) \;=\; (a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{3}, \frac{a_3 + a_4}{4}, \ldots) \;.$$

Het spectrum $\sigma(T)$ bestaat uit 0 en de eigenwaarden $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. De bijbehorende eigenvectoren $(a_j)_j$ voldoen aan de recursies

$$\frac{a_j \,+\, a_{j+1}}{j+1} \;=\; \frac{a_{j+1}}{k}$$

en hebben daarom coefficienten $a_j = 0$ voor $j < k$, de coefficient $a_k = 1$ en coefficienten

$$a_j \;=\; \prod_{i=k+1}^{j} \frac{k}{i-k} \qquad \text{voor } j > k \;;$$

i.h.b. is $a_{k+1} = k$. Voor alle $m \in \mathbb{N}$ is de doorsnede van alle T–invariante supplementen $F_{\frac{1}{k}}$ van de $V_{\frac{1}{k}} = E_{\frac{1}{k}}$ met $k \leq m$ gelijk aan

$$\bigcap_{k=1}^{m} F_{\frac{1}{k}} \;=\; < e_i \mid i \geq m+1 >$$

en de projectie $(\mathrm{id} - \pi_m)$ op deze doorsnede langs $\bigoplus\limits_{k=1}^{m} E_{\frac{1}{k}}$ heeft de norm

$$\|\mathrm{id} - \pi_m\| \;\geq\; \|(\mathrm{id} - \pi_m)(e_m)\| \;\geq\; m \;\stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow}\; \infty \;.$$

Terwijl $T = s\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} T_m$ voor de sterke limiet, geldt voor de operatornorm

$$\|T - T_m\| \;\geq\; \|Te_m - T_m e_m\| \;=\; \|(\mathrm{id} - \pi_m)(\frac{e_m}{m} + \frac{e_{m+1}}{m+1})\| \;\geq\; 1$$

en convergeert niet eens een deelrij T_{m_l} van T_m naar T. △

Zelfs als het erop lijkt dat we T zouden kunnen diagonalizeren — op de $V_{\frac{1}{k}} = E_{\frac{1}{k}}$ wordt met $\frac{1}{k}$ vermenigvuldigd — blijkt een 'te schuine' ligging van de eigenruimten dus nog voor moeilijkheden te kunnen zorgen. Dit kan zeker niet gebeuren als alle eigenruimten bij voorbaat loodrecht op elkaar staan, de π_m dus orthogonale projecties zijn.

8

Zelfgeadjungeerde operatoren

Zie ook §§5.4 en 5.5 in [10], §§4.1 en 4.2 in [16], §§7.4 en 8.2 in [15], §§7.2 en 7.3 in [9], §11.5 in [4] of §2.5 in [13].

Op Hilbertruimten kan men scherpere resultaten bereiken, en dit geldt nog veel sterker voor operatoren die ‘samenspelen’ met het inproduct.

Definitie 8.1. Zij H een Hilbertruimte. Een operator $T \in L(H)$ heet zelfgeadjungeerd als

$$\bigwedge_{x,y \in H} \quad \langle Tx \mid y \rangle \;=\; \langle x \mid Ty \rangle \;.$$

Voorbeeld 8.2. Een matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ is dan en slechts dan zelfgeadjungeerd als $A = A^{\mathrm{T}}$. Voor de elementen van een complexe zelfgeadjungeerde matrix moet $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ gelden. △

Voorbeeld 8.3. Zij $k \in C[0,1]^2$ met $k(t,s) = \overline{k(s,t)}$ voor alle $s, t \in [0,1]$. Dan is de (compacte lineaire) operator

$$\begin{array}{rccc} K \;: & L^2[0,1] & \longrightarrow & L^2[0,1] \\ & f & \mapsto & \int_0^1 k(..,t) f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

zelfgeadjungeerd, de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \langle Kf \mid g \rangle &= \int_0^1 (Kf)(s)\overline{g(s)}\,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^1 \Big(\int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\overline{g(s)}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(t)\overline{k(t,s)g(s)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 f(t)\overline{(Kg)(t)}\,\mathrm{d}t \;=\; \langle f \mid Kg \rangle \end{aligned}$$

moeten alleen voor f, g in de dichte deelruimte $C[0,1]$ worden nagegaan. △

Het samenspel tussen een zelfgeadjungeerde operator en het inproduct uit zich voornamelijk in de volgende stelling.

Stelling 8.4. Zij H een Hilbertruimte, $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd en $F < H$ een deelruimte met $T(F) \subseteq F$. Dan is ook $F^\perp$ invariant onder T.

Bewijs. Zij $z \in F^\perp$, dan is $\langle Tz \mid y\rangle = \langle z \mid Ty\rangle = 0$ voor alle $y \in F$. □

We hebben dus de splitsing

$$T_{|_F} \oplus T_{|_{F^\perp}} \ : \ F \oplus F^\perp \ \longrightarrow \ F \oplus F^\perp$$

indien $F < H$ naast invariant ook gesloten is. Voor een soortgelijk resultaat (in een speciaal geval!) hadden we in de Riesz theorie — algemener in Banachruimten — hard moeten werken. Is nu λ een eigenwaarde van T, zo volgt

$$V_\lambda \ = \ E_\lambda \tag{8.1}$$

uit $V_\lambda \cap E_\lambda^\perp = \{0\}$, voor dit laatste neem $z \in E_\lambda^\perp$ met $(\lambda - T)^2(z) = 0$, dan is

$$(\lambda - T)(z) \ \in \ E_\lambda \cap E_\lambda^\perp \ = \ \{0\}$$

en dus $z \in E_\lambda$ en daarom ook $z = 0$.

Stelling 8.5. Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan is $\operatorname{im} T \subseteq (\ker T)^\perp$ en $(\operatorname{im} T)^\perp = \ker T$.

Bewijs. Voor de eerste inclusie neem $x \in H$, dan is $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid Ty\rangle = 0$ voor alle $y \in \ker T$ ofwel $Tx \perp \ker T$. Hiermee volgt onmiddelijk

$$(\operatorname{im} T)^\perp \ \supseteq \ (\ker T)^{\perp\perp} \ = \ \overline{\ker T} \ = \ \ker T \ .$$

Voor de resterende inclusie neem $z \perp \operatorname{im} T$, dan is $0 = \langle Tx \mid z\rangle = \langle x \mid Tz\rangle$ voor alle $x \in H$, ofwel $Tz \in H^\perp = \{0\}$. □

Gevolg 8.6. Zij H een Hilbertruimte. Een zelfgeadjungeerde $T \in L(H)$ is dan en slechts dan inverteerbaar als

$$\bigvee_{\alpha > 0} \ \bigwedge_{x \in H} \ \|Tx\| \ \geq \ \alpha \|x\| \ .$$

Bewijs. Indien T^{-1} bestaat bereken

$$\bigwedge_{x \in H} \ \|x\| \ = \ \|T^{-1}(Tx)\| \ \leq \ \|T^{-1}\| \, \|Tx\|$$

en neem $\alpha = \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$. Omgekeerd leidt $Tx = 0$ tot $\|x\| = 0$, d.w.z. $\ker T = \{0\}$ en daarmee $\overline{\operatorname{im} T} = H$. Om te laten zien dat $\operatorname{im} T$ gesloten is (en T naast injectief dus ook surjectief) neem $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ met $\lim\limits_{n \to \infty} Tx_n = y \in \overline{\operatorname{im} T}$. Vanwege

$$\|x_n - x_m\| \ \leq \ \frac{1}{\alpha} \|Tx_n - Tx_m\| \ < \ \varepsilon$$

is (naast de convergente rij $(Tx_n)_n$ ook) $(x_n)_n$ een Cauchy-rij en bestaat in de volledige Hilbertruimte een limietpunt $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, waarmee

$$y \;=\; \lim_{n\to\infty} Tx_n \;=\; T(\lim_{n\to\infty} x_n) \;=\; Tz \;\in\; \operatorname{im} T \;.$$

De bijectieve lineaire afbeelding $T : H \longrightarrow H$ heeft een inverse afbeelding T^{-1}. Deze is automatisch lineair en moet vanwege het open mapping theorem begrensd zijn, is dus het inverse element in de Banachalgebra $L(H)$. De begrensdheid volgt ook met de expliciete afschatting

$$\|T^{-1}y\| \;=\; \|T^{-1}Tz\| \;=\; \|z\| \;\leq\; \frac{1}{\alpha}\|Tz\| \;=\; \frac{1}{\alpha}\|y\| \;,$$

welke bovendien $\|T^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\alpha}$ aantoont. □

Meer informatie over inverteerbaarheid betekent altijd ook meer informatie over het spectrum.

Stelling 8.7. Zij H een complexe Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan is

$$\sigma(T) \;\subseteq\; \overline{\left\{ \langle Tx \mid x\rangle \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}} \;\subseteq\; \mathbb{R} \;.$$

Bewijs. Voor de tweede inclusie bereken

$$\overline{\langle Tx \mid x\rangle} \;=\; \langle x \mid Tx\rangle \;=\; \langle Tx \mid x\rangle$$

en $\langle Tx \mid x\rangle \in \mathbb{R}$ stemt met zijn complex geconjugeerde overeen. Voor de eerste conclusie kies $\lambda \in \sigma(T)$, dan geldt vanwege gevolg 8.6 dat

$$\bigwedge_{\frac{1}{n}>0} \;\; \bigvee_{\|x_n\|=1} \;\; \|(\lambda - T)x_n\| \;<\; \frac{1}{n}$$

en daarmee

$$|\langle(\lambda - T)x_n \mid x_n\rangle| \;\leq\; \|(\lambda - T)x_n\|\,\|x_n\| \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \;.$$

De linker kant is gelijk aan

$$|\lambda\langle x_n \mid x_n\rangle \;-\; \langle Tx_n \mid x_n\rangle| \;=\; |\lambda \;-\; \langle Tx_n \mid x_n\rangle|$$

en dus $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Tx_n \mid x_n\rangle = \lambda$. □

In definitie 6.7 is het spectrum alleen voor complexe Banachalgebra's met 1 gedefinieerd, voor elementen van een reële Banachalgebra moeten we i.h.a. eerst complexificeren. In het geval van een zelfgeadjungeerde operator is dit niet nodig, het spectrum is gegeven door $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda - T \text{ niet inverteerbaar}\}$.

Stelling 8.8. Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan is

$$\rho(T) \;=\; \|T\| \;=\; \sup\left\{ |\langle Tx \mid x\rangle| \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\} \;.$$

Bewijs. Vanwege de afschattingen

$$\rho(T) \;=\; \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| \;\leq\; \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx \mid x\rangle| \;\leq\; \|T\|$$

is de tweede identiteit een direct gevolg van de eerste identiteit. Hiervoor gebruik

$$\bigwedge_{\|x\|=1} \quad \|Tx\|^2 \;=\; \langle Tx \mid Tx\rangle \;=\; \langle T^2x \mid x\rangle \;\leq\; \|T^2x\| \;,$$

dus in $\|T\|^2 \leq \|T^2\| \leq \|T\|\,\|T\|$ gelijkheid en na iteratie $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Hiermee volgt

$$\rho(T) \;=\; \lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;\stackrel{!}{=}\; \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{2^{-k}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \|T\|^{2^{k-k}} \;=\; \|T\|$$

met in $\stackrel{!}{=}$ overstap op een deelrij. □

Gevolg 8.9. Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan bevat het spectrum $\sigma(T)$ het getal $\|T\|$ of $-\|T\|$. □

Sinds (8.1) wisten we al dat er geen (echte) nilpotente zelfgeadjungeerde operatoren bestaan, en de implicatie $\rho(T) = 0 \Rightarrow \|T\| = 0$ toont aan dat een zelfgeadjungeerde operator $T \neq 0$ ook nooit quasi-nilpotent kan zijn.

Is dus T een compacte zelfgeadjungeerde operator met een eindig spectrum $\sigma(T) = \{\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, dan kunnen we de splitsing (7.2) in de vorm

$$T \;=\; T_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} T_i \;\;:\;\; E_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i} \;\longrightarrow\; E_0 \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}$$

herschrijven met $T_0 = 0$ en $T_i = \lambda_i\,\mathrm{id}_{E_{\lambda_i}}$. Bovendien staan de eigenruimten loodrecht op elkaar, uit $Tx = \lambda x$ en $Ty = \mu y$ volgt

$$\begin{aligned} \lambda\langle x \mid y\rangle \;&=\; \langle \lambda x \mid y\rangle \;=\; \langle Tx \mid y\rangle \;=\; \langle x \mid Ty\rangle \\ &=\; \langle x \mid \mu y\rangle \;=\; \overline{\mu}\langle x \mid y\rangle \;=\; \mu\langle x \mid y\rangle \end{aligned}$$

(want eigenwaarden zijn reëel) en daarmee of $\langle x \mid y\rangle = 0$ of $\lambda = \mu$. Samengevat kunnen we dus

$$T \;=\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\pi_{\lambda_i} \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\,\pi_\lambda$$

schrijven, waar $\pi_\lambda : H \longrightarrow H$ de orthogonale projectie op E_λ is.

Stelling 8.10. Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$ zelfgeadjungeerd. Dan is

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda \ .$$

Voor een oneindig spectrum $\sigma(T) = \{0\} \dot{\cup} \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ van T betekent deze formule convergentie

$$T = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \pi_{\lambda_i}$$

in de Banachalgebra $L(H)$.

Bewijs. Schrijf $H = E_0 \oplus E_0^\perp$ met $E_0 = \ker T$ en $E_0^\perp = \overline{\operatorname{im} T}$. Alle eigenruimten E_λ met $\lambda \neq 0$ zijn gesloten deelruimten van $E_0^\perp$, en om

$$E_0^\perp = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} E_\lambda$$

te verifiëren zonder de oneindige directe som aan de rechter kant te definiëren construeren we een compleet orthonormaalsysteem van $E_0^\perp$. Kies hiervoor in elke (eindigdimensionale) E_λ een compleet orthonormaalsysteem $\{e_1^\lambda, \ldots, e_{k(\lambda)}^\lambda\}$, beschouw het orthonormaalsysteem

$$\left\{ e_j^\lambda \;\middle|\; \lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\} \,,\, j = 1, \ldots, k(\lambda) \right\}$$

en ga na dat de hierdoor voorgebrachte gesloten deelruimte

$$F = \overline{< e_j^\lambda \mid \lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\} \,,\, j = 1, \ldots, k(\lambda) >}$$

met $E_0^\perp$ overeenstemt. De restrictie

$$T_{|_{F^\perp}} : F^\perp \longrightarrow F^\perp$$

is compact en zelfgeadjungeerd met spectrum $\sigma(T_{|_{F^\perp}}) = \{0\}$ (want alle eigenvectoren met eigenwaarden $\lambda \neq 0$ liggen in F). Dit impliceert $T_{|_{F^\perp}} = 0$ ofwel $F^\perp \subseteq E_0$, daarmee

$$F = F^{\perp\perp} \supseteq E_0^\perp = \overline{\operatorname{im} T} \supseteq E_\lambda$$

voor alle $\lambda \neq 0$ en F is de kleinste gesloten deelruimte die al deze E_λ bevat. Schrijf nu $x \in H$ in de vorm $x = y + z \in F \oplus F^\perp = \overline{\operatorname{im} T} \oplus \ker T$ en ontbind

$$y = \sum_{\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}} \sum_{j=1}^{k(\lambda)} \langle y \mid e_j^\lambda \rangle e_j^\lambda$$

in het compleet orthonormaalsysteem van $\overline{\operatorname{im} T}$. Dan is

$$Tx \;=\; Ty \,+\, Tz \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma(T)\setminus\{0\}} \lambda \sum_{j=1}^{k(\lambda)} \langle y \mid e_j^\lambda\rangle e_j^\lambda \,+\, 0 \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda(y)$$

en alle π_λ sturen het $F^\perp$–gedeelte z van x naar nul, d.w.z. $\pi_\lambda(y) = \pi_\lambda(x)$. $\square$

9

Integraalvergelijkingen

Zie ook §6.7 in [10], §§4.3–4.5 in [16], §§9–11 in [15], §§8.1–8.4 in [9], §§11.6 en 11.7 in [4] of §§0.1 en 2.6 in [13].

Zij $k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ een continue functie met $k(t,s) = k(s,t)$ voor alle $s, t \in [0,1]$. Voor $\mu \in \mathbb{C}$ en $h \in C[0,1]$ bestudeer

$$f(s) \; - \; \mu \int_0^1 k(s,t) f(t) \, \mathrm{d}t \;\; = \;\; h(s) \tag{9.1}$$

en de bijbehorende homogene integraalvergelijking

$$f(s) \; - \; \mu \int_0^1 k(s,t) f(t) \, \mathrm{d}t \;\; = \;\; 0 \; . \tag{9.2}$$

Net als voor eindigdimensionale matrices geldt één van de volgende twee alternatieven.

Stelling 9.1. (Fredholm-alternatief). Of de inhomogene lineaire integraalvergelijking (9.1) *heeft voor iedere* $h \in C[0,1]$ *een oplossing* $f \in C[0,1]$, *of de bijbehorende homogene vergelijking* (9.2) *heeft meer dan één oplossing.*

De eenduidigheid van de oplossing $f = 0$ van (9.2) impliceert dus de existentie van de oplossing van (9.1), en deze is dan eveneens eenduidig.

Bewijs. De vergelijking (9.2) is de eigenwaardevergelijking voor de compacte(!) operator

$$(T(f))(s) \;\; = \;\; \int_0^1 k(s,t) f(t) \, \mathrm{d}t \tag{9.3}$$

waarbij $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$, dus $\lambda = 0$ komen we niet tegen, en voor $\mu = 0$ is de oplossing $f = h$ van (9.1) al bekend (en uniek). Indien (9.2) voor $\lambda = \dfrac{1}{\mu} \neq 0$ alleen de triviale oplossing $f = 0$ heeft is λ geen eigenwaarde van T, dus(!) $\lambda \notin \sigma(T)$, d.w.z. $\lambda - T$ is inverteerbaar en

$$f \;=\; \lambda(\lambda - T)^{-1}(h) \;=\; \frac{1}{\mu}(\frac{1}{\mu} - T)^{-1}(h) \;=\; (1-\mu T)^{-1}(h)$$

lost (9.1) op. □

Door $f = h + \mu T f$ te schrijven zien we bovendien $f \in C[0,1]$ omdat het beeld van $T : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ uit continue functies bestaat, want

$$\begin{aligned} |(T(f))(s) - (T(f))(r)| \;&\leq\; \int_0^1 |k(s,t) - k(r,t)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq\; \left(\int_0^1 |k(s,t) - k(r,t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \end{aligned}$$

met een toepassing van de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz in de tweede afschatting. Bijna dezelfde berekening

$$\|Tf\|_\infty \;\leq\; \sup_{0\leq s\leq 1} \left(\int_0^1 |k(s,t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2$$

toont aan dat

$$T \;:\; L^2[0,1] \;\longrightarrow\; C[0,1]$$

continu is, en met iets meer inspaning volgt ook dat deze integraaloperator (tussen twee verschillende ruimten) compact is.

Stelling 9.2. De eigenruimten E_λ van de door (9.3) *gedefinieerde operator T op de Hilbertruimte $L^2[0,1]$ staan loodrecht op elkaar, voor $\lambda \neq 0$ heeft E_λ eindige dimensie en bestaat uit continue functies. Indien* $\ker T = \{0\}$ *is er een compleet orthonormaalsysteem $(e_i)_i$ van continue eigenfuncties. Voor $h \in$* $\operatorname{im} T$ *is*

$$\lim_{n\to\infty} \|h \;-\; \sum_{i=1}^{n} \langle h \mid e_i\rangle e_i\|_\infty \;=\; 0 \;.$$

Bovendien is

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2 \,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \;=\; \sum_\lambda \lambda^2 \,\dim E_\lambda$$

(waar we de conventie $0^2\infty = 0$ gebruiken).

Bewijs. Vanwege voorbeeld 8.3 is T zelfgeadjungeerd en staan de eigenruimten dus loodrecht op elkaar, bovendien geldt

$$L^2[0,1] \;=\; \bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)} E_\lambda \;.$$

De eigenfuncties in E_λ voldoen aan $f = \frac{1}{\lambda} T f \in \operatorname{im} T$ voor $\lambda \neq 0$, en $\ker T = \{0\}$ betekent dat 0 geen eigenwaarde is. Schrijf $h \in \operatorname{im} T$ als $h = Tf$ met

$f \in (\ker T)^\perp$, dit maakt de keuze van f eenduidig. De vereniging $(e_i)_i$ van eigenfuncties uit het bewijs van stelling 8.10 met eigenwaarden $\lambda_i \neq 0$ is een compleet orhonormaalsysteem van $(\ker T)^\perp$. Daarom is de rij van partiële sommen

$$f_n = \sum_{i=1}^n \langle f \mid e_i \rangle e_i$$

t.o.v. $\|..\|_2$ convergent met limiet f en dus

$$\begin{aligned} Tf_n &= \sum_{i=1}^n \langle f \mid e_i \rangle T e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle f \mid e_i \rangle e_i \overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \sum_{i=1}^n \langle f \mid \lambda_i e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle f \mid T e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle Tf \mid e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle h \mid e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

convergent t.o.v. $\|..\|_\infty$. Vanwege $\|..\|_2 \leq \|..\|_\infty$ moet de limiet overeenstemmen met de limiet h t.o.v. $\|..\|_2$.

Voor de rechter kant van de laatste bewering merk op dat de eigenwaarde λ net zo veel eigenfuncties onder de e_i heeft als $\dim E_\lambda$ aangeeft en dus precies zó vaak in

$$\sum_{i=1}^\infty \|Te_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^2 \|e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^2$$

voorkomt. Schrijf $k_s(t) := k(s,t)$, dan is $k_s \in C[0,1] \subseteq L^2[0,1]$ voor elke $s \in [0,1]$ en dus

$$\|k_s\|_2^2 = \sum_{i=1}^\infty |\langle k_s \mid e_i \rangle|^2$$

voor een compleet orthonormaalsysteem $(e_i)_i$ van $(\ker T)^\perp$. Immers, voor $f \in \ker T$ is $\langle k_s \mid f \rangle = (Tf)(s) = 0$. Bereken

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \|Te_i\|_2^2 &= \sum_{i=1}^\infty \int_0^1 |(T(e_i))(s)|^2 \mathrm{d}s \overset{!}{=} \int_0^1 \sum_{i=1}^\infty |(T(e_i))(s)|^2 \mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^\infty \left| \int_0^1 k(s,t) e_i(t)\, \mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{i=1}^\infty |\langle k_s \mid e_i \rangle|^2 \, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \|k_s\|_2^2 \mathrm{d}s = \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2 \mathrm{d}t \mathrm{d}s \end{aligned}$$

waarbij het in de verwisseling $\overset{!}{=}$ van som en integraal om monotone uniform convergente reeksen gaat. $\square$

De Schrödingervergelijking

$$\mathrm{i}\hbar \dot{\Psi}(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t,x) + V(x) \cdot \Psi(t,x) =: (H\Psi)(t,x)$$

is een lineaire partiële differentiaalvergelijking, de aan de rechter kant gedefinieerde *Hamilton-operator* bevat naast de vermenigvuldiging met de (reëelwaardige) potentiaal V i.h.b. de Laplace-operator

$$\Delta \;=\; \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \;.$$

In de kwantummechanica zijn de oplossingen hiervan voor vaste tijd t de toestandsvariabelen $\Psi_t(x) = \Psi(t,x)$. Om het eenvoudig te houden nemen we $i \equiv 1$ en beschouwen een deeltje met één vrijheidsgraad, bovendien beperken we ons tot het interval $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

De absolute waarde in het kwadraat $x \mapsto |\Psi(t,x)|^2$ van Ψ_t is de kansdichtheid voor de positie van het deeltje, de integraal

$$\int_A |\Psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x$$

geeft de kans aan dat het deeltje zich in $A \subseteq [0,1]$ bevindt. I.h.b. is

$$\int_0^1 |\Psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x \;=\; 1$$

en dus $\Psi_t \in L^2([0,1],\mathbb{C})$ voor elk tijdstip $t \in \mathbb{R}$. Bovendien is

$$\int_0^1 x|\Psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x \;=\; \langle \Psi_t \mid x \cdot \Psi_t \rangle$$

de verwachtingswaarde van de positie, en indien de variantie

$$\langle \Psi_t \mid (x - \langle \Psi_t \mid x \cdot \Psi_t \rangle)^2 \cdot \Psi_t \rangle$$

voldoende klein is weten we ‘voldoende precies’ waar het deeltje is.

Om ‘een’ oplossing te verkrijgen (de triviale oplossing $\Psi = 0$ van de Schrödingervergelijking is vanwege $\|0\|_2 \neq 1$ geen toestandsvariabele) probeer scheiding van variabelen

$$\Psi(t,x) \;=\; \varphi(t) \cdot f(x) \;. \tag{9.4}$$

Deze separatie-ansatz leidt tot

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\varphi}(t) \cdot f(x) \;=\; \varphi(t) \cdot (Hf)(x)$$

en in de resulterende vergelijking

$$\frac{\mathrm{i}\hbar\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} \;=\; \frac{(Hf)(x)}{f(x)} \;=\; E$$

hangt de eerste uitdrukking niet van x af en de tweede uitdrukking niet van t, waarmee beiden gelijk moeten zijn aan $E \in \mathbb{R}$; deze zgn. separatie-constante heeft de rol van de energie. De oplossing

$$\varphi(t) \;=\; \varphi(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Et}$$

van de vergelijking $\dot{\varphi} = \dfrac{E}{\mathrm{i}\hbar}\varphi$ in φ oscilleert in de tijd, men noemt Ψ in de kwantummechanica daarom ook een golf-functie. De vergelijking in f is

$$Hf \;=\; Ef \;,$$

we zoeken dus eigenfuncties behorende bij de energiewaarde E. Indien H zelfgeadjungeerd en compact was zouden we de theorie uit hoofdstuk 8 onmiddelijk kunnen toepassen. We zullen zo meteen zien dat dit niet het geval is en H integendeel zelfs inverteerbaar is, maar de inverse H^{-1} blijkt compact te zijn; de gevolgen hiervan formuleren we dan in stelling 9.3.

We bekijken hiervoor de ingrediënten afzonderlijk. De vermenigvuldigingsoperator[1] $(Vf)(x) := V(x) \cdot f(x)$ voldoet aan

$$\langle Vf \mid g \rangle \;=\; \int_0^1 V(x)f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \;\stackrel{!}{=} \langle f \mid Vg \rangle$$

indien V op $[0,1]$ reële waarden aanneemt, hetgeen voor een potentiaalfunctie een natuurkundig zinvolle eis is. We blijven het (wiskundig) eenvoudig houden en nemen aan dat $V \in C([0,1],\mathbb{R})$ continu is. Indien $0 \notin V([0,1])$ kunnen we de inverse

$$(V^{-1}f)(x) \;=\; \frac{1}{V(x)} \cdot f(x)$$

d.m.v. delen berekenen, i.h.b. is $\sigma(V) = V([0,1])$ een heel interval en de operator V zeker niet compact. De operator is wel continu, met norm

$$\|V\| \;=\; \max_{0 \leq x \leq 1} |V(x)|$$

(want $\|Vf\|_2 \leq \|V\|\,\|f\|_2$ en de gelijkheid volgt m.b.v. functies f die bij het extremum van V geconcentreerd zijn). Dus V is een begrensde zelfgeadjungeerde operator, maar niet compact.

De Laplace-operator $(\Delta f)(x) = f''(x)$ is niet eens begrensd, zoals we al in voorbeeld 3.4 hebben vastgesteld. Is Δ ten minste zelfgeadjungeerd? Om

$$\begin{aligned}
\langle \Delta f \mid g \rangle \;&=\; \int_0^1 f''(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[f'(x)\overline{g(x)}\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x \\
&=\; \Big[f'(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{g'(x)}\Big]_0^1 + \int_0^1 f(x)\overline{g''(x)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

aan $\langle f \mid \Delta g \rangle$ gelijk te kunnen stellen moet

[1] Het is even wennen, maar het blijkt niet tot misverstanden te leiden om in de notatie geen verschil tussen de operator V op $L^2[0,1]$ en de functie V op $[0,1]$ te maken.

$$f'(x)\overline{g(x)} \;-\; f(x)\overline{g'(x)}$$

op de grenzen 0 en 1 van de interval verdwijnen. Sowieso is $\mathit{\Delta}$ niet op heel $L^2[0,1]$ gedefinieerd, ook niet op $C[0,1]$. Dit is *typisch* voor onbegrensde operatoren! We *kiezen* nu als domein

$$\mathcal{D}(\mathit{\Delta}) \;:=\; \left\{ f \in C^2[0,1] \;\middle|\; f(0) = f(1) = 0 \right\} .$$

Dit komt neer op Dirichlet-randvoorwaarden. We hadden ook met Neumann-randvoorwaarden $f'(0) = f'(1) = 0$ kunnen werken, of een combinatie van dezen. I.h.b. is

$$\langle \mathit{\Delta} f \mid f \rangle \;=\; -\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x \;<\; 0$$

voor $f \neq 0$ en is het spectrum $\sigma(\mathit{\Delta})$ bevat in $]-\infty, 0]$. Althans, dat verwachten we vanwege gevolg 8.6 (aan wiens voorwaarde $\mathit{\Delta}$ niet voldoet). We zullen in stelling 9.3 zien dat dit ook echt zo is.

Natuurkundig gezien zijn alleen potentiaal*verschillen* belangrijk, we kunnen dus een constante bij V optellen opdat

$$\sigma(V) \;=\; V([0,1]) \;=\; [V_0, \|V\|] \;=\; \left\{ \langle Vf \mid f \rangle \;\middle|\; \langle f \mid f \rangle = 1 \right\}$$

met $V_0 > 0$. Dan zou $\sigma(H) \subseteq [V_0, \infty[$ en i.h.b. H inverteerbaar zijn. Differentiëren maakt functies minder regulier (dat is uiteindelijk de reden waarom $\mathit{\Delta}$ niet begrensd is). We zullen zien dat omgekeerd H^{-1} compact is, juist omdat functies aan regulariteit winnen. Om $H^{-1}f$ te berekenen moeten we het randwaardeprobleem

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} g(x) \;+\; V(x) \cdot g(x) \;=\; \frac{2m}{\hbar^2} f(x) \tag{9.5a}$$

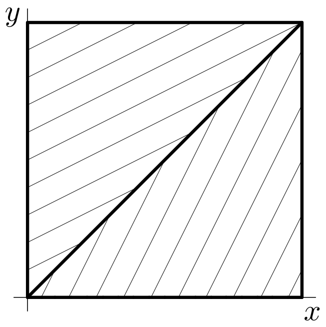
$$g(0) \;=\; g(1) \;=\; 0 \tag{9.5b}$$

oplossen, voor het gemak hebben we in (9.5a) met $2m$ vermenigvuldigd en door $\hbar^2$ gedeeld en deze factoren in V opgenomen (de oplossing g verandert hierdoor niet).

Om (9.5) op te lossen bereken de bijbehorende functie van Green (zie [5] voor meer details en de achtergrond, hierop berust uiteindelijk de inverteerbaarheid van de Hamilton-operator H). Kies hiervoor oplossingen $g_0 \neq 0$, $g_1 \neq 0$ van de homogene vergelijking

$$-g''(x) \;+\; V(x) \cdot g(x) \;=\; 0 \tag{9.6}$$

met $g_0(0) = 0$ en $g_1(1) = 0$, dan zijn $g_0(1) \neq 0$ en $g_1(0) \neq 0$ want anders zit g_0 danwel g_1 in $\ker H \overset{!}{=} \{0\}$. I.h.b. volgt de lineaire onafhankelijkheid van $g_0, g_1 \in C^2[0,1]$, dus



Figuur 9.1. De functie van Green wordt afzonderlijk op de driehoeken boven en beneden de diagonaal (glad) gedefinieerd en continu (maar niet differentieerbaar) aan elkaar gelijmd.

$$W(x) \;=\; \det\begin{pmatrix} g_0(x) & g_1(x) \\ g_0'(x) & g_1'(x) \end{pmatrix} \;\neq\; 0$$

(de Wronski-determinant is niet de nulfunctie) en we willen laten zien dat deze in geen enkel punt $x \in [0,1]$ verdwijnt. De afgeleide voldoet aan

$$W'(x) \;=\; g_0(x)g_1''(x) \;+\; g_0'(x)g_1'(x) - g_0'(x)g_1'(x) \;-\; g_0''(x)g_1(x) \;\stackrel{!}{=}\; 0$$

omdat g_0 en g_1 oplossingen van (9.6) zijn, d.w.z. $W \neq 0$ is een constante. Definieer

$$G(x,y) \;:=\; \begin{cases} \frac{-1}{W} g_0(x)g_1(y) & x \geq y \\ & \text{als} \\ \frac{-1}{W} g_0(y)g_1(x) & x \leq y \end{cases}$$

met $G(x,x) = \frac{-1}{W} g_0(x)g_1(x)$ op de diagonaal, dus G is continu en C^2 op de afzonderlijke driehoeken, zie figuur 9.1. Zoals elke integraaloperator is

$$(H^{-1}f)(x) \;=\; \int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

compact, en we nemen uit [5] over dat deze inderdaad met de inverse van H overeenstemt. Het komt er kort gezegd op neer dat het na elkaar uitvoeren van vermenigvuldiging met $G(..,y)$ en de Hamilton-operator H een resultaat oplevert dat in het punt x overeenstemt met de delta-distributie $\delta(x-y)$, waarvoor men onder het integraalteken differentieert.

Stelling 9.3. Zij $H : \mathcal{D}(\Delta) \longrightarrow L^2[0,1]$ *de Hamilton-operator met potentiaal* $V(x) \geq V_0 > 0$. *Dan bestaat het spectrum* $\sigma(H)$ *uit (enkelvoudige) eigenwaarden* E_k *met*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{E_k} \;=\; \int_0^1 \int_0^1 G(x,y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en $0 < E_1 < E_2 < \ldots < E_k < E_{k+1} \to \infty$. *De bijbehorende (genormeerde) eigenfuncties vormen een compleet orthonormaalsysteem bestaande uit functies* $\psi_k \in \mathcal{D}(\Delta)$.

Bewijs. De meeste uitspraken zijn een direct gevolg van de algemene spectraalstelling 9.2 over integraaloperatoren en

$$\psi_k \;=\; E_k H^{-1}\psi_k \;\in\; \operatorname{im} H^{-1} \;=\; \mathcal{D}(\varDelta) \;\subseteq\; C^2[0,1]$$

levert soortgelijk een verbeterde regulariteit van de eigenfuncties op. De gelijkheden

$$\begin{aligned}(E - H)^{-1} &= E^{-1}(E^{-1})^{-1}H^{-1}(H^{-1})^{-1}(E - H)^{-1}\\ &= E^{-1}H^{-1}(H^{-1} - E^{-1})^{-1} \;=\; -\frac{1}{E}H^{-1}(\frac{1}{E} - H^{-1})^{-1}\end{aligned}$$

voor $E^{-1} \notin \sigma(H^{-1})$ tussen compacte operatoren tonen aan dat $\sigma(H^{-1}) = \{E \in \mathbb{R} \mid E^{-1} \in \sigma(H)\}$ is. Om $\dim E_k = 1$ te laten zien neem $Hf = E_k f$ en $Hg = E_k g$, dan volgt voor de Wronski-determinant

$$f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \;\equiv\; f(0)g'(0) - f'(0)g(0) \;=\; 0$$

ofwel f en g zijn evenwijdig. □

De vergelijking $\psi_k''(x) = (V(x) - E_k)\cdot\psi_k(x)$ zorgt voor gladde eigenfuncties, indien $V \in C^n[0,1]$ geldt $\psi_k \in C^{n+2}[0,1]$, i.h.b. $\psi_k \in C^\infty[0,1]$ voor $V \in C^\infty[0,1]$. In stelling 9.2 kregen we naast de verbeterde regulariteit van de eigenfuncties ook uniforme approximatie. Letterlijk dezelfde argumentatie geeft uniforme approximatie

$$f \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle f \mid \psi_k\rangle\psi_k$$

van de functie zelf en van haar afgeleide

$$f' \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle f \mid \psi_k\rangle\psi_k' \;,$$

d.w.z. in de $\|..\|_{C^1}$–norm op de ruimte $C^1[0,1]$ van continu differentieerbare functies, want

$$\begin{aligned}\|H^{-1}f\|_{C^1} &= \|H^{-1}f\|_\infty + \|(H^{-1}f)'\|_\infty\\ &= \sup_{0\le x\le 1}\,\Big|\int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\Big| + \sup_{0\le x\le 1}\,\Big|\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\Big|\\ &\overset{!}{\le} \|x\mapsto(\int_0^1 |G(x,y)|^2\mathrm{d}y)^{\frac12}\|_\infty\,\|f\|_2\\ &\qquad + \sup_{0\le x\le 1}\,\Big|\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}G(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\Big|\\ &\le \Big(\|x\mapsto(\int_0^1 |G(x,y)|^2\mathrm{d}y)^{\frac12}\|_\infty\\ &\qquad + \|x\mapsto(\int_0^1 |\frac{\partial}{\partial x}G(x,y)|^2\mathrm{d}y)^{\frac12}\|_\infty\Big)\cdot\|f\|_2\end{aligned}$$

laat zien dat de operator

$$H^{-1} \;:\; (L^2[0,1], \|..\|_2) \;\longrightarrow\; (C^1[0,1], \|..\|_{C^1})$$

ook als operator tussen deze ruimten begrensd is. Hier is bij $\overset{!}{\leq}$ in de eerste term na de driehoeksongelijkheid voor integralen de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz toegepast en in de tweede term zijn integraal en afgeleide verwisseld (waarna eveneens de driehoeksongelijkheid voor integralen en de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz worden toegepast).

De separatie-ansatz (9.4) leidt voor de oorspronkelijke Schrödingervergelijking $\mathrm{i}\hbar\dot{\Psi} = H\Psi$ niet alleen tot speciale oplossingen. Een gegeven beginwaarde

$$\psi \;=\; \Psi(t=0,\ldots) \;\in\; \mathcal{D}(\Delta)$$

kunnen we in $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi \mid \psi_k \rangle \psi_k$ ontbinden en verkrijgen

$$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \quad \bigwedge_{x\in[0,1]} \quad \Psi(t,x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \langle \psi \mid \psi_k \rangle \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_k t} \psi_k(x)$$

voor de tijdsontwikkeling, dit is pas de bevestiging voor de separatie-ansatz.

Voorbeeld 9.4. In het geval van een constant potentiaal $V(x) \equiv V_0 = \alpha^2 > 0$ leiden de oplossingen $g_0(x) = \sinh \alpha x$ en $g_1(x) = \sinh(\alpha(x-1))$ van $g'' = \alpha^2 g$ tot de functie

$$G(x,y) \;:=\; \begin{cases} -\frac{\sinh(\alpha x)\sinh(\alpha(y-1))}{\alpha \sinh \alpha} & x \geq y \\ & \text{als} \\ -\frac{\sinh(\alpha y)\sinh(\alpha(x-1))}{\alpha \sinh \alpha} & x \leq y \end{cases}$$

van Green voor het randwaardeprobleem (9.5). Echter, de homogene vergelijking (9.6) heeft onder de randvoorwaarden (9.5b) ook voor $V = 0$ alleen de triviale oplossing, dus $0 \notin \sigma(\Delta)$ en de constructie van de functie van Green d.m.v. $g_0(x) = x$ en $g_1(x) = x - 1$ leidt tot de formule

$$(\Delta^{-1}f)(x) \;=\; x\int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y \;-\; \int_0^x y f(y)\,\mathrm{d}y \;-\; x\int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y$$

voor de inverse van de Laplace-operator op $[0,1]$. △

10

Operatoren in Hilbertruimten

Zie ook §§5.2, 5.8 en 5.18 in [16], §§7.3 en 8.1 in [15], §§6.1, 6.2, 6.4 en 7.2 in [9], §11.5 in [4] of §7.2 in [13].

De eigenschap 'zelfgeadjungeerd' bleek heel handig te zijn. We konden hiermee niet alleen compacte operatoren beter beschrijven, ook voor algemene begrensde operatoren waren we in staat om verdere conclusies te trekken. We kregen op die manier zelfs enig grip op de niet eens begrensde Laplace-operator. Wat zit achter deze success-stories? Om exemplarisch een idee te geven hoe men de theorie van (lineaire) begrensde operatoren tot het onbegrensde geval kan uitbreiden worden de twee volgende definities iets algemener geformuleerd dan we ze later nodig hebben.

Stelling (en definitie) 10.1. Zij H een Hilbertruimte, $\mathcal{D}(T) < H$ een dichte deelruimte en $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ een lineaire operator. Dan bestaat op

$$\mathcal{D}(T^*) \quad := \quad \left\{ y \in H \;\middle|\; \bigvee_{z \in H} \; \bigwedge_{x \in \mathcal{D}(T)} \langle Tx \mid y \rangle = \langle x \mid z \rangle \right\}$$

precies één afbeelding $T^* : \mathcal{D}(T^*) \longrightarrow H$ met de eigenschap

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{D}(T)} \quad \bigwedge_{y \in \mathcal{D}(T^*)} \quad \langle Tx \mid y \rangle \quad = \quad \langle x \mid T^* y \rangle$$

en T^* is lineair. We noemen T^* de geadjungeerde van T.

In het geval van Δ hebben we al gezien dat T^* eveneens niet begrensd hoeft te zijn. Voor begrensde T zie stelling 10.3 beneden.

Bewijs. Eerst éénduidigheid: stel $\langle x \mid T^* y \rangle = \langle Tx \mid y \rangle = \langle x \mid z \rangle$, dus $\langle x \mid T^* y - z \rangle = 0$ voor alle $x \in \mathcal{D}(T)$, d.w.z. $T^* y - z \in \mathcal{D}(T)^{\perp} = \{0\}$ (want $\mathcal{D}(T)$ ligt dicht in H).

Nu nog existentie: de definitie van $\mathcal{D}(T^*)$ geeft ons een candidaat z voor $T^* y$ en we laten nu zien dat de zo gedefinieerde T^* (waarom is dit een afbeelding?) lineair is. Voor $\lambda \in \mathbb{K}$ en $y, z \in \mathcal{D}(T^*)$ is

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{D}(T)} \quad \langle x \mid T^*(\lambda y + z)\rangle \;=\; \bar{\lambda}\,\langle Tx \mid y\rangle \;+\; \langle Tx \mid z\rangle \;=\; \langle x \mid \lambda T^* y + T^* z\rangle$$

waardoor ook $\lambda y + z \in \mathcal{D}(T^*)$. Bovendien staat het verschil tussen $T^*(\lambda y + z)$ en $\lambda T^* y + T^* z$ loodrecht op de dichte deelruimte $\mathcal{D}(T)$. □

Definitie 10.2. Indien $T = T^*$ heet T zelfgeadjungeerd.

Dit houdt in dat $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$. Hieraan voldoet $\Delta = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ op

$$\mathcal{D}(\Delta) \;=\; \left\{\, f \in C^2[0,1] \;\middle|\; f(0) = f(1) = 0 \right\}$$

niet, want

$$\mathcal{D}(\Delta^*) \;=\; \left\{\, f = \sum_k \langle f \mid \psi_k\rangle \psi_k \;\middle|\; \sum_k \langle f \mid \psi_k\rangle \psi_k'' \in L^2[0,1] \right\} \;.$$

Maar we kunnen ook Δ uitbreiden tot deze verzameling, en dan geldt $\Delta = \Delta^*$. Dit lukt wel vaker, men noemt zo'n operator *essentieel* zelfgeadjungeerd en spreekt van een *symmetrische* (of *Hermite*sche) operator als alleen maar $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid Ty\rangle$ voor alle $x, y \in \mathcal{D}(T)$.

Vanaf nu beperken we ons weer tot begrensde operatoren.

Stelling 10.3. Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$. Dan is ook $T^* \in L(H)$ en bovendien $\|T\| = \|T^*\|$.

I.h.b. is elke begrensde symmetrische operator automatisch zelfgeadjungeerd en bestaat tussen definities 10.2 en 8.1 geen tegenspraak.

Bewijs. De eerste taak is om $\mathcal{D}(T^*) = H$ te laten zien. De afbeelding $(x, y) \mapsto \langle Tx \mid y\rangle$ is[1] sesquilineair, en vanwege de ongelijkheid van Cauchy–Schwarz geldt

$$\bigwedge_{x,y\in H} \quad |\langle Tx \mid y\rangle| \;\leq\; \|T\|\,\|x\|\,\|y\| \;.$$

Voor vaste y is daarmee

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \langle Tx \mid y\rangle \end{array}$$

lineair en continu, dus een element van de duale ruimte $H^* \cong H$. De laatste isomorfie komt voort uit stelling 4.5 van Riesz: voor vaste y bestaat $z \in H$ met $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid z\rangle$. Hierdoor is (elke) y een element van $\mathcal{D}(T^*)$ en $T^* y = z$. De afschatting

[1] Anderhalf keer lineair: lineair in het eerste argument en semilineair in het tweede argument.

$$\|T^*y\| \;=\; \sup_{\|x\|=1} |\langle x \mid z\rangle| \;=\; \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx \mid y\rangle| \;\leq\; \sup_{\|x\|=1} \|T\|\,\|x\|\,\|y\| \;=\; \|T\|\,\|y\|$$

levert de ongelijkheid $\|T^*\| \leq \|T\|$ op en dus ook $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$. □

Voorbeeld 10.4. Voor een matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ is $A^* = \bar{A}^{\mathrm{T}}$, d.w.z. de elementen van de geadjungeerde worden gegeven door $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$. △

Voorbeeld 10.5. De geadjungeerde van de rechter shift

$$S(a_1, a_2, a_3, \ldots) \;=\; (0, a_1, a_2, \ldots)$$

op $H = \ell^2$ is de linker shift $S^*(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)$. △

Voorbeeld 10.6. Zij $U : H \longrightarrow H$ unitair, d.w.z. U is surjectief en behoudt het inproduct. Voor $x, z \in H$ is

$$\langle Ux \mid z\rangle \;=\; \langle Ux \mid UU^{-1}z\rangle \;=\; \langle x \mid U^{-1}z\rangle$$

en de geadjungeerde stemt overeen met de inverse. △

Stelling (en definitie) 10.7. Zij H een Hilbertruimte en $S \in L(H)$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.

(i) $H = F \oplus F^\perp$ met $\|Sy\| = \|y\|$ voor alle $y \in F$ en $Sz = 0$ voor alle $z \in F^\perp$.
(ii) S^*S is een orthogonale projectie.

In dit geval noemen we S een partiële isometrie.

Bewijs. Voor $(i) \Rightarrow (ii)$ schrijf $x \in H$ in de vorm $x = y + z$ met $y \in F$, $z \in F^\perp$ en bereken

$$\begin{aligned}
\langle S^*S(x) \mid x\rangle \;&=\; \langle S^*S(y) \mid y\rangle \;+\; \langle S^*S(y) \mid z\rangle \;+\; \langle S^*S(z) \mid y\rangle \;+\; \langle S^*S(z) \mid z\rangle \\
&=\; \langle y \mid y\rangle \;+\; \langle Sy \mid Sz\rangle \;+\; 0 \;+\; 0 \\
&=\; \langle y \mid y + z\rangle \;=\; \langle \pi_F(x) \mid x\rangle\ .
\end{aligned}$$

De zelfgeadjungeerde operator $S^*S - \pi_F$ voldoet dus aan

$$\bigwedge_{x\in H} \langle (S^*S - \pi_F)(x) \mid x\rangle \;=\; 0$$

en moet daarom verdwijnen. Voor $(i) \Leftarrow (ii)$ begin met $S^*S = \pi_F$, dan is

$$\bigwedge_{z\in F^\perp} \|Sz\|^2 \;=\; \langle Sz \mid Sz\rangle \;=\; \langle S^*Sz \mid z\rangle \;=\; \langle \pi_F(z) \mid z\rangle \;=\; 0$$

en

$$\bigwedge_{y\in F} \|Sy\|^2 \;=\; \langle \pi_F(y) \mid y\rangle \;=\; \|y\|^2$$

□

De geadjungeerde S^* is dan eveneens een partiële isometrie. Voorbeelden zijn de rechter shift, met $S_r^* S_r = \mathrm{id}$, en de linker shift, met $S_l^* S_l = \mathrm{id} - \pi_{<e_1>}$.

Net zo als de studie van begrensde operatoren transparanter wordt op het hoger abstractie-niveau van Banachalgebra's is het de moeite waard om de $*$–operatie wat meer abstract te bestuderen.

Definitie 10.8. Zij B een Banachalgebra en $^* : B \longrightarrow B$ een involutie, d.w.z. $(T^*)^* = T$ voor alle $T \in B$, met de eigenschappen

(i) $(S+T)^* = S^* + T^*$ *voor alle* $S, T \in B$
(ii) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ *voor alle* $\lambda \in \mathbb{K}$ *en alle* $T \in B$
(iii) $(ST)^* = T^* S^*$ *voor alle* $S, T \in B$
(iv) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ *voor alle* $T \in B$.

Dan noemen we B een C^*–algebra.

De eigenschappen (i)–(iii) zorgen voor samenwerking van $*$ met de algebraïsche structuur en de vrij onschuldig ogende eigenschap (iv) garandeerd de samenwerking met de topologische structuur.

Voorbeeld 10.9. Zij H een Hilbertruimte. Dan is $L(H)$ een C^*–algebra. △

Voorbeeld 10.10. Zij X compact. Dan is $C(X)$ een C^*–algebra. Vanwege (ii) moet de involutie $*$ door $f^*(x) := \overline{f(x)}$ zijn gegeven. Dit is *het* voorbeeld van een commutatieve C^*–algebra met 1 en men kan zelfs bewijzen dat elke commutatieve C^*–algebra met 1 van deze vorm is. △

Stelling 10.11. Voor elementen $T \in B$ van een C^*–algebra is $\|T\| = \|T^*\|$. Indien $1 \in B$ is $1^* = 1$ en $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. □

I.h.b. is (dus) voor complexe C^*–algebra's $\sigma(T^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \bar{\lambda} \in \sigma(T)\}$.

Voorbeeld 10.12. Het spectrum $\sigma(S)$ van de rechter shift

$$S(a_1, a_2, a_3, \dots) \;=\; (0, a_1, a_2, \dots)$$

is bevat in de gesloten schijf $\overline{U_1(0)} \subseteq \mathbb{C}$ want $\|S\| = 1$ en voor de spectraalstraal geldt dus $\rho(S) \leq 1$. De operator S heeft geen eigenwaarden want

$$S(a_1, a_2, a_3, \dots) \;\overset{!}{=}\; \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

leidt voor $\lambda \neq 0$ achtereenvolgens tot $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0, \dots$ en voor $\lambda = 0$ volgt $a = 0$ onmiddelijk. De linker shift S^* heeft wél eigenwaarden: stel

$$S^*(a_1, a_2, a_3, \dots) \;=\; (a_2, a_3, a_4, \dots) \;\overset{!}{=}\; \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

en kies $a_1 = \lambda$, waarmee $a_2 = \lambda^2, \dots, a_k = \lambda^k, \dots$, dus $a = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$. Indien $|\lambda| < 1$ volgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \;=\; \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^k)^2 \;=\; \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \;<\; \infty$$

en de hele open schijf $U_1(0)$ bestaat uit eigenwaarden, dus $U_1(0) \subseteq \sigma(S^*) \subseteq \overline{U_1(0)}$ en het spectrum is gesloten; daarmee ook[2] $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \bar{\lambda} \in \sigma(S^*)\} = \overline{U_1(0)}$. △

Definitie 10.13. Zij B een C^*–algebra. We noemen $T \in B$ normaal als $T^*T = TT^*$ en zelfgeadjungeerd als $T = T^*$.

Voorbeelden van normale elementen zijn naast zelfgeadjungeerde ook unitaire elementen, d.w.z. $T^* = T^{-1}$. De rechter en linker shift op ℓ^2 zijn tegenvoorbeelden, deze zijn niet normaal.

Stelling 10.14. Voor normale elementen van een C^*–algebra is $\|T\| = \rho(T)$.

Bewijs. Bereken

$$\begin{aligned} \|T^2\|^2 &= \|(T^2)^*(T^2)\| = \|T^*T^*TT\| \stackrel{!}{=} \|(T^*T)^*(T^*T)\| \\ &= \|T^*T\|^2 = (\|T\|^2)^2 \end{aligned}$$

en itereer tot $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$. Hiermee volgt

$$\rho(T) \;=\; \lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;\stackrel{!}{=}\; \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{2^{-k}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \|T\|^{2^{k-k}} \;=\; \|T\|$$

met in $\stackrel{!}{=}$ overgang op een deelrij. □

In feite is bijna alles wat voor zelfgeadjungeerde $T \in B$ waar is ook voor normale $T \in B$ geldig, met de volgende uitzondering.

Stelling 10.15. Voor zelfgeadjungeerde elementen $T \in B$ van een (al dan niet complexe) C^*–algebra is $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Bewijs. Als $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \sigma(T)$ dan is $\lambda + \mu \in \sigma(T + \mu)$ en dus voor $\mu = \mathrm{i}\nu$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (\beta+\nu)^2 &= |\lambda + \mathrm{i}\nu|^2 \le (\rho(T+\mathrm{i}\nu))^2 = \|T + \mathrm{i}\nu\|^2 \\ &= \|(T^* - \mathrm{i}\nu)(T + \mathrm{i}\nu)\| = \|T^2 + \nu^2\| \le \|T\|^2 + \nu^2 \end{aligned}$$

en na aftrek van ν^2 geldt $\alpha^2 + \beta^2 + 2\nu\beta \le \|T\|$. Eén van de limieten $\nu \to \pm\infty$ leidt tot een tegenspraak als niet $\beta = 0$, dus $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$. □

Het bewijs van de volgende stelling is een uitgebreide oefening: herlees de spectraaltheorie van compacte zelfgeadjungeerde operatoren.

[2] Let op het verschil tussen de complex geconjugeerde van $\lambda \in \mathbb{C}$ en de afsluiting $\overline{U_1(0)}$.

Stelling 10.16. (spectraalstelling voor normale compacte operatoren). Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$ een compacte operator. Dan is T^* ook compact. Is bovendien H complex en T normaal, dan kunnen we

$$T \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\,\pi_\lambda$$

schrijven, waar $\pi_\lambda \in L(H)$ de orthogonale projectie op de eigenruimte E_λ van T is. □

Een 'soortgelijke' stelling voor begrensde (en zelfs onbegrensde) operatoren is duidelijk ingewikkelder, doe ten minste een eerste stap.

Stelling 10.17. (functionaalrekening). Zij B een C^*–algebra met 1 en $T \in B$ zelfgeadjungeerd. Dan bestaat er precies één continu algebra-homomorfisme $\Phi_T : C(\sigma(T)) \longrightarrow B$ die de 1 behoud met $\Phi_T(x \mapsto x) = T$. Deze Φ_T is een isometrie en voldoet aan $\sigma(\Phi_T(f)) = f(\sigma(T))$ voor alle $f \in C(\sigma(T))$.

Bewijs. Uniciteit: de eisen leggen $\Phi_T(x \mapsto 1) = 1 \in B$ vast, en voor veeltermen

$$\Phi_T(x \mapsto \sum_{k=0}^{m} c_k x^k) \;=\; \sum_{k=0}^{m} c_k \Phi_T(x \mapsto x^k) \;=\; \sum_{k=0}^{m} c_k T^k \;.$$

Omdat de veeltermen volgens stelling 5.12 van Stone–Weierstraß in $C(\sigma(T))$ dicht[3] liggen en Φ_T continu is ligt Φ_T op heel $C(\sigma(T))$ vast: schrijf $f = \lim p_n$ als uniforme limiet van veeltermen en concludeer $\Phi_T(f) = \lim \Phi_T(p_n)$.

Deze formule zal omgekeerd ook de existentie opleveren. Hiervoor moeten we nagaan dat de algebra-homomorfisme Φ_T op de dichte deelruimte van veeltermen continu is, en dat geldt zeker als het zelfs om een isometrie blijkt te gaan. Dat wederom volgt zo meteen uit de vergelijking tussen de spectra.

We gaan deze voor een veelterm $p \in \mathbb{C}[z]$ na, d.w.z. $p(z) = \sum c_k z^k$. Gegeven $\lambda \in \mathbb{C}$ is ook $q(z) = \lambda - p(z)$ een complex veelterm die we in lineaire factoren

$$q(z) \;=\; (-1)^{m-1} c_m \cdot (\nu_1 - z) \cdot \ldots \cdot (\nu_m - z)$$

kunnen ontbinden. Dan is $\lambda \notin \sigma(\Phi_T(p))$ dan en slechts dan als de operator

$$\lambda \;-\; \Phi_T(p) \;=\; \Phi_T(q) \;=\; (-1)^{m-1} c_m \cdot \prod_{i=1}^{m} (\nu_i - T)$$

inverteerbaar is, d.w.z. $\nu_i - T$ is voor alle $i = 1, \ldots, m$ inverteerbaar, ofwel $\nu_i \notin \sigma(T)$ voor alle $i = 1, \ldots, m$, wat wederom equivalent is met

[3] In het geval $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ is $C(\sigma(T), \mathbb{C}) = C(\sigma(T), \mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}\, C(\sigma(T), \mathbb{R})$ en volgt dit componentsgewijs, vanwege $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ is $z = \bar{z}$ voor de veeltermfunctie $z \mapsto z$ en geldt (iii) in gevolg 5.15 automatisch; algemene veeltermfuncties hebben dan complexe coëfficienten, maar een reële veranderlijke.

$$\bigwedge_{z\in\sigma(T)} q(z) \neq 0 \qquad \text{ofwel} \qquad \bigwedge_{z\in\sigma(T)} \lambda \neq p(z)$$

en dat betekent $\lambda \notin p(\sigma(T))$. Hiermee volgt

$$\begin{aligned}\|\Phi_T(p)\| &= \rho(\Phi_T(p)) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\Phi_T(p))\} \\ &= \sup\{|p(x)| \mid x \in \sigma(T)\} = \|p\|_\infty\end{aligned}$$

voor alle $p \in \mathbb{C}[z]$, en een isometrie is i.h.b. continu.

Om de vergelijking tussen de spectra naar heel $C(\sigma(T))$ uit te breiden schrijven we weer $f = \lim p_n$ en omdat de inverteerbare elementen een open deelverzameling van B vormen is $\lambda \notin \sigma(\Phi_T(f))$ equivalent met

$$\bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\geq N} \lambda \notin \sigma(\Phi_T(p_n)) = p_n(\sigma(T))$$

en dus ook met $\lambda \notin f(\sigma(T))$. Hieruit zou men de isometrie-eigenschap op heel $C(\sigma(T))$ weer direct kunnen afleiden, maar deze is al een gevolg van de definitie van Φ_T op $C(\sigma(T))$ d.m.v. uitbreiding van een isometrie. □

We kunnen hiermee functies van zelfgeadjungeerde $T \in B$ berekenen en schrijven $f(T) := \Phi_T(f)$ voor alle $f \in C(\sigma(T))$, dan krijgt de vergelijking tussen de spectra de intuïtieve vorm $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Hoe ziet dit voor compacte zelfgeadjungeerde operatoren T eruit, in de C^*–algebra $L(H)$? Voor $x \in H$ is

$$\begin{aligned}T^2(x) &= T\left(\sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\pi_\lambda(x)\right) \\ &= \sum_{\mu\in\sigma(T)} \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \mu\lambda\pi_\mu(\pi_\lambda(x)) \overset{!}{=} \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda^2\pi_\lambda(x)\end{aligned}$$

want $\pi_\mu \circ \pi_\lambda$ verdwijnt voor $\mu \neq \lambda$ en $\pi_\lambda^2 = \pi_\lambda$. Voor veeltermen volgt

$$p(T) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} p(\lambda)\pi_\lambda$$

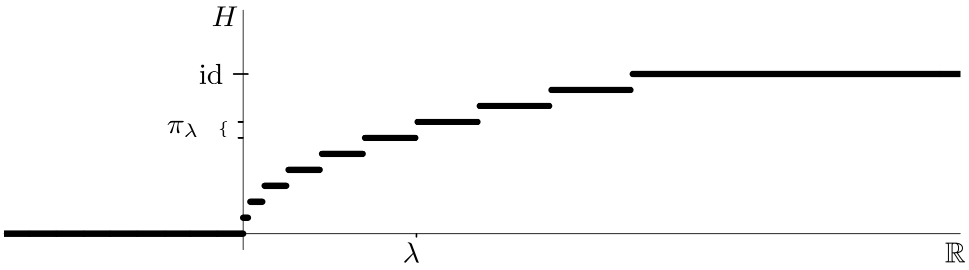
en in de limiet

$$f(T) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} f(\lambda)\pi_\lambda \ . \tag{10.1}$$

De eis aan f om continu op $\sigma(T)$ te zijn betekent alleen maar $\lim\limits_{\lambda\to 0} f(\lambda) = f(0)$ en indien $f(0) = 0$ is $f(T)$ weer een compacte operator.

De formule (10.1) lijkt erop om voor *alle* functies $f : \sigma(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ geldig te kunnen zijn. Beschouw de collectie projectoren als verdelingsfunctie d.m.v.

$$1 - \sum_{\lambda>\mu} \pi_\lambda = \sum_{\lambda\leq\mu} \pi_\lambda \qquad \text{projectie op} \quad \bigoplus_{\lambda\leq\mu} E_\lambda \ ,$$



Figuur 10.1. Schetsmatige representatie van de manier hoe (de identiteit op) H wordt opgebouwd uit (de projecties op) de eigenruimten terwijl λ het spectrum doorloopt.

zie figuur 10.1 voor een schets. Dit kan men voor willekeurige zelfgeadjungeerde $T \in L(H)$ generaliseren tot

$$f(T) \quad = \quad \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, \mathrm{d}E_\lambda$$

voor integreerbare functies $f : \sigma(T) \longrightarrow \mathbb{R}$. Zelfs indien de zelfgeadjungeerde operator T niet begrensd is kan men deze betekenis aan deze integraal toekennen, het integratiegebied $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ zal echter niet meer compact zijn.

Stelling 10.18. (polaire decompositie). Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$. Dan zijn er een partiële isometrie $U \in L(H)$ en een positieve zelfgeadjungeerde operator $A \in L(H)$ (d.w.z. $\langle Ax \mid x\rangle \geq 0$ voor alle $x \in H$) met $T = UA$. Voor inverteerbaar T is U unitair en zijn U en A uniek.

Bewijs. Definieer $A := \sqrt{T^*T}$ en indien A inverteerbaar is verder $U = TA^{-1}$, want dan is ook U inverteerbaar en

$$U^*U \quad = \quad A^{-1}T^*TA^{-1} \quad = \quad \mathrm{id}\ .$$

In het algemene geval geldt $\ker A = \ker T$, want

$$\bigwedge_{x \in H} \quad \|Tx\|^2 \quad = \quad \langle T^*Tx \mid x\rangle \quad = \quad \langle Ax \mid Ax\rangle \quad = \quad \|Ax\|^2\ ,$$

en $\overline{\operatorname{im} A} = (\ker A)^\perp =: F$, dus $F^\perp = \ker T$. Hiermee definieer

$$U \ :\ \operatorname{im} A \quad \longrightarrow \quad \operatorname{im} T$$

d.m.v. $U(Ax) := Tx$, dan is

$$\bigwedge_{x \in H} \quad \|U(Ax)\|^2 \quad = \quad \langle T^*Tx \mid x\rangle \quad = \quad \|Ax\|^2$$

ofwel U een isometrie, en de continue voortzetting

$$U \ : \ \overline{\operatorname{im} A} \ \longrightarrow \ \overline{\operatorname{im} T}$$

is eveneens een isometrie. De definitie $Uz := 0$ voor alle $z \in F^\perp$ zet deze begrensde operator op de hele ruimte $H = F \oplus F^\perp$ voort.

Bij deze constructie van U hebben we bijna geen keuze, als we $\ker U = \ker T$ eisen is U al eenduidig bepaald: indien ook $T = SB$ met B positief zelfgeadjungeerd en S een partiële isometrie met $\ker S = \ker T$ volgt $T^*T = BS^*SB$ waarbij $S^*S = \pi_F$ en dus $A^2 = B^2$ op F ofwel $A = B$ vanwege de positiviteit. □

Stelling (en definitie) 10.19. Zij H een separabele Hilbertruimte en $(e_n)_n$ een compleet orthonormaalsysteem van H. Dan noemen we $T \in L(H)$ een Hilbert–Schmidt operator als de (van $(e_n)_n$ onafhankelijke) uitdrukking

$$|||T||| \ := \ \left(\sum_n \|Te_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eindig is. De ruimte $K^2(H)$ van Hilbert–Schmidt operatoren wordt hierdoor van een norm voorzien en maakt $K^2(H)$ zelfs tot een Hilbertruimte. De deelverzameling $K^2(H) \triangleleft L(H)$ vormt een (tweezijdig) ideaal en bovendien geldt $K^2(H) \subseteq K(H)$, d.w.z. elke Hilbert–Schmidt operator is compact. Indien T normaal is met eigenwaarden λ_m is tenslotte

$$|||T|||^2 \ = \ \sum_m |\lambda_m|^2 \dim E_{\lambda_m} \ .$$

Bewijs. Zij $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eveneens een compleet orthonormaalsysteem, dan is

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|Tf_k\|^2 \ = \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle Tf_k \mid e_n \rangle|^2 \ = \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f_k \mid T^* e_n \rangle|^2 \ = \ |||T^*|||^2$$

en verandert niet als we voor $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een andere keuze maken, bv. dit compleet orthonormaalsysteem gelijk stellen aan $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Als toetje krijgen we nog $|||T^*||| = |||T|||$. Voor $T \in K^2(H)$ en $S \in L(H)$ is

$$|||ST|||^2 \ = \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|S(Te_n)\|^2 \ \leq \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|S\|^2 \|Te_n\|^2 \ = \ \|S\|^2 \, |||T|||^2 \ < \ \infty$$

en volgt nu

$$|||TS||| \ = \ |||(TS)^*||| \ = \ |||S^*T^*||| \ \leq \ \|S^*\| \, |||T^*||| \ = \ |||T||| \, \|S\| \ < \ \infty$$

door het nemen van de geadjungeerde, waarmee $K^2(H) \triangleleft L(H)$.

De ongelijkheid van Cauchy–Schwarz, eerst in H en dan in ℓ^2 toegepast, levert

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle Te_n \mid Se_n \rangle| \ \leq \ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\| \cdot \|Se_n\| \ \leq \ |||T||| \cdot |||S||| \ < \ \infty$$

op, en daardoor definieert

$$\langle T \mid S \rangle \quad := \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle T e_n \mid S e_n \rangle \tag{10.2}$$

een inproduct op $K^2(H)$ waarvoor $|||..|||$ de bijbehorende norm is. I.h.b. is de waarde $\langle T \mid S \rangle$ onafhankelijk van het compleet orthonormaalsysteem $(e_n)_n$. Laat nu nog zien dat de operatoren

$$\begin{array}{rcccc} T_{kn} & : & H & \longrightarrow & H \\ & & x & \longmapsto & \langle x \mid e_k \rangle e_n \end{array}$$

van rang 1 een compleet orthonormaalsysteem in $K^2(H)$ vormen. Omdat de approximatie door operatoren van eindige rang ook t.o.v. de zwakker norm $\|..\|$ geldig is zijn dan alle Hilbert–Schmidt operatoren compact, en bovendien is $K^2(H)$ t.o.v. $|||..|||$ volledig, dus een Hilbertruimte.

Stel dat het inproduct $\mu_{kn} = \langle T \mid T_{kn} \rangle = \langle T e_k \mid e_n \rangle$ voor alle $k, n \in \mathbb{N}$ verdwijnt, dan is $T e_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ ofwel $T = 0$; alleen de nulvector staat loodrecht op alle vectoren in $K^2(H)$. Omgekeerd is

$$||| \sum_{k,n \in \mathbb{N}} \mu_{kn} T_{kn} |||^2 \quad = \quad \sum_{k,n \in \mathbb{N}} |\mu_{kn}|^2$$

de vergelijking van Parseval. Indien T normaal kiezen we tenslotte voor $(e_n)_n$ de eigenvectoren. □

Niet elke compacte operator op een Hilbertruimte is een Hilbert–Schmidt operator, maar meestal loont het om eerst na te gaan of een gegeven en naar verwachting compacte operator niet toch zelfs een Hilbert–Schmidt operator is.

Voorbeeld 10.20. De redenering aan het eind van het bewijs van stelling 9.2 laat zien dat voor $k \in C[0,1]^2$ de door

$$(T(f))(s) \quad = \quad \int_0^1 k(s,t) f(t) \, \mathrm{d}t \tag{10.3}$$

gedefinieerde integraaloperator een Hilbert–Schmidt operator is. △

Referenties

1. *N. Bourbaki : Espaces vectoriels topologiques I+II* ; Actualités Scientifiques et Industrielles **1189**, Herman (1953)
2. *N. Bourbaki : Espaces vectoriels topologiques III–V* ; Actualités Scientifiques et Industrielles **1229**, Herman (1955)
3. *J.B. Conway : A Course in Functional Analysis, 2nd. ed.*; Graduate Texts in Mathematics **96**, Springer (1990)
4. *J. Dieudonné : Foundations of Modern Analysis* ; Academic Press (1960)
5. *J.J. Duistermaat and W. Eckhaus : Analyse van Gewone Differentiaalvergelijkingen* ; Epsilon (1995)
6. *I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek : Basic Classes of Linear Operators* ; Birkhäuser (2003)
7. *D.H. Griffel : Applied functional analysis* ; Wiley & Sons (1981)
8. *M. Reed and B. Simon : Methods of modern mathematical physics I : functional analysis* ; Academic Press (1972)
9. *B.P. Rynne and M.A. Youngson : Linear Functional Analysis, 2nd. ed.*; Springer (2008)
10. *K. Saxe : Beginning Functional Analysis* ; Springer (2002)
11. *M. Schechter : Principles of functional analysis* ; Academic Press (1971)
12. *J. Saint-Raymond : Analyse spectrale* ; Université Paris VI (1986)
13. *G. Teschl : Functional Analysis* ; Universität Wien (2008)
    `http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/index.html`
14. *K. Yosida : Functional Analysis* ; Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen **123**, Springer (1964)
15. *N. Young : An Introduction to Hilbert space* ; Cambridge University Press (1988)
16. *E. Zeidler : Applied Functional Analysis : Applications to Mathematical Physics* ; Applied Mathematical Sciences **108**, Springer (1995)
17. *E. Zeidler : Applied Functional Analysis : Main Principles and their Applications* ; Applied Mathematical Sciences **109**, Springer (1995)