

Extra opgaves Distributies

E.1 Definieer

$$\phi_{a,b}(x) := \psi(x-a)\psi(b-x) ,$$

waar ψ de C^∞ -functie met $\psi(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ voor $x > 0$ uit Lemma 2.7 is.

- Laat zien dat $\phi_{a,b} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ met $\text{supp } \phi_{a,b} = [a, b]$ en maak een schets.
- Construeer m.b.v. $\phi_{a,b}$ een monotoon stijgende functie $\Psi_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ met $\Psi_{a,b}(x) = 0$ als $x \leq a$ en $\Psi_{a,b}(x) = 1$ als $x \geq b$. *Hint*: integreer!
- Definieer $\Phi(x) := \Psi_{-2,-1}(x)(1 - \Psi_{1,2}(x))$ en ga na dat $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Welke eigenschappen heeft Φ ? Maak een schets.

E.2 Toon aan dat de Cantorverzameling

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid (a_n)_n \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right\} \subseteq [0, 1]$$

ten opzichte van de Lebesgue-maat verwaarloosbaar is.

E.3 Bereken een afchatting naar beneden voor de Lebesgue-maat van

$$\left\{ x \in [0, 1] \mid \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\gamma}{q^\tau} \text{ voor alle } p, q \in \mathbb{N} \right\}$$

voor vaste $\tau > 2$ en $\gamma > 0$.

E.4 Veronderstel dat $f \in C(\mathbb{R})$, gezien als distributie, een afgeleide $g \in C(\mathbb{R})$ heeft.
Toon aan dat $f \in C^1(\mathbb{R})$ en dat ook voor de ‘gewone’ afgeleide $f' = g$ geldt.