Opgave E6

Beschouw het stelsel in poolcoördinaten

$$\begin{cases} \dot{r} = & r(1-r) \\ \dot{\phi} = & \sin^2\phi + (1-r)^3. \end{cases} \tag{1}$$

(De punt betekent differentiatie naar een tijdsvariabele t. De variabelen r, ϕ zijn dusdanig dat $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$.)
a) Bepaal in het $(x, y)-$vlak de evenwichtspunten van dit stelsel.
b) Laat zien dat als een oplossing op tijdstip $t = 0$ op de eenheidscirkel begint deze op de eenheidscirkel blijft voor alle t. Dit kan duiden op het bestaan van een periodieke oplossing voor dit stelsel.
c) Kan men uit onderdeel (b) concluderen dat er een periodieke oplossing bestaat? Zo ja, bepaal de periode van deze oplossing. Zo nee, waarom niet?
d) Teken m.b.v. `Pplane` het faseplaatje in het $(x, y)-$vlak voor $(x, y) \in [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$.
e) Bespreek m.b.v. het faseplaatje alle mogelijkheden voor $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t))^T$ in het geval $\|(x(0), y(0))^T\|_{\text{Eucl}} < 1$.

Opgave E7

Bekijk het stelsel

$$\begin{cases} \dot{x} = & x - y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = & y + x - y(x^2+y^2). \end{cases} \tag{2}$$

a) Bepaal de evenwichtspunten van dit stelsel.
b) Laat zien dat dit stelsel een periodieke oplossing heeft.
(*Hint:* Voer de substitutie ($x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$) uit en herschrijf het stelsel in (r, ϕ)-variabelen. Met een periodieke oplossing bedoelen we dat $y(x + p) = y(x)$ voor een $p > 0$.)
c) Geef een expliciete formule voor deze oplossing. Bepaal tevens de periode van deze oplossing.
d) Schets het faseplaatje voor $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.
e) Is deze periodieke oplossing, "intuitief" gezien, stabiel of onstabiel? Licht je antwoord toe.