Differentiaalvergelijkingen 2009

Inleverdatum voor de eerste opgave is 25 mei

1. Zij $Ly = 0$, $y(a) = y(b) = 0$ een homogeen randwaardeprobleem dat alleen de triviale oplossing $y = 0$ heeft. Toon aan dat y dan en slechts dan een eigenfunctie bij de eigenwaarde λ is als

$$y(x) \quad = \quad \lambda \int_a^b G(x,\xi) y(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

met G de functie van Green.

2. *Vervolg tijdens het werkcollege op 25 mei.* Indien L zelfgeadjungeerd is met eigenfuncties w_k concludeer

$$G(x,\xi) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k(x) w_k(\xi)}{\lambda_k}$$

voor de functie van Green.

3. *Ook op 25 mei.* Voor de differentiaaloperator $Ly = (py')' + ry$ bereken

$$\langle Lf \mid g \rangle \; - \; \langle f \mid Lg \rangle \quad = \quad - \Big[p(x) \; w(x) \Big]_a^b$$

waar $w(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ de Wronski-determinant van $f, g \in C^2[a,b]$ is. Leidt hieruit af dat L voor alle homogene randvoorwaarden van de vorm $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$, $b_3 y(b) + b_4 y'(b) = 0$ met $a_1^2 + a_2^2 \neq 0 \neq b_3^2 + b_4^2$ zelfgeadjungeerd is.