Stelling. *Zij E een Banachruimte en $F < E$ een gesloten deelruimte. Dan zijn F en de quotientruimte ${}^{E}\!/_{F}$ ook Banachruimten.*

Bewijs. De beperking van $\|..\|$ op F is (blijkbaar) een norm op F en we moeten alleen nog laten zien dat F compleet is.

Zij hiervoor $(x_n)_n$ een Cauchy-rij in F. Dus ook in E, en E is compleet, er bestaat een limiet $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in E$. Maar $F \subseteq E$ is gesloten en bevat dus y, waarmee de gegeven Cauchy-rij binnen F een limiet heeft.

Op E definieert men d.m.v. $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in F$ een equivalentierelatie (oefening: ga dit na!) waarvoor de equivalentieklassen de vorm

$$\big\{ y \in E \;\big|\; y \sim x \big\} \quad = \quad \big\{ x + z \;\big|\; z \in F \big\} \quad =: \quad x + F$$

hebben. De verzameling van alle equivalentieklassen is het quotient

$${}^{E}\!/_{F} \quad = \quad \Big\{ \; x + F \quad \Big| \quad x \in E \; \Big\}$$

waarop door

$$\begin{aligned} (x+F) \;+\; (y+F) \quad &:= \quad (x+y) \;+\; F \\ \lambda \cdot (x+F) \quad &:= \quad (\lambda x) \;+\; F \end{aligned}$$

optellen en scalair vermenigvuldigen gedefinieerd worden. (Oefening: ga na dat deze definities onafhankelijk van de gekozen representanten zijn, en dat hiermee het quotient een vektorruimte wordt.) D.m.v.

$$\|x + F\| \quad := \quad \inf_{y \sim x} \|y\|$$

(dus de afstand tussen de verzamelingen $x + F \subseteq E$ en $F \subseteq E$) wordt een norm op het quotient gedefinieerd.

(i) Als infimum van getallen ≥ 0 is $\|x + F\| \geq 0$.

(ii) Indien $\|x+F\| = 0$, dan bestaat voor elk $\varepsilon > 0$ een $y \sim x$ met $\|y\| < \varepsilon$. Neem $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ en verkrijg een rijtje $(y_n)_n$ in $x+F$ met $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Maar met F is ook $x + F$ gesloten (invers beeld van F onder de translatie $z \mapsto z - x$), dus $0 \in x + F$, d.w.z. $0 \sim x$ ofwel $x + F = F$, de nul in het quotient.

(*iii*) $\|\lambda \cdot (x+F)\| = \|(\lambda x) + F\| = \inf\limits_{z \sim \lambda x} \|z\| = \inf\limits_{y \sim x} \|\lambda y\| = |\lambda| \inf\limits_{y \sim x} \|y\|.$

(*iv*) $\|(x+F)+(y+F)\| = \inf\limits_{z \sim (x+y)} \|z\| \overset{!}{=} \inf\limits_{u \sim x} \inf\limits_{v \sim y} \|u+v\| \leq \inf\limits_{u \sim x} \|u\| + \inf\limits_{v \sim y} \|v\|.$

Zij tenslotte $(x_n + F)_n$ een Cauch-rij in $E/_F$, d.w.z.

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \quad \bigvee_{N(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \quad \bigwedge_{m,n \geq N(\varepsilon)} \quad \|x_n - x_m + F\| \leq \varepsilon$$

en dat betekent wederom dat $y^{\varepsilon}_{nm} \sim (x_n - x_m)$ bestaan met $\|y^{\varepsilon}_{nm}\| \leq 2\varepsilon$. Helaas kunnen we niet ervan uitgaan dat $y_{nm} = y_n - y_m$ met $y_n \sim x_n$ en $y_m \sim x_m$. Zoiets gaan we nu construeren, en daarbij is het 'toegestaan' om tot een deelrij over te stappen.

Werk met $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, stel $n_k := N(\frac{1}{2^{k+1}})$ en schrijf $y^k_{nm} := y^{\varepsilon}_{nm}$ voor $n, m \geq n_k$. Definieer nu $y_{n_1} = x_{n_1}$ en vervolgens recursief $y_{n_{k+1}} = y_{n_k} + y^k_{n_k+1, n_k}$. Dan is $y_{n_k} \sim x_{n_k}$ en

$$\|y_{n_{k+l}} - y_{n_k}\| \leq \sum_{j=0}^{l-1} \|y_{n_{k+j+1}} - y_{n_{k+j}}\| \leq \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^{k+l-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}} ,$$

ofwel $(y_{n_k})_k$ is een Cauchy-rij. In de complete ruimte E bestaat de limiet $z = \lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k}$ en dan is

$$z + F = \lim_{k \to \infty} y_{n_k} + F = \lim_{k \to \infty} (x_{n_k} + F) .$$

Omdat $(x_n + F)_n$ een Cauchy-rij is en (nu) een convergente deelrij heeft moet ook de hele rij convergeren, met dezelfde limiet $z + F$. $\square$