Hertentamen functionaalanalyse 23 maart 2007

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{3k-2} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-1} + e_{3k}) \\ Te_{3k-1} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-2} + e_{3k}) \\ Te_{3k} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-2} + e_{3k-1}) \end{aligned}$$

gedefinieerde continue lineaire operator.

   (*i*) Geef de matrix $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \subseteq M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. $\{e_{3k-2}, e_{3k-1}, e_{3k}\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?

   (*ii*) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is.

   (*iii*) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

   (*iv*) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

   (*v*) Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?

2. Gegeven zijn twee Hilbertruimten E en F, in het vervolg maken we in de notatie geen verschil tussen de door de inproducten geïnduceerden normen $\|y\| = \|y\|_E$ op E en $\|z\| = \|z\|_F$ op F.

(i) Ga na dat de volgende normen op het cartesische product $E \times F$ equivalent zijn:

$$\|(y,z)\|_1 := \|y\| + \|z\| \ , \quad \|(y,z)\|_2 := (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}} \ , \quad \|(y,z)\|_\infty := \max\{\|y\|, \|z\|\} \ .$$

Met welke van deze normen is ook $E \times F$ (isometrisch isomorf met) een Hilbertruimte?

(ii) Kies één van bovenstaande normen en laat zien dat de vier lineaire operatoren

$$\begin{aligned} \iota_E &: E \longrightarrow E \times F \ , & \iota_E(y) &= (y,0) \\ \iota_F &: F \longrightarrow E \times F \ , & \iota_F(z) &= (0,z) \\ \pi_E &: E \times F \longrightarrow E \ , & \pi_E(y,z) &= y \\ \pi_F &: E \times F \longrightarrow F \ , & \pi_F(y,z) &= z \end{aligned}$$

continu zijn. In hoeverre is dit afhankelijk van de norm die je hebt gekozen?

(iii) Zij H een Hilbertruimte en $E, F < H$ gesloten deelruimten met $H = E + F$ en $E \cap F = \{0\}$, dus elk element $x \in H$ kan op precies één manier worden geschreven als som $x = y + z$ van elementen $y \in E$ en $z \in F$. Onder welke voorwaarden is H isometrisch isomorf met $E \times F$?

3. Gebruik op ℓ^2 het volledig orthonormaalsysteem $((\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} \quad = \quad \mathrm{e}^{-k-l} \quad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

gegeven oneindige matrix.

(i) Laat zien dat T een continue lineaire operator is.

(ii) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.

(iii) Bereken de Hilbert–Schmidt norm $|||T||| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ van T en concludeer dat T compact is.

(iv) Verifieer dat $(\mathrm{e}^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ een eigenvector van T is en dat alle vectoren loodrecht hierop in $\ker T$ liggen. *Hint:* $|||T|||^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^2$ waar $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de rij van eigenwaarden is (waarin elke eigenwaarde zo vaak voorkomt als zijn multipliciteit aangeeft).

(v) Bereken $\|T\|$ en de spectrale representatie van T.