Functionaalanalyse 2006/7

Inleverdatum: 20 october 2006 (10:45)

9). Zij $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een volledig orthonormaalsysteem in een Hilbertruimte H. Stel $x_n := e_{2n}$ en $y_n := x_n + \frac{1}{n+1}e_{2n+1}$ en definieer F als de afsluiting van het opspansel van de x_n , $n \in \mathbb{N}$ en G als de afsluiting van het opspansel van de y_n , $n \in \mathbb{N}$.

(i) Laat zien dat elk element in

$$F \; + \; G \;\; := \;\; \left\{ z \in H \;\middle|\; z = x + y \;\text{ met } x \in F \text{ en } y \in G \right\} \;\; ,$$

dus elk element dat als som van elementen uit F en G kan worden geschreven, op precies één manier als som van elementen uit F en G kan worden geschreven. *Hint:* bestudeer $F \cap G$.

(ii) Gebruik (i) om een projectie $\pi : F + G \longrightarrow F$ te definiëren en ga na dat deze lineaire operator niet continu is. *Hint:* laat zien dat de d.m.v. $z_n := y_n - x_n$ gedefinieerde rij convergent is, terwijl $(\pi(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ niet convergeert.

(iii) Ga na dat $F+G$ een dichte deelruimte van H is en dat $F+G \neq H$. *Hint:* bestudeer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$.

10). Laat zien dat voor een metrische ruimte V de volgende uitspraken equivalent zijn.

(i) V is compact, d.w.z. voor elke overdekking $V = \displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i$ van V met open verzamelingen $U_i \subseteq V$ zijn er eindig veel $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ van deze open verzamelingen die V al overdekken.

(ii) V is compleet en precompact, d.w.z. voor elk $\varepsilon > 0$ kan men eindig veel open verzamelingen $U_1, \ldots, U_n$ van de vorm $U_i = \{x \in V \mid d(x, x_i) < \varepsilon\}$ met geschikte x_i vinden die V overdecken.

Concludeer dat compacte metrische ruimten separabel zijn.