Definitie. Zij A een complexe Banachalgebra en $T \in A$. Dan noemt men

$$\sigma(T) \quad := \quad \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \lambda - T \text{ niet inverteerbaar} \right\}$$

het spectrum van T.

Stelling. $\sigma(T) \subseteq \mathbb{C}$ is compact.

Bewijs. De niet inverteerbare elementen van A vormen een gesloten deelverzameling (want het complement is open), en $\sigma(T)$ is invers beeld hiervan onder de continue afbeelding

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & A \\ \lambda & \mapsto & \lambda - T \end{array}$$

en dus eveneens gesloten. Maar $\sigma(T)$ is ook begrensd, want als $|\lambda| > \|T\|$ dan is

$$\|\frac{T}{\lambda}\| \quad = \quad \frac{\|T\|}{|\lambda|} \quad < \quad 1$$

en daarmee $\lambda - T = (1 - \frac{T}{\lambda})\lambda$ inverteerbaar. Een begrensde gesloten deelverzameling van $\mathbb{C}$ is compact. $\square$

Stelling en definitie. Voor $T \in A$ is

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad = \quad \lim_{m \in \mathbb{N}} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad = \quad \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \ .$$

Men noemt dit de spectraalstraal *van T en schrijft hiervoor $\rho(T)$.*

Gevolg. $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Bewijs (van het stelling-gedeelte). A is een Banachalgebra, dus $\|T^m\| \leq \|T\|^m$ voor alle $m \in \mathbb{N}$. Gegeven $p \in \mathbb{N}$ bestaan er $q, r \in \mathbb{N}$ met $m = pq + r$ en $0 \leq r < p$, met als gevolg

$$\|T^m\|^{\frac{1}{m}} \quad \leq \quad \|T^p\|^{\frac{q}{m}} \cdot \|T\|^{\frac{r}{m}}$$

en vanwege

$$\lim_{m \to \infty} \frac{q(m)}{m} \quad = \quad \frac{1}{p} \quad \text{en} \quad \lim_{m \to \infty} \frac{r(m)}{m} \quad = \quad 0$$

verder

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \;=\; \limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;\leq\; \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \;.$$

Dit geldt voor alle $p \in \mathbb{N}$, dus

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;\leq\; \inf_{p\in\mathbb{N}} \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \;\leq\; \lim_{m\to\infty} \inf_{p\geq m} \|T^p\|^{\frac{1}{p}} \;=\; \liminf_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$$

waaruit volgt dat deze getallen aan elkaar en aan $\lim\limits_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ gelijk zijn, schrijf hiervoor al $\rho(T)$. De aanscherping van het bewijs van de vorige stelling m.b.v. de inleveropgave 14 levert nog

$$\sigma(T) \;\subseteq\; \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| \leq \rho(T) \right\}$$

op.

Indien T inverteerbaar is geldt $1 \leq \|T^m\| \cdot \|T^{-m}\| \leq \|T^m\| \cdot \|T^{-1}\|^m$, d.w.z.

$$\bigwedge_{m\in\mathbb{N}} \quad \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \;\geq\; \frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

en dus $\rho(T) \geq \dfrac{1}{\|T^{-1}\|} > 0$. Is dus omgekeerd $\rho(T) = 0$, dan volgt $\sigma(T) = \{0\} \neq \emptyset$ en we mogen vanaf nu $\rho(T) \neq 0$ veronderstellen.

$$\text{Stel} \qquad \bigwedge_{\lambda\in\sigma(T)} \quad |\lambda| \;<\; \rho(T) \;. \tag{1}$$

Dan is de functie $S(\mu) := (1 - \mu T)^{-1}$ op heel $U = \left\{ \mu \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mu| \leq \dfrac{1}{\rho(T)} \right\}$ gedefinieerd en continu, dus uniform continu op deze compacte verzameling:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \quad \bigvee_{\delta>0} \quad \bigwedge_{\lambda,\mu\in U} \quad |\lambda - \mu| < \delta \;\Rightarrow\; \|S(\lambda) - S(\mu)\| < \varepsilon \;.$$

Kies $\varepsilon = \frac{1}{6}$ en definieer $r := \dfrac{1}{\rho(T)} - \dfrac{\delta}{2} < \dfrac{1}{\rho(T)}$. Dan geldt

$$\bigwedge_{\substack{\omega\in\mathbb{C}\\ |\omega|=1}} \quad \|S(r\omega) \;-\; S(\frac{\omega}{\rho(T)})\| \;<\; \frac{1}{6}$$

want
$$|r\omega - \frac{\omega}{\rho(T)}| = |\omega| \cdot |r - \frac{1}{\rho(T)}| = \frac{\delta}{2} < \delta \ .$$
Omdat $\frac{1}{r} > \rho(T) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \|T^m\|^{\frac{1}{m}}$ bestaat $m \in \mathbb{N}$ met $\|(rT)^m\| < \frac{1}{4}$, gebruik deze m om $\omega = \exp(\frac{2\pi \mathrm{i}}{m})$ vast te leggen. In de veeltermring $\mathbb{C}[z]$ is dan
$$1 - z^m = \prod_{k=0}^{m-1}(1 - \omega^k z)$$
en breuksplitsing leidt tot
$$\frac{1}{1-z^m} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha_k}{1-\omega^k z}$$
met
$$\alpha_k = \lim_{z\to\omega^{-k}} \frac{1-\omega^k z}{1-z^m} \stackrel{!}{=} \lim_{z\to\omega^{-k}} \frac{-\omega^k}{-mz^{m-1}} = \frac{\omega^k}{m\omega^{-km+k}} = \frac{1}{m}$$
en dus
$$\frac{1}{1-z^m} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{1-\omega^k z} \ . \tag{2}$$
Elke veelterm $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ definieert het element $p(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in A$ en (2) blijft geldig (als we zorg dragen dat alleen maar inverteerbare elementen in de noemer staan). Vul rT in voor z:
$$(1 - (rT)^m)^{-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S(\omega^k r)$$
terwijl we
$$(1 - (\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S(\frac{\omega^k}{\rho(T)})$$
krijgen als we $\frac{1}{\rho(T)}T$ voor z invullen. Nu kunnen we als volgt afschatten:
$$\left\|(1 - (rT)^m)^{-1} - (1 - (\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}\right\| \le \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \|S(\omega^k r) - S(\frac{\omega^k}{\rho(T)})\| < \frac{1}{6} \ .$$

Bovendien is

$$\|1 - (1-(rT)^m)^{-1}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|(rT)^m\|^j < \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

en dus

$$\|1 - (1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}\| \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

met als gevolg dat

$$\|(\frac{T}{\rho(T)})^m\| = \|1 - (1 - (1 - (1-(\frac{T}{\rho(T)})^m)^{-1}))^{-1}\| < \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

wat $\|T^m\| < (\rho(T))^m$ zou betekenen, en dat is absurd. Daarmee kan (1) niet waar zijn. $\square$

Stelling. Zij A een complexe Banachalgebra met $1 \neq 0$ waarin elk element $T \neq 0$ inverteerbaar is. Dan is $A \cong \mathbb{C}$.

Bewijs. Voor $\lambda \in \sigma(T)$ is $\lambda - T$ niet inverteerbaar, dus $\lambda - T = 0$ ofwel $T = \lambda \in \mathbb{C}$. $\square$