Stelling (dekpuntstelling van Banach). Zij V een complete metrische ruimte en $f : V \longrightarrow V$ een continue contractie (d.w.z. Lipschitz-continu met Lipschitz-constant $\gamma < 1$). Dan heeft f een uniek dekpunt $y = f(y) \in V$, voor elke $x_0 \in V$ is $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = y$ en geldt de schatting

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \quad d(y, f^n(x_0)) \;\leq\; \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(f(x_0), x_0) \;.$$

(deelruimte en quotientruimte)

Definitie. Een Banachruimte E noemen we *reflexief* als E isomorf is met de biduale ruimte E^{**}.

Stelling (uitbreiding van Heine–Borel). Zij E een genormeerde ruimte. Dan is de gesloten bol $\overline{U_1(0)} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ dan en slechts dan compact, als E eindige dimensie heeft.

Stelling (Arzelà–Ascoli). Zij V een compacte metrische ruimte. Dan is $M \subseteq C(V)$ dan en slechts dan compact, als M gesloten, begrensd en uniform equicontinu is.

Stelling (Stone–Weierstraß). Zij V compact en $D \subseteq C(V, \mathbb{R})$ met

(i) D bevat een constante functie,

(ii) D separeert de punten in V.

Dan ligt de door D voortgebrachte algebra A dicht in $C(V, \mathbb{R})$.

(eigenschappen spectrum)

(Riesz theorie)

Stelling en definitie. Zij H een Hilbertruimte, $\mathcal{D}(T) < H$ een dichte deelruimte en $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ een lineaire operator. Dan bestaat precies één afbeelding $T^* : \mathcal{D}(T^*) \longrightarrow H$ met de eigenschap $\langle Tx \mid y\rangle = \langle x \mid Ty\rangle$ voor alle $x \in \mathcal{D}(T)$ en alle $y \in \mathcal{D}(T^*)$; T^* is lineair. We noemen T^* de geadjungeerde van T.

Stelling (spectraalstelling voor normale compacte operatoren). Zij H een Hilbertruimte en $T \in K(H)$ een compacte operator. Dan is T^* ook compact. Is bovendien H complex en T normaal (d.w.z. $T^*T = TT^*$), dan kunnen we

$$T \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$$

schrijven, waar $\pi_\lambda \in L(H)$ de orthogonale projectie op de eigenruimte E_λ van T is.

Definitie. Zij B een Banachalgebra en $^* : B \longrightarrow B$ een involutie, d.w.z. $(T^*)^* = T$ voor alle $T \in B$, met de eigenschappen

- (*i*) $(S+T)^* = S^* + T^*$ voor alle $S, T \in B$
- (*ii*) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ voor alle $\lambda \in \mathbb{C}$ en alle $T \in B$
- (*iii*) $(ST)^* = T^* S^*$ voor alle $S, T \in B$
- (*iv*) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ voor alle $T \in B$.

Dan noemen we B een C^*-algebra.

Stelling (functionaalrekening). Zij B een complexe C^*-algebra met 1 en $T \in B$ zelfgeadjungeerd. Dan bestaat er precies één continu en involutief algebra-homomorfisme $\Phi : C(\sigma(T)) \longrightarrow B$ die de 1 behoud met $\Phi(z \mapsto z) = T$. Deze Φ is een isometrie, we schrijven $f(T) = \Phi(f)$ voor alle $f \in C(\sigma(T))$ en hiervoor geldt bovendien $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Stelling en definitie. Zij H een Hilbertruimte en $S \in L(H)$. Dan zijn equivalent:

- (*i*) $H = F \oplus F^\perp$ met $\|Sy\| = \|y\|$ voor alle $y \in F$ en $Sz = 0$ voor alle $z \in F^\perp$,
- (*ii*) S^*S is een orthogonale projectie.

In dit geval noemen we S een partiële isometrie.

Stelling (polaire decompositie). Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$. Dan zijn er precies één partiële isometrie $U \in L(H)$ en één positieve zelfgeadjungeerde operator $A \in L(H)$ (d.w.z. $\langle Ax \mid x \rangle \geq 0$ voor alle $x \in H$) met $T = UA$.

Stelling (Hilbert–Schmidt operatoren). Zij H een separabele Hilbertruimte en $(e_n)_n$ een volledig orthonormaalsysteem van H. Dan noemen we $T \in L(H)$ Hilbert–Schmidt operator als de (van $(e_n)_n$ onafhankelijke) uitdrukking

$$|||T||| \;:=\; \left(\sum_n \|Te_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eindig is. De ruimte $L_2(H)$ van Hilbert–Schmidt operatoren wordt hierdoor van een norm voorzien en maakt $L_2(H)$ zelfs tot een Hilbertruimte. De deelverzameling $L_2(H) \triangleleft L(H)$ vormt een (tweezijdig) ideaal en bovendien geldt $L_2(H) \subseteq K(H)$, dus elke Hilbert–Schmidt operator is compact. Indien T normaal is en $(e_n)_n$ diagonaliseert, met eigenwaarde λ_n behorende bij de eigenvector e_n, is tenslotte

$$|||T|||^2 \;:=\; \sum_n |\lambda_n|^2 \;.$$