Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum voor opgaven 3 en 4 is 21 september (11:00)

1). Diagonalizeer de door

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gedefinieerde lineaire afbeelding.

2). Definieer op $\mathbb{R}^2$ de normen van $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= |x_1| + |x_2| \\ \|x\|_2 &:= \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \\ \|x\|_\infty &:= \max\{|x_1|, |x_2|\} \ . \end{aligned}$$

Toon aan dat dezen normen equivalent zijn. *Hint:* teken voor elk van deze normen de gesloten bol $\overline{U_1(0)}$ van straal 1 en een gesloten bol $\overline{U_r(0)}$ met een welgekozen straal r.

3). Zij C een begrensde en convexe omgeving van de oorsprong $0 \in \mathbb{R}^2$ die t.o.v. de oorsprong symmetrisch is (d.w.z. $x \in C \Leftrightarrow -x \in C$). Laat zien dat d.m.v.

$$p(x) \ := \ \inf \left\{ \lambda \geq 0 \,\middle|\, x \in \lambda C \right\}$$

een norm wordt gedefinieerd, werk hier met $\lambda C := \{\lambda y \,|\, y \in C\}$. (Ter verduidelijking: contraheer of expandeer C met λ totdat x op de rand van C ligt en stel dan $p(x) = \lambda$.) Men noemt de norm p ook het *Minkowski-funktionaal*.

4). Zij H een inproductruimte. Laat zien dat $x + y$ en $\langle x \mid y \rangle$ continue functies definieren. *Hint:* werk met rijtjes $x_n \to x$ en $y_n \to y$.