Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum: 12 october (11:00)

11). Zij $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een volledig orthonormaalsysteem in een Hilbertruimte H. Stel $x_n := e_{2n}$ en $y_n := x_n + \frac{1}{n+1}e_{2n+1}$ en definieer F als de afsluiting van het opspansel van de x_n, $n \in \mathbb{N}$ en G als de afsluiting van het opspansel van de y_n, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Laat zien dat elk element in

$$F \,+\, G \;:=\; \left\{ z \in H \;\middle|\; z = x + y \;\text{ met } x \in F \text{ en } y \in G \right\} \;,$$

dus elk element dat als som van elementen uit F en G kan worden geschreven, op precies één manier als som van elementen uit F en G kan worden geschreven. *Hint:* bestudeer $F \cap G$.

(ii) Gebruik (i) om een projectie $\pi : F + G \longrightarrow F$ te definiëren en ga na dat deze lineaire operator niet continu is. *Hint:* laat zien dat de d.m.v. $z_n := y_n - x_n$ gedefinieerde rij convergent is, terwijl $(\pi(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ niet convergeert.

(iii) Ga na dat $F+G$ een dichte deelruimte van H is en dat $F+G \neq H$. *Hint:* bestudeer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$.

12). Zij H een reële Hilbertruimte en $B : H\times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineair en begrensd, d.w.z. er bestaat $C > 0$ met

$$\bigwedge_{x,y\in H} \quad |B(x,y)| \;\leq\; C\,\|x\|\,\|y\| \;\;.$$

Toon aan dat er precies één operator $T \in L(H)$ bestaat met de eigenschap

$$\bigwedge_{x,y\in H} \quad B(x,y) \;=\; \langle Tx \mid y\rangle \;\;.$$

Hint: als je $x \in H$ vasthoudt is $B(x, ..) \in H^*$.