Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum: 26 october (11:00)

17). Een functie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ is Hölder-continu als

$$\bigvee_{\alpha,\mu>0} \quad \bigwedge_{x,y\in[0,1]} \quad |f(x) - f(y)| \;\leq\; \mu \cdot |x-y|^{\alpha} \ .$$

(In het speciaal geval dat men $\alpha = 1$ kan kiezen hebben we f al als Lipschitz-continu leren kennen.) Voor vaste $\alpha, \mu > 0$ spreken we ook van (α, μ)–Hölder-continue functies.

(*i*) Ga na dat f dan i.h.b. (gewoon) continu is en dat alle Hölder-continue functies een lineaire deelruimte F van de Banachruimte $(C([0,1],\mathbb{R}), \|..\|_\infty)$ vormen. Is deze deelruimte gesloten?

(*ii*) Waarom is de verzameling $F_{\alpha,\mu}$ van (α,μ)–Hölder-continue functies niet eveneens een lineaire deelruimte?

(*iii*) Gegeven $\alpha, \mu > 0$ en $\beta \in \mathbb{R}$ definieer

$$M^{\beta}_{\alpha,\mu} \;:=\; \{\, f \in F_{\alpha,\mu} \;\mid\; f(0) = \beta \,\} \ .$$

Laat zien dat deze verzameling compact is.

18). Definieer $C(\mathbb{T}) := \{\, f \in C(\mathbb{R}) \mid f(t+1) = f(t) \text{ voor alle } t \in \mathbb{R} \,\}$.

(*i*) Geef aan hoe men $C(\mathbb{T})$ als deelruimte van $(C[0,1], \|..\|_\infty)$ kan beschouwen en verifieer dat deze gesloten en dus zelf een Banachruimte is.

(*ii*) Ga na dat de convolutie

$$(f \star g)(t) \;:=\; \int_0^1 f(t-s)g(s)\mathrm{d}s$$

van twee functies $f, g \in C(\mathbb{T})$ eveneens een 1–periodieke continue functie is.

(*iii*) Laat zien dat $(C[0,1], \star, \|..\|_\infty)$ een commutatieve Banachalgebra is. Waarom heeft deze geen neutraal element?