Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum voor opgaven 41 en 42 is 18 januari 2008 (11:00)

39). Zij H een complexe Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd met de eigenschap, dat het spectrum $\sigma(T) = \{\lambda\}$ alleen uit het punt $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat. Laat zien dat dan $T = \lambda\,\mathrm{id}$.

40). Zij H een Hilbertruimte en $T \in L(H)$.

a) Laat zien dat T^*T zelfgeadjungeerd is en dat $\|T^*T\| = \|T\|^2$ geldt.

b) Zij T bovendien compact. Ga na dat de geadjungeerde operator T^* dan enveneens compact is.

41). Zij H een complexe Hilbertruimte en $U \in L(H)$ een unitaire operator. Ga na dat $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}^2 \mid |\lambda| = 1\}$.

42). Beschouw de Volterraoperator uit opgave 38, voortgezet tot een operator $V : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$.

(i) Laat zien dat $\mathrm{rang}(V + V^*) = \dim(\mathrm{im}(V + V^*)) = 1$ is.

(ii) Ga na dat voor elke zelfgeadjungeerde operator $T \in L(H)$ op een Hilbertruimte H met $\mathrm{rang}\, T = 1$ een $y \in H$ zodanig bestaat dat T kan worden geschreven als $Tx = \langle x \mid y \rangle\, y$ voor alle $x \in H$.

(iii) Schrijf de operator $T = V + V^*$ in de vorm $Tf = \langle f \mid g \rangle\, g$ met een passende $g \in L^2[0,1]$.