Hertentamen functionaalanalyse 20 maart 2009

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Gebruik op ℓ^2 het complete orthonormaalsysteem $((\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} \quad = \quad \frac{1}{2^{k+l}} \quad \text{voor alle } k,l \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$$

gegeven oneindige matrix.

(*i*) Laat zien dat T een continue lineaire operator is.

(*ii*) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.

(*iii*) Bereken de Hilbert–Schmidt norm $|||T||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ van T en concludeer dat T compact is.

(*iv*) Verifieer dat $(\frac{1}{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ een eigenvector van T is en dat alle vectoren loodrecht hierop in $\ker T$ liggen. *Hint:* $|||T|||^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^2$ waar $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de rij van eigenwaarden is (waarin elke eigenwaarde zo vaak voorkomt als zijn multipliciteit aangeeft).

(*v*) Bereken $\|T\|$ en de spectrale representatie van T.

2. Beschouw de vectorruimte $C([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\mathbb{R})$ van reële continue functies op $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ en daarin de twee deelverzamelingen

$$\begin{aligned} E &:= \left\{ g \in C([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}],\mathbb{R}) \;\middle|\; g(-t) = g(t) \text{ voor alle } t \in [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}] \right\} \\ F &:= \left\{ h \in C([-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}],\mathbb{R}) \;\middle|\; h(-t) = -h(t) \text{ voor alle } t \in [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}] \right\} . \end{aligned}$$

(*i*) Laat zien dat

$$\|f\|_\infty := \sup_{-\frac{1}{2}\le t\le \frac{1}{2}} |f(t)|$$

een norm definieert die van $C([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\mathbb{R})$ een Banachruimte maakt.

(*ii*) Ga na dat E en F gesloten deelvectorruimten zijn.

(*iii*) Gebruik $g(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$ en $h(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$ om elke functie $f \in C([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\mathbb{R})$ als som van functies in E en F te schrijven. Waarom is deze opsplitsing $f = g + h$ uniek? Concludeer dat $E \oplus F = C([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\mathbb{R})$ een algebraïsche directe som is.

(*iv*) Toon aan dat $E \oplus F = C([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\mathbb{R})$ een topologische directe som is.

3. Zij H een separabele Hilbertruimte met compleet orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{2k}(e_{2k-1} - \sqrt{3}\, e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{2k}(\sqrt{3}\, e_{2k-1} + e_{2k}) \end{aligned}$$

gedefinieerde continue lineaire operator.

(*i*) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?

(*ii*) Laat zien dat T een compacte normale operator is.

(*iii*) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(*iv*) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

(*v*) Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?