Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 3 en 4 is 19 september (11:00)

1). Diagonalizeer de door

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gedefinieerde lineaire afbeelding.

2). Gegeven zijn de vectoren $x_1, \ldots, x_n \in V$ in een vectorruimte V van eindige dimensie. Onder welke voorwaarde kun je een deelruimte $U < V$ met de volgende eigenschap construeren: voor elk $y \in V$ bestaan eenduidig bepaalde scalairen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en een eenduidig bepaalde vector $z \in U$ met de eigenschap

$$y \;=\; \lambda_1 x_1 \;+\; \ldots \;+\; \lambda_n x_n \;+\; z \;.$$

Is het hiervoor noodzakelijk, dat V eindige dimensie heeft?

3). Definieer op $\mathbb{R}^2$ de normen van $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &:= |x_1| + |x_2| \\ \|x\|_2 &:= \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \\ \|x\|_\infty &:= \max\{|x_1|, |x_2|\} \;. \end{aligned}$$

Toon aan dat dezen normen equivalent zijn. *Hint:* teken voor elk van deze normen de gesloten bol $\overline{U_1(0)}$ van straal 1 en een gesloten bol $\overline{U_r(0)}$ met een welgekozen straal r.

4). Zij C een begrensde en convexe omgeving van de oorsprong $0 \in \mathbb{R}^2$ die t.o.v. de oorsprong symmetrisch is (d.w.z. $x \in C \Leftrightarrow -x \in C$). Laat zien dat d.m.v.

$$p(x) \;:=\; \inf\left\{\lambda \geq 0 \;\middle|\; x \in \lambda C\right\}$$

een norm wordt gedefinieerd, werk hier met $\lambda C := \{\lambda y \,|\, y \in C\}$. (Ter verduidelijking: contraheer of expandeer C met λ totdat x op de rand van C ligt en stel dan $p(x) = \lambda$.) Men noemt de norm p ook het *Minkowski-funktionaal.*