Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 39 en 40 is 28 november (11:00)

37). Zij H een complexe Hilbertruimte en $T \in L(H)$ zelfgeadjungeerd met de eigenschap, dat het spectrum $\sigma(T) = \{\lambda\}$ alleen uit het punt $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat. Laat zien dat dan $T = \lambda \, \mathrm{id}$.

38). Zij H een separabele Hilbertruimte en $T \in L(H)$ een zelfgeadjungeerde operator. Laat zien dat het spectrum $\sigma(T)$ hooguit aftelbaar veel eigenwaarden bevat. *Opmerking:* de vermenigvuldigingsoperator uit opgave 16 geeft een voorbeeld van een zelfgeadjungeerde operator (op de separabele Hilbertruimte $L^2[0,1]$) waarvoor het spectrum overaftelbaar is.

39). Zij H een Hilbertruimte en $F < H$ een gesloten deelruimte. Definieer de orthogonale projectie $\pi : H \longrightarrow H$ d.m.v. de splitsing $H = F \oplus F^\perp$, d.w.z. stel $\pi(x) = y$ voor $x = y + z$ met $y \in F$ en $z \in F^\perp$.

- (i) Ga na dat π zelfgeadjungeerd is.
- (ii) Bereken het spectrum $\sigma(\pi)$.
- (iii) Onder welke voorwaarden is π een compacte operator?

40). Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{3k-2} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-1} + e_{3k}) \\ Te_{3k-1} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-2} + e_{3k}) \\ Te_{3k} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{3k-2} + e_{3k-1}) \end{aligned}$$

gedefinieerde continue lineaire operator.

- (i) Geef de matrix $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \subseteq M_{3\times3}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. $\{e_{3k-2}, e_{3k-1}, e_{3k}\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?
- (ii) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is.
- (iii) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda \, \pi_\lambda$.