Functies en reeksen 2017, extra opgaven

opgave 3.9 Beschouw de reeks $\sum_{k\geq 1} a_k$ in $\mathbb{R}$ met $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$.

(i) Bewijs dat de reeks convergent is.

(ii) Bewijs dat de reeks niet absoluut convergent is.

(iii) Construeer een bijectie $\ell \mapsto k(\ell)$ van $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$ en dus een herschikking $b_\ell = a_{k(\ell)}$ waarvoor de reeks $\sum_{\ell\geq 1} b_\ell$ convergent is met limiet 0.

opgave 3.10 Definieer $f_k(x) := \sin^k x = (\sin x)^k$ en beschouw de reeks

$$\sum_{k\geq 0} f_k \quad . \tag{1}$$

(i) In welke punten $x \in \mathbb{R}$ is (1) puntsgewijs convergent? Wat is de limietfunctie g ? (Herinnering: laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.)

(ii) Op welke intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ convergeert (1) uniform naar g ?

opgave 4.18 Gegeven zijn $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ door middel van

$$f(x,y) \quad = \quad \left(x^2y - \tfrac{1}{3}y^3, \tfrac{1}{3}x^3 - xy^2\right)$$

en $g = f \circ f$.

(i) Ga na dat f (totaal) differentieerbaar is en bereken de afgeleide $Df(x,y)$.

(ii) Controleer of $F(x + \mathrm{i}y) := f_1(x,y) + \mathrm{i}f_2(x,y)$ en/of $G(x + \mathrm{i}y) := g_1(x,y) + \mathrm{i}g_2(x,y)$ complex differentieerbare functies $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zijn.