Tentamen functies en reeksen 9 november 2017

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert en de naam van je werkcollegeleider: Francesco Cattafi (groep 1), Aldo Witte (groep 2) of Dusan Joksimovic (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook laten zien dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- Boeken, cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Gegeven zijn $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ door middel van

$$f(x, y) \quad = \quad |x + \pi|^3 \, \mathrm{e}^{3y} \quad \text{voor alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

en

$$g(t) \quad = \quad (\cos t, \sin t) \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}.$$

  (*i*) Bereken de gradiënt van f en toon aan dat f (totaal) differentieerbaar is.

  (*ii*) Bepaal in $t_0 = \pi^3$ de afgeleide $Dg(t_0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

  (*iii*) De compositie $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definieert op de gebruikelijke manier

$$h(x + \mathrm{i}y) \quad = \quad g_1(f(x, y)) \; + \; \mathrm{i}g_2(f(x, y)) \quad \text{voor alle } x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$$

  een functie $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is h complex differentieerbaar?

2. Voor (vaste) $x \in \mathbb{R}$ beschouw de oneigenlijke integraal

$$\int_x^\infty \mathrm{e}^{(x-t)^3} \, \mathrm{d}t \quad . \tag{1}$$

(i) Laat zien dat (1) een functie $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definieert.

(ii) Ga na dat

$$g(x) \quad = \quad \lim_{y \to x} \int_y^\infty \mathrm{e}^{(x-t)^3}\, \mathrm{d}t$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ (de x in de exponent is geen drukfout).

(iii) Verifieer dat de functie g differentieerbaar is en bereken de afgeleide g'.

3. Gegeven $k \in \mathbb{N}_0$ zij $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continu en $g_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continu met $|f_k(x)| \leq g_k(x)$ voor alle $x \in [0,1]$. Beschouw de reeksen

$$\sum_{k \geq 0} f_k \tag{2}$$

en

$$\sum_{k \geq 0} g_k \tag{3}$$

van functies.

(i) Stel dat (3) puntsgewijs convergent is en ga na dat (2) puntsgewijs convergent is.

(ii) Stel dat (3) uniform convergent is op $[0,1]$ en toon aan dat (2) uniform convergent is op $[0,1]$.

(iii) Stel dat (3) uniform convergent is op $[0,1]$ en bewijs dat (2) in het middel convergent is, dat wil zeggen ten opzichte van de integraalnorm $\|h\|_1 = \int_0^1 |h(x)| \mathrm{d}x$.

(iv) Stel (3) is in het middel convergent, is dan ook (2) in het middel convergent?

4. Definieer $f :]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ door middel van

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \qquad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{als} \quad x \in \{0, \pi\} \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \qquad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

en breidt f 2π–periodiek uit tot $\mathbb{R}$. Beschouw $g = \operatorname{Re} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en $h = \operatorname{Im} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ met Fourier-coëfficiënten $(c_k)_k = \mathcal{F}(g) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ en $(d_k)_k = \mathcal{F}(h) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. *Hint:* maak plaatjes van g en h.

(i) Ga na dat $h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ uniform op $\mathbb{R}$.

(ii) Bereken de Fourier-coëfficiënten c_k (of alternatief de reële Fourier-coëfficiënten a_k en b_k).

(iii) Laat zien dat $(c_k)_k \notin \ell^1(\mathbb{Z})$.