

Tentamen Hamiltoniaanse dynamische systemen 28 januari 2008

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- Cursusmateriaal, boeken en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

Voorzie \mathbb{R}^4 met de kanonieke Poissonstructuur $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ en $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$. Beschouw hierop de kwadratische Hamiltonfunctie

$$H_0^0(q, p) = p_1^2 + q_1^2 + \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} .$$

1. Schrijf de bewegingsvergelijkingen op en bereken de bijbehorende stroming

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (t, (q, p)) &\mapsto \varphi_t(q, p) \end{aligned} .$$

2. Bepaal de minimale periode $T > 0$ met $\varphi_T = \text{id}$ en ga na dat

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (\rho, (q, p)) &\mapsto \varphi_\rho(q, p) \end{aligned}$$

een S^1 -actie op \mathbb{R}^4 definieert.

3. Bewijs dat elke gladde ψ -invariante functie kan worden geschreven als functie van

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \\ \tau_2 &= \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \\ \tau_3 &= q_1 \frac{q_2^2 - p_2^2}{2} + q_2 p_1 p_2 \\ \tau_4 &= p_1 \frac{q_2^2 - p_2^2}{2} - q_1 q_2 p_2 . \end{aligned}$$

Hint: gebruik complexe coördinaten $u = q_1 + ip_1$ en $v = q_2 + ip_2$.

De structuurmatrix $(\{\tau_i, \tau_j\})_{i,j=1,\dots,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau_4 & \tau_3 \\ 0 & 0 & 2\tau_4 & -2\tau_3 \\ \tau_4 & -2\tau_4 & 0 & \tau_2^2 - 4\tau_1\tau_2 \\ -\tau_3 & 2\tau_3 & -\tau_2^2 + 4\tau_1\tau_2 & 0 \end{pmatrix}$ heeft rang 2.

4. Verifieer dat $H_0^0 = H_0^0(\tau)$ en $S(\tau) = 5\tau_1\tau_2^2 - \frac{5}{2}(\tau_3^2 + \tau_4^2)$ Casimirfuncties zijn.
5. Gebruik de waarde η van de Casimir H_0^0 om d.m.v.

$$x := \tau_3, \quad y := \tau_4, \quad z := \tau_1 - 2\tau_2$$

een variabele te elimineren. Herschrijf de relaties

$$\tau_1 \geq 0, \quad \tau_2 \geq 0, \quad S(\tau) = 0$$

in deze variabelen.

6. Ga na dat de (gereduceerde) faseruimte

$$\mathcal{P}_\eta := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{25}(z + 2\eta)(\eta - 2z)^2 = \frac{5}{2}(x^2 + y^2), -2\eta \leq z \leq \frac{1}{2}\eta \right\}$$

een omwentelings-oppervlak is en schets dit oppervlak. Waar heeft \mathcal{P}_η een singulier punt?

De Poissonstructuur op \mathcal{P}_η wordt in de variabelen x, y, z door

$$\{f, g\} = \langle \nabla f \times \nabla g \mid \nabla S_\eta \rangle$$

gegeven, met $S_\eta(x, y, z) = \frac{1}{25}(z + 2\eta)(\eta - 2z)^2 - \frac{5}{2}(x^2 + y^2)$.

7. Bereken de getrunceerde derde orde normaalvorm van $H = H_0^0 + H_1^0$ met

$$H_1^0(q, p) = 2q_1q_2^2$$

en herschrijf deze als functie in x, y en z .

8. Formuleer de (gereduceerde) bewegingsvergelijkingen voor de Hamiltonfunctie

$$\mathcal{H}(x, y, z) = \eta + x.$$

9. Schets voor $\eta > 0$ het faseportret van deze vergelijkingen en bepaal de evenwichtspunten.
10. Reconstrueer de door \mathcal{H} gedefinieerde dynamica in twee vrijheidsgraden. Geef hiervoor aan tot welke soort trajectoriën de verschillende oplossingen van het gereduceerde systeem leiden.
11. Bepaal de singuliere waarden van de energie-impuls-afbeelding

$$\mathcal{EM} = (H_0^0, \mathcal{H}) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

12. Geef aan de hand van een schets van de verschillende waarden van \mathcal{EM} in het (η, h) -vlak een verband tussen deze waarden en de verschillende soorten trajectoriën.
13. Veronderstel dat \mathcal{H} de getrunceerde derde orde normaalvorm van H is en dat het verschil $H - \mathcal{H}$ 'voldoende klein' is. Welke bevindingen over de dynamica van \mathcal{H} gelden ook voor de dynamica van H ? Maak waar nodig extra aannames / vermeld de voorwaarden die je nodig hebt (het is niet gevraagd om deze ook te controleren).

Bonusopgave: kun je een soortgelijke analyse voor een willekeurige (maar nog steeds voldoende kleine) storing van \mathcal{H} doorvoeren? Zijn er wezenlijke verschillen?